Notas de Análisis

Dr. Richard G. Wilson
Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
comentarios: rgw@xanum.uam.mx

Marzo del 2005

Contenido

Capitulo 1

Topología de espacios métricos

El concepto de una métrica es una generalización del concepto de distancia en un espacio Euclideano, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.0.1. *Una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que cumple con los siguientes axiomas:*

i) Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$,

ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, y

iii) Para cada $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La primera condición dice que la distancia de x a y debe ser la misma que la distancia de y a x; la segunda dice que la distancia entre un punto y si mismo es 0, y la distancia entre puntos distintos es positiva, y la tercera se llama la *desigualdad triangular* y dice que el largo del tercer lado de un triangulo es menor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Un conjunto X con una métrica d se llama un *espacio métrico* y se escribe (X, d). A continuación, vamos a investigar las propiedades topológicas de un espacio métrico, es decir propiedades relacionados con los conceptos de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados y convergencia de sucesiones.

Si d es una métrica en un conjunto X, *la bola abierta de radio ϵ, centro en x* es el subconjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

En forma semejante, la *bola cerrada de radio ϵ, centro en x* es el subconjunto

$$B_\epsilon^-(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Definición 1.0.2. *Sea (X, d) un espacio métrico; Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto si para cada punto $x \in A$ podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A$. La colección de subconjuntos abiertos de un espacio métrico (X, d) se denotará por τ_d. Un conjunto es* cerrado *si su complemento es abierto.*

En general en un espacio métrico habrá subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Tarea. Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $(\mathbb{R}, |\;|)$.

Lógicamente una bola abierta debe ser un conjunto abierto, pero esto no es inmediatemente obvio. No obstante, es una consecuencia sencilla de los axiomas de una métrica: Suponer que $z \in B_\epsilon(x)$, entonces $d(x, z) = r < \epsilon$. Si ponemos $\delta = \epsilon - r$, entonces $\delta > 0$ y si $w \in B_\delta(z)$, tenemos $d(w, z) < \delta$ y entonces la desigualdad triangular implica que $d(w, x) \leq d(w, z) + d(z, x) < \delta + r = \epsilon$, o sea, $w \in B_\epsilon(x)$. Así hemos demostrado que $B_\delta(z) \subseteq B_\epsilon(x)$ y en consecuencia, $B_\epsilon(x)$ es abierto. □

Tarea. Demostrar que una bola cerrada es un conjunto cerrado.

Teorema 1.0.3. *La unión de conjuntos abiertos es abierta y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta. Tanto X como $\emptyset$ son abiertos.*

Demostración: Suponer que $I \neq \emptyset$ y $A_i \subseteq X$ es abierto para cada $i \in I$. Se requiere demostrar que $A = \bigcup\{A_i : i \in I\}$ es abierto. Con este fin, suponer que $x \in A$; entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$. Puesto que A_j es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A_j$. Pero entonces $B_\epsilon(x) \subseteq A$, así demostrando que A es abierto.

Ahora suponer que F es un conjunto finito no vacio y A_k es abierto para cada $k \in F$. Se requiere demostrar que $A = \bigcap\{A_i : i \in F\}$ es abierto. Con este fin, suponer que $x \in A$; puesto que $x \in A_k$ para cada $k \in F$, sigue que para cada $k \in F$, existe $\epsilon_k > 0$ tal que $B_{\epsilon_k} \subseteq A_k$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_k : k \in F\}$; puesto que F es un conjunto finito, $\epsilon > 0$ y $B_\epsilon(x) \subseteq A_k$ para cada $k \in F$, o sea, $B_\epsilon(x) \subseteq A$, así demostrando que A es abierto.

Finalmente debemos demostrar que X y $\emptyset$ son abiertos. Pero si $x \in X$, entonces el intervalo $B_1(x) \subseteq X$, así demostrando que X es abierto. El conjunto vacío $\emptyset$ cumple con la definición de un conjunto abierto pues no hay $x \in \emptyset$. □

Una colección de subconjuntos de un conjunto X que satisfacen las condiciones descritas en el Teorema 1.0.3 se llama *una topología para X*. Así es que en un espacio métrico (X, d) la colección los conjuntos abiertos, τ_d es una topología en X y se llama la *topología métrica*.

Corolario 1.0.4. *La unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de conjuntos cerrados es cerrado. Tanto X como $\emptyset$ son cerrados.*

Demostración: Tarea.

Tarea. Demostrar que cualquier conjunto finito es cerrado.

Si A es un subconjunto de un espacio métrico (X, d), entonces A tiene una estructura métrica natural - *la métrica restringida* - al restringir d al subconjunto $A \times A \subseteq X \times X$. Aunque es abuso de notación, usamos $d|A$ para denotar esta métrica. Es decir, $d|A : A \times A \to [0, \infty)$ tal que si $a, b \in A$, $(d|A)(a, b) = d(a, b)$.

Tarea. Demostrar que $d|A$ es una métrica en A.

Tarea. Denotamos la bola abierta con radio ϵ y centro $a \in A$, en $(A, d|A)$ por $B^A_\epsilon(a)$. Demostrar que para cada $a \in A$ y $\epsilon > 0$, tenemos $B^A_\epsilon(a) = B_\epsilon(a) \cap A$. Como consecuencia, un subconjunto $U \subseteq A$ es abierto en $(A, d|A)$ si y solo si existe un subconjunto abierto V en (X, d) tal que $U = V \cap A$.

Definición 1.0.5. *Si $A \subseteq X$, entonces se define el* interior *de A en el espacio métrico (X, d), escrito $\mathit{int}_X(A)$ (o $\mathit{int}(A)$ o A° si no hay posibilidad de confusión), por*

$$\mathrm{int}_X(A) \equiv \mathrm{int}(A) = \bigcup\{U : U \text{ es abierto en } X \text{ y } U \subseteq A\}.$$

O sea, el interior de A es la union de todos los subconjuntos abiertos de X contenidos en A. Claramente $\mathrm{int}(A) \subseteq A$.

Ejemplo 1.0.6. *Sea d la métrica discreta en un conjunto X; o sea, d se define por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $B_1(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$ y por lo tanto cada conjunto unitario es abierto. Sigue inmediatamente que cada subconjunto de X, (al ser la unión de sus puntos) es abierto, o sea la topología métrica $\tau_d = \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto, si $A \subseteq X$, entonces $\mathrm{int}(A) = A$. Igualmente, todo subconjunto es cerrado.

Ejemplo 1.0.7. *El interior del intervalo cerrado $[0, 1]$ en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\ |)$ es el intervalo abierto $(0, 1)$. Nota que $1 \notin \mathrm{int}([0, 1])$ pues no existe ningún $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \subseteq [0, 1]$. (Se puede aplicar el mismo argumento a 0.)*

Lema 1.0.8. *El interior de un conjunto es un conjunto abierto.*

Demostración: Por definición, el interior es una unión de conjuntos abiertos. Por el Teorema 1.0.3, éste es abierto. □

Como consecuencia inmediata, tenemos que $\mathrm{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande de X que está contenido en A.

Definición 1.0.9. *Sea $A \subseteq X$; se define la cerradura o clausura de A en X, escrito $\mathrm{cl}_X(A)$ (o $\mathrm{cl}(A)$ o $\overline{A}$ si confusión no es posible) como*

$$\mathrm{cl}_X(A) \equiv \mathrm{cl}(A) = \bigcap \{C : C \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subseteq C\}.$$

O sea, la cerradura de un conjunto A es la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a A. Claramente, $\mathrm{cl}(A) \supseteq A$.

Lema 1.0.10. *La cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado.*

Demostración: Por definición, la cerradura es la intersección de conjuntos cerrados. Por el Corolario 1.0.4, ésta es cerrada. □

Como consecuencia inmediata, tenemos que $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto A. En el siguiente teorema se describen varias propiedades de la cerradura.

Teorema 1.0.11.

a) *A es cerrado si y solo si $A = \mathrm{cl}(A)$,*

b) *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$,*

c) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$,

d) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$,

e) $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$.

Demostración:

a) El conjunto $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, y por lo tanto, si $A = \mathrm{cl}(A)$, entonces A es cerrado. Inversamente, si A es cerrado, entonces A es claramente el cerrado más pequeño que contiene a A, por lo tanto $A = \mathrm{cl}(A)$.

b) Tenemos $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}(B)$ y este último conjunto es cerrado. Puesto que $\mathrm{cl}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, tenemos $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$.

c) Por la parte a), si un conjunto B es cerrado, $B = \mathrm{cl}(B)$. El conjunto $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, por lo tanto si sustituimos $B = \mathrm{cl}(A)$ obtenemos el resultado requerido.

d) Puesto que $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$, tenemos que $A \cup B \subseteq \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$, el cual, por ser una unión finita de cerrados es cerrada. Por lo tanto, puesto que $\mathrm{cl}(A \cup B)$ es el cerrado más pequeño que contiene a $A \cup B$, tenemos $\mathrm{cl}(A \cup B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B)$. Para demostrar la inclusión inversa, nota que $A \subseteq A \cup B$ y por lo tanto, del b) arriba, $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$ e igualmente $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$. Por lo tanto $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup B)$.

e) Tenemos $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{cl}(B)$; por lo tanto, $A \cap B \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ y este último conjunto es cerrado. Puesto que $\mathrm{cl}(A \cap B)$ es el cerrado más pequeño que contiene a $A \cap B$ tenemos $\mathrm{cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$.

$\square$

Nota que en general, no tenemos igualdad en e) pues en el espacio $(\mathbb{R}, |\ |)$, si $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$ entonces $\mathrm{cl}(A \cap B) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ pero $\mathrm{cl}(A) = [0,1]$ y $\mathrm{cl}(B) = [1,2]$ y por lo tanto $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \{1\}$.

El interior tiene propiedades análogas:

Teorema 1.0.12.

a) *A es abierto si y solo si* $A = \mathrm{int}(A)$,

b) *Si $A \subseteq B$, entonces* $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(B)$,

c) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$,

d) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$,

e) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

Tarea. Demostrar el Teorema 1.0.12.

Tarea. Demostrar que $B_\epsilon^-(x) \supseteq \overline{B_\epsilon(x)}$. ¿Son iguales?

Vamos a necesitar otra caracterización de la cerradura de un conjunto, pero primero hacemos las siguientes definiciones.

Definición 1.0.13. *Sea $A \subseteq X$ y $x \in A$; se dice que A es una vecindad de x si* $x \in \mathrm{int}(A)$.

Tarea. Demostrar que si $x \neq y$, entonces existen vecindades ajenas de x y y respectivamente.

Una *sucesión* en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Con frecuencia, el término sucesión refiere al rango de la función f: Se denota el elemento $f(n) \in X$ por f_n y se escribe "Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (a veces simplemente $\{f_n\}$) una sucesión". El elemento $f(n)$ se llama el *n-ésimo término* de la sucesión; así es que $f(1)$ es el primer término, $f(2)$ el segundo término etc.

Cuando todos los términos de una sucesión con la excepción de un número finito de ellos cumplen con una propiedad P (o sea, todos los términos a partir del *n*-esimo tienen P para algún $n \in \mathbb{N}$) se dice que la sucesión tiene P *finalmente*. Si un número infinito de términos de la sucesión tienen P, se dice que la sucesión tiene P *frecuentemente*.

Ejemplo 1.0.14. *La sucesión* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$ *es frecuentemente positiva y frecuentemente negativa pero no es ni finalmente positiva ni finalmente negativa. Por el otro lado, la sucesión* $\{3, 2, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ *es finalmente igual a* 1 *y finalmente positiva.*

Definición 1.0.15. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *en* (X, d) *converge a* $x \in X$ *(escrito* $\{x_n\} \to x$*) si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \epsilon$, *o sea,* $x_n \in B_\epsilon(x)$. *El elemento* x *se llama el* límite *de la sucesión y se escribe* $\lim_{n\to\infty}(\{x_n\}) = x$. *Una sucesión que converge se llama una sucesión* convergente.

Intentaremos interpretar esta definición: Nota primero que $d(x_n, x)$ es la distancia entre x y x_n. Por eso, $\{x_n\} \to x$ quiere decir que dado cualquier número positivo ϵ podemos encontrar un cierto término en la sucesión de tal manera que después de ese término todos los demás están a una distancia menor que ϵ de x. O sea, dado cualquier $\epsilon > 0$, la sucesión está finalmente dentro de una distancia ϵ de x.

Ejemplo 1.0.16. *La sucesión* $\{1/n\}$ *converge a* 0 *en* $(\mathbb{R}, |\;|)$ *pero no en* $(\mathbb{R}, d)$ *donde* d *es la métrica discreta (ver Ejemplo 1.0.6.).*

Demostración: Sea dado $\epsilon > 0$; debemos encontrar un término en la sucesión tal que él y todos los términos sucesivos están dentro de ϵ de 0. Empleamos la propiedad Arquimedeana de los enteros: Dado cualquier número real r, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$. Así es que puesto que $\epsilon > 0$, $1/\epsilon$ es un número real y podemos encontrar un entero $n_0 > 1/\epsilon$. Entonces, si $n > n_0$, tenemos $1/n < 1/n_0 < \epsilon$, o sea, a partir del n_0-ésimo término, todos los términos están dentro de ϵ de 0.

En cambio, si d es la métrica discreta, entonces dado $\epsilon = 0.5$, la bola abierto $B_\epsilon(0) = \{0\}$ y la sucesión no está nunca dentro de $B_\epsilon(0)$. $\square$

Teorema 1.0.17. *El límite de una sucesión convergente es único, o sea, si* $\{x_n\} \to x$ *y* $\{x_n\} \to y$, *entonces* $x = y$.

Demostración: Suponer que $x \neq y$; entonces $d(x, y) = r > 0$ y por lo tanto si $\epsilon = r/2 > 0$, $B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset$. Pero si $\{x_n\} \to x$, entonces $\{x_n\}$ es finalmente en $B_\epsilon(x)$ e igualmente, puesto que $\{x_n\} \to y$, $\{x_n\}$ es finalmente en $B_\epsilon(y)$. Esta contradicción demuestra que $x = y$. $\square$

Una sucesión que no converge se llama divergente: Una sucesión $\{x_n\}$ diverge si para cada $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, x) > \epsilon$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X y $\{\jmath_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos (o sea, $\jmath_{n+1} > \jmath_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Si se define $z_n = x_{\jmath_n}$ se obtiene una sucesión $\{z_n\}$ y la llamamos una *subsucesión* de $\{x_n\}$.

Teorema 1.0.18. *Si $\{x_n\} \to x$ entonces cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ también converge a x.*

Demostración: Sea dado $\epsilon > 0$; puesto que $\{x_n\} \to x$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \epsilon$. Si $\{\jmath_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos y $z_n = x_{\jmath_n}$, entonces $\jmath_{n_0} \geq n_0$ y por lo tanto, si $n \geq n_0$, tenemos $d(z_n, x) = d(x_{\jmath_n}, x) < \epsilon$ pues $\jmath_n > \jmath_{n_0} \geq n_0$. $\square$

Definición 1.0.19. *Una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Teorema 1.0.20. *Una sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración: Suponer que $\{x_n\} \to x$ y sea dado $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_0$, $d(x_k, x) < \epsilon/2$. Entonces si $m, n \geq n_0$, tenemos $d(x_m, x_n) = d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, o sea, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. $\square$

Tarea. Demostrar que la sucesión $\{1/n\}$ es de Cauchy pero diverge en el espacio métrico $((0,1), |\ |)$.

Definición 1.0.21. *Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ si para cada $\epsilon > 0$, $\{x_n\}$ está frecuentemente dentro de una distancia ϵ de x.*

Tarea. Demostrar que los siguientes son equivalentes:

a) x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$,

b) Para cada $\epsilon > 0$, un número infinito de términos de la sucesión están en $B_\epsilon(x)$,

c) Para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$ y $d(x, x_m) < \epsilon$.

Tarea. Demostrar que el límite de una sucesión convergente es el único punto de acumulación de la sucesión.

Teorema 1.0.22. *Si x es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ entonces existe una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x.*

Demostración: Puesto que x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$, por c) arriba, dado $m = 1$ y $\epsilon = 1$, existe $\jmath_1 \in \mathbb{N}$, $\jmath_1 > m = 1$ tal que $d(x, x_{\jmath_1}) < 1$. Ahora, aplicando c) otra vez con $m = \jmath_1$ y $\epsilon = 1/2$, existe $\jmath_2 > m = \jmath_1$ tal que $d(x, x_{\jmath_2}) < 1/2$. Si procedemos así con repetidas aplicaciones de c), obtenemos una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{\jmath_n\}$ tal que $d(x, x_{\jmath_n}) < 1/n$. Demostraremos que si se define $z_n = x_{\jmath_n}$, entonces $\{z_n\} \to x$. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$; por la propiedad Arquimedeana de los enteros, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$, o sea, $1/n_0 < \epsilon$. Entonces si $n \geq n_0$, $1/n \leq 1/n_0 < \epsilon$ y por lo tanto $d(z_n, x) = d(x_{\jmath_n}, x) < 1/n < \epsilon$, lo que termina la demostración de convergencia. □

El inverso es cierto también:

Teorema 1.0.23. *Si existe una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ que converge a x, entonces x es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$.*

Demostración: Tarea.

Teorema 1.0.24. *Un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si para cada sucesión $f : \mathbb{N} \to A$ y cada punto de acumulación $x \in X$ de la sucesión f, tenemos $x \in A$.*

(O sea, un conjunto A es cerrado si y solo si contiene todos los puntos de acumulación - si los hay - de todas las sucesiones en A.)

Demostración: Suponer primero que A es cerrado y sean $\{x_n\}$ una sucesión en A con punto de acumulación x. Demostraremos que $x \in A$. Suponer que no; entonces $x \in X \setminus A$ y este último conjunto es abierto. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Pero, por ser x un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$, la sucesión $\{x_n\}$ está frecuentemente en $B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus A$, lo cual es una contradicción, pues $x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Inversamente, suponer que A no es cerrado, entonces $X \setminus A$ no es abierto y por lo tanto, existe $x \in X \setminus A$ tal que para cada $\delta > 0$, $B_\delta(x) \not\subseteq X \setminus A$, o sea, $B_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$. En particular, $A \cap B_1(x) \neq \emptyset$ y podemos escoger $x_1 \in A \cap B_1(x)$; también, $A \cap B_{1/2}(x) \neq \emptyset$ y escogemos $x_2 \in A \cap B_{1/2}(x)$. Procediendo así, obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in A$ y $d(x, x_n) < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $\{x_n\} \to x$ y por lo tanto, $x \notin A$ es punto de acumulación de una sucesión en A. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$ y escoger $n_0 > 1/\epsilon$; si $n \geq n_0$, entonces $d(x, x_n) < 1/n \leq 1/n_0 < \epsilon$ y la demostración está concluida. □

Por los Teoremas 1.0.22 y 1.0.23, un punto x es punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}$ si y solo si existe una subsucesión convergente a x.

Corolario 1.0.25. *Un subconjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si cada sucesión en A que converge en X, converge a un punto de A.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A y suponer que x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$. Por el Teorema 1.0.22, hay una subsucesión (en A) convergente (en X) a x. Ahora la hipótesis implica que $x \in A$ y el Teorema 1.0.24 implica que A es cerrado.

($\Rightarrow$) Inversamente, si $\{x_n\}$ es una sucesión en un conjunto cerrado A y $\{x_n\} \to x \in X$, entonces x es un punto de acumulación de $\{x_n\}$ y por el Teorema 1.0.24, tenemos $x \in A$. □

Sea (X, d) un espacio métrico; si $A \subseteq X$ y $x \in X$ entonces definimos la *distancia de x a A* como

$$d_A(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

La función d_A nos permite dar otra caracterización de cerradura, que presentamos a continuación.

Teorema 1.0.26. *$x \in \mathrm{cl}(A)$ si y solo si $d_A(x) = 0$.*

Demostración: Si $x \in \mathrm{cl}(A)$, entonces para cada $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$, o sea, $x_n \in A$ y $d(x_n, x) < 1/n$. Por lo tanto

$$d_A(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} \leq d(x, x_n) < 1/n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sigue inmediatamente que $d_A(x) = 0$.

Inversamente, suponer que $x \notin \mathrm{cl}(A)$. Entonces $x \in X \setminus \mathrm{cl}(A)$, y este conjunto es abierto. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$, tal que $B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(A)$. Esto implica que si $z \in A$, entonces $d(z,x) \geq \epsilon$ y por lo tanto $d_A(x) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} \geq \epsilon$. □

Bases, bases locales y subconjuntos densos

En general en espacios métricos hay muchos conjuntos abiertos y conviene considerar subcolecciones reducidas que de alguna manera "determinan" a todos los abiertos. Por eso, introducimos ahora los conceptos de base y base local. El siguiente resultado es una consecuencia trivial de la definición de conjunto abierto.

Lema 1.0.27. *Un conjunto es abierto si y solo si es la union de bolas abiertas.*

Demostración: Tarea.

Definición 1.0.28. *Una colección $\mathcal{B}$ de conjuntos abiertos es una base del espacio métrico si cada abierto no vacio es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

El Lema 1.0.27 implica que la colección de todas las bolas abiertas en un espacio métrico es una base del espacio, pero puede haber otras bases.

Lema 1.0.29. *Una colección $\mathcal{B}$ de abiertos es una base de un espacio métrico (X,d) si y solo si para cada conjunto abierto U y cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Demostración: Tarea.

Ejemplo 1.0.30. *En $(\mathbb{R}, |\;|)$ hay tantos intervalos como números reales, o sea, la colección de abiertos es no numerable. No obstante, la colección de intervalos*

$$\mathcal{B} = \{(p,q) : p, q \in \mathbb{Q}\ p < q\}$$

es una base numerable para los abiertos de $(\mathbb{R}, |\;|)$.

Demostración: Si U es abierto en $(\mathbb{R}, |\,|)$ y $x \in U$, entonces por definición de un conjunto abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U$. Escoger números racionales $p \in (x-\epsilon, x)$ y $q \in (x, x+\epsilon)$; claramente $x \in (p, q) \subseteq U$.

Finalmente, hay una biyección entre $\mathcal{B}$ y un subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, el cual es numerable. Por eso, $\mathcal{B}$ es numerable. □

Definición 1.0.31. *Se dice que un espacio satisface al segundo axioma de numerabilidad (en forma abreviada, el espacio es segundo numerable) si tiene una base numerable.*

Acabamos de demostrar que $(\mathbb{R}, |\,|)$ es segundo numerable.

Tarea: Demostrar que $\mathbb{R}$ con la métrica discreta no es segundo numerable.

En lo que sigue, $\mathcal{V}_x$ denotará el conjunto de todas las vecindades de un punto x en un espacio métrico (X, d).

Definición 1.0.32. *Una subfamilia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ es una base local en x si para cada $V \in \mathcal{V}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq V$.*

Tarea: La familia $\mathcal{B}_x = \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de x en cualquier espacio métrico (X, d).

Un espacio topológico satisface al *primer axioma de numerabilidad* (en forma abreviada se dice *primero numerable*) si en cada punto hay base local numerable. La tarea demuestra que cada espacio métrico es primero numerable.

Tarea: Si $\mathcal{B}$ es una base de (X, d) y $x \in X$, entonces $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base local en x.

Definición 1.0.33. *Un subconjunto D de un espacio métrico (X, d) es denso en X si $\mathrm{cl}(D) = X$.*

Lema 1.0.34. *Un subconjunto D de (X, d) es denso si y solo si para cada conjunto abierto $U \neq \emptyset$, tenemos $U \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración: $(\Leftarrow)$ Si existe un subconjunto abierto no vacio U tal que $U \cap D = \emptyset$, entonces $D \subseteq X \setminus U \subsetneq X$. Puesto que $X \setminus U$ es cerrado, sigue que $\mathrm{cl}(D) \subseteq X \setminus U \subsetneq X$, o sea, D no es denso en X. △

$(\Rightarrow)$ Si D no es denso en (X, d), entonces $\mathrm{cl}(D) \subsetneq X$ y por lo tanto, $U = X \setminus \mathrm{cl}(D)$ es un conjunto abierto no vacio. Obviamente $U \cap \mathrm{cl}(D) = \emptyset$ y puesto que $D \subseteq \mathrm{cl}(D)$ tenemos $U \cap D = \emptyset$. □

Definición 1.0.35. *Un espacio métrico es separable si posee un subconjunto denso numerable.*

Tarea: Demostrar que $(\mathbb{R}, |\,|)$ es separable ($\mathbb{Q}$ es denso), pero $\mathbb{R}$ con la métrica discreta no lo es.

Teorema 1.0.36. *Un espacio métrico es segundo numerable si y solo si es separable.*

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para (X,d). Sin perder generalidad, podemos asumir que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Por ser numerable, existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ y denotamos $f(n)$ por B_n, o sea podemos enumerar el conjunto $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora, puesto que $B_n \neq \emptyset$, el Axioma de Elección nos permite escoger $x_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y denotamos por D el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos que D es denso en X. Con este fin, nota que por el Lema 1.0.34, basta demostrar que si U es abierto no vacio, entonces $U \cap D \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{B}$ es una base de (X,d) y U no es vacio, U es la unión de elementos de $\mathcal{B}$, o sea, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq U$ (en general, habrá muchos B_m's contenido en U). Pero $x_m \in B_m$ y por lo tanto $x_m \in U$, así demostrando que $U \cap D \neq \emptyset$. $\triangle$

($\Leftarrow$) Suponer que D es un subconjunto numerable y denso en X. Como en el caso de la base, podemos enumerar el conjunto D como

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora definimos

$$\mathcal{B} = \{B_{1/m}(x_n) : m, n \in \mathbb{N}\};$$

claramente los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos. Además, la función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathcal{B}$ definida por

$$(m,n) \mapsto B_{1/m}(x_n)$$

es suprayectiva y puesto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, sigue que $\mathcal{B}$ es numerable también.

Solo nos falta demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de (X,d). Por el Lema 1.0.29, basta probar que si U es abierto y $x \in U$, entonces existen $\imath, \jmath \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{1/\jmath}(x_\imath)$.

Puesto que U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Por la propiedad Arquimedeana de los números reales, podemos escoger $\jmath \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/\jmath < \epsilon/2$ y puesto que D es denso y $B_{1/\jmath}(x)$ es un conjunto abierto no vacio, existe $\imath \in \mathbb{N}$ tal que $x_\imath \in B_{1/\jmath}(x)$. Afirmamos que $x \in B_{1/\jmath}(x_\imath) \subseteq U$. Para demostrar estas inclusiones, nota primero que escogimos $x_\imath \in B_{1/\jmath}(x)$, o sea, $d(x, x_\imath) < 1/\jmath$ y por lo tanto, $x \in B_{1/\jmath}(x_\imath)$. Además, si $z \in B_{1/\jmath}(x_\imath)$, entonces $d(z,x) \leq d(z,x_\imath) + d(x_\imath, x) < 1/\jmath + 1/\jmath < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, y por lo tanto $z \in B_\epsilon(x) \subseteq U$; así queda demostrado que $B_{1/\jmath}(x_\imath) \subseteq U$. $\square$

Capitulo 2

Continuidad y continuidad uniforme

2.1 Continuidad

Sean (X,d) y (Y,e) espacios métricos y $f : X \to Y$. La idea tras el concepto de continuidad de una función f en un punto x_0 es la siguiente:

Si $x \in X$ es cualquier punto en el dominio de f "cerca" de x_0 entonces $f(x)$ está cerca de $f(x_0)$. O más precisamente, *¿Podemos hacer que $f(x)$ está dentro de ϵ de $f(x_0) \in Y$ si hacemos x suficientemente cerca de (pero no igual a) x_0.*

Definición 2.1.1. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios métricos. Se dice que f es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < d(x,x_0) < \delta$, entonces $e(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

O sea, $f(x)$ y $f(x_0)$ yacen dentro de ϵ si x y x_0 yacen dentro de δ, uno del otro. Una función es *continua* si es continua en todos los puntos de su dominio.

Nota importante. En general el valor de δ depende del valor de ϵ. Esto es muy natural, si queremos que $e(f(x), f(x_0)) < 1$ (digamos), tendremos que elegir un cierto valor de δ, pero si queremos que $e(f(x), f(x_0)) < 1/1000$ es natural pensar que el valor de δ va a ser mucho más pequeño. Es decir, el valor de δ casi siempre va a ser dependiente del valor de ϵ.

Tarea. Demustra que si f es una función constante, se puede elegir $\delta = 1$ independientemente del valor de ϵ.

A veces, el valor de δ también depende del punto x_0:

Tarea. Demuestra que si $f : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ estaá dada por $f(x) = x^2$, entonces dado $\epsilon > 0$, si $x_0 = 1$, podemos escoger $\delta = \epsilon/2$ pero este valor de δ no funciona si $x_0 = 3$.

Antes de demostrar el siguiente teorema, veamos la negación de continuidad en un punto:

Una función $f : (X, d) \to (Y, e)$ es *discontinua en* a si existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in X$ tal que $d(x, a) < \delta$ pero $e(f(x), f(a)) \geq \epsilon$.

Teorema 2.1.2. *Una función $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua en $a \in X$ si y solo si para cada sucesión $\{x_n\} \to a$, tenemos $\{f(x_n)\} \to f(a)$.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Suponer que f es continua en a y sea $\{x_n\} \to a$. Sea dado $\epsilon > 0$; por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$, entonces $e(f(x), f(a)) < \epsilon$. También, puesto que $\{x_n\} \to a$, dado este mismo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $d(x_n, a) < \delta$. Entonces, si $n \geq n_0$, tenemos $d(x_n, a) < \delta$ y en consecuencia, $e(f(x_n), f(a)) < \epsilon$; o sea, $\{f(x_n)\} \to f(a)$. $\triangle$

$(\Leftarrow)$ Suponer que f no es continua en a. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe $x \in X$ tal que $d(x, a) < \delta$ pero $e(f(x), f(a)) \geq \epsilon$.

En particular, existe $x_1 \in X$ tal que $d(x_1, a) < 1$ pero $e(f(x_1), f(a)) \geq \epsilon$.
En particular, existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_2, a) < 1/2$ pero $e(f(x_2), f(a)) \geq \epsilon$.

$\vdots$

En particular, existe $x_k \in X$ tal que $d(x_k, a) < 1/n$ pero $e(f(x_k), f(a)) \geq \epsilon$.

Así construimos una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $d(x_n, a) < 1/n$ pero $e(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora es claro que $\{x_n\} \to a$ (Por qué) pero $\{f(x_n)\} \not\to f(a)$ pues la sucesión $\{f(x_n)\}$ no está finalmente en la bola abierta $B_\epsilon(a)$. $\square$

Ahora vamos a dar una caracterización de continuidad en términos de vecindades.

Teorema 2.1.3. *Una función $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua en $a \in X$ si y solo si $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en (X, d) para cada vecindad V de $f(a)$ en (Y, e).*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Suponer que f es continua en a y sea V una vecindad de $f(a)$. Entonces $f(a) \in \text{int}(V)$ y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$. Por ser continua f en a, dado este mismo ϵ, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, a) < \delta$, $e(f(x), f(a)) < \epsilon$, o sea, $f(x) \in B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$. Por lo tanto, si $x \in B_\delta(a)$, entonces $f(x) \in V$, es decir $a \in B_\delta(a) \subseteq f^{-1}[V]$, o sea, $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a. $\triangle$

$(\Leftarrow)$ Suponer que $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en A para cada vecindad V de $f(a)$ en X y sea dado $\epsilon > 0$. La bola abierta $V = B_\epsilon(f(a))$ es una vecindad de $f(a)$ y por lo tanto $f^{-1}[V]$ es una vecindad de a en X, o sea, $a \in U = \text{int}(f^{-1}[V])$. Entonces por ser U abierto en X, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$ y por lo tanto, si $x \in X$ y $d(x, a) < \delta$, se tiene $x \in U$ y por lo tanto, $f(x) \in V = B_\epsilon(f(a))$; o sea, $e(f(x), f(a)) < \epsilon$, así demostrando que f es continua en a. $\square$

Corolario 2.1.4. *Una función $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua si y solo si $f^{-1}[V]$ es abierto en (X, d) para cada subconjunto abierto $V \subseteq (Y, e)$.*

Demostración: Tarea.

Teorema 2.1.5. *Si $f, g : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ son continuas en a entonces las funciones $f \pm g : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ definidas por $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ son continuas en a.*

Demostración: Tarea.

2.2 Continuidad Uniforme

Como mencionamos en la nota después de la Definición 2.1.1, en general la elección de δ en la definición de continuidad en un punto a depende no solo de ϵ pero también de a mismo. Dado ϵ, cuando existe un solo $\delta > 0$ que sirve para todos los $x \in X$ de f, se dice que f es *uniformemente continua* en X. Formalmente,

Una función $f : (X, d) \to (Y, e)$ es *uniformemente continua en X* si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que solo depende de ϵ) tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $e(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Es inmediatemente obvio de la definición que una función uniformemente continua en X es continua en X. Más tarde veremos un inverso parcial a esta observación.

Ejemplo 2.2.1. *La función $f : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ dada por $f(x) = 4x - 3$ es uniformemente continua.*

Demostración: Es fácil verificar que dado $\epsilon > 0$, si ponemos $\delta = \epsilon/4$ (o sea, δ depende solamente de ϵ), entonces si $|x - y| < \delta$, tenemos $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. $\square$

Ejemplo 2.2.2. *La función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $([0, 1], |\ |)$.*

Demostración: Tarea. (Verificar que si $\delta = \epsilon/3$ (o sea, δ depende solamente de ϵ), $x, a \in [0, 1]$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|x^2 - a^2| < \epsilon$.)

Ejemplo 2.2.3. *La función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $(\mathbb{R}, |\ |)$.*

Demostración: Tarea.

Tarea: Demostrar que la composición de dos funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Lema 2.2.4. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$; la función $d_A : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ dada por*

$$d_A(x) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

es uniformemente continua en (X, d).

Demostración: Para cada $x, y, z \in X$, tenemos $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_A(x) &= \inf\{d(x, y) : y \in A\} \leq \inf\{d(x, z) + d(z, y) : y \in A\} \\ &= d(x, z) + \inf\{d(z, y) : y \in A\} = d(x, z) + d_A(z) \end{aligned}$$

o sea,

$$d_A(x) - d_A(z) \leq d(x, z).$$

Si intercambios los papeles de x y z obtenemos $d_A(z) - d_A(x) \leq d(z, x) = d(x, z)$, y por lo tanto,

$$|d_A(x) - d_A(z)| \leq d(x, z).$$

Ahora, si $\epsilon > 0$, escogemos $\delta = \epsilon$ y entonces si $d(x, z) < \delta$ sigue que $|d_A(x) - d_A(z)| \leq d(x, z) < \delta = \epsilon$. □

Corolario 2.2.5. *Si (X, d) es un espacio métrico y E, F son subconjuntos cerrados y ajenos de X, entonces existen subconjuntos abiertos y ajenos U y V tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$.*

Demostración: Consideremos las funciones d_E y d_F; por el Lema 2.2.4, ambas funciones son uniformemente continuas y por el Teorema 1.18, $d_E(x) = 0$ si y solo si $x \in \mathrm{cl}(E) = E$ y $d_F(x) = 0$ si y solo si $x \in \mathrm{cl}(F) = F$. Definimos

$$U = \{z \in X : d_E(z) - d_F(z) < 0\} \text{ y } V = \{z \in X : d_E(z) - d_F(z) > 0\}.$$

Obviamente U y V son conjuntos ajenos y si $x \in E$ entonces $x \notin F$ y por lo tanto $d_E(x) = 0$ y $d_F(x) > 0$; esto implica que $d_E(x) - d_F(x) < 0$, o sea $x \in U$. En forma semejante, si $x \in F$ entonces $x \notin E$ y por lo tanto $d_F(x) = 0$ y $d_E(x) > 0$; esto implica que $d_E(x) - d_F(x) > 0$, o sea $x \in V$. Por lo tanto, $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$. Finalmente, el Teorema 2.1.5 implica que la función $d_E - d_F : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ es continua y el Teorema 1.26 ahora implica que $U = (d_E - d_F)^{-1}[(-\infty, 0)]$ y $V = (d_E - d_F)^{-1}[(0, \infty)]$ son conjuntos abiertos. □

Capitulo 3

Completez y Compacidad

3.1 Completez

En el Teorema 1.0.20, vimos que una sucesión convergente es de Cauchy y en la tarea que lo sigue, vimos que el resultado inverso es falso en general. Hacemos la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *Un espacio métrico (X, d) es completo si cada sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Ejemplo 3.1.2. $(\mathbb{R}, |\ |)$ *es completo.*

Demostración: Ver Teorema 2.2.8 de las notas de Cálculo Avanzado. $\square$

Ejemplo 3.1.3. $(\mathbb{Q}, |\ |)$ *no es completo.*

Demostración: Considera una sucesión de números racionales que convergen a un número irracional; por ejemplo, sea x_n la expansion decimal a n términos de π. Entonces en $(\mathbb{R}, |\ |)$, la sucesión $\{x_n\} \to \pi$ y por el Teorema 1.0.20, esta sucesión es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{Q}$ (la métrica de $\mathbb{Q}$ es la misma que la de $\mathbb{R}$). Pero la sucesión no converge en $\mathbb{Q}$, pues el límite en $\mathbb{R}$ no es racional. $\square$

Tarea: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente; demostrar que $d_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica en $\mathbb{R}$. Si $f(x) = \arctan(x)$, demostrar que $(\mathbb{R}, d_f)$ no es completo.

Como vimos en los ejemplos anteriores no todo subconjunto de un espacio completo es completo. No obstante, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.4. *Un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo (con respecto a la métrica restringida).*

Demostración: Tarea.

El inverso del Teorema 3.1.4 también es cierto.

Teorema 3.1.5. *Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$ es completo con respecto a la métrica $d|A$, entonces A es cerrado en X.*

Demostración: Suponer que $(A, d|A)$ es completo. Para demostrar que A es cerrado en X, según el Corolario 1.0.25, basta probar que si $\{x_n\}$ es una sucesión en A que converge (en el espacio métrico X) a $x \in X$, entonces $x \in A$. Con este fin, sea $\{x_n\}$ una sucesión en A que converge en X a $x \in X$. Por el Teorema 1.0.20, en (X, d), la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto es de Cauchy en A. Por ser A completo, $\{x_n\}$ converge en A, digamos a $y \in A$, y debe entonces converger a y en el espacio X. Por el Teorema 1.0.17, $x = y \in A$ y el resultado queda demostrado. $\square$

Teorema 3.1.6. *Un espacio métrico (X, d) es completo si y solo si cada sucesión encajada de bolas cerradas cuyos radios tienden a cero, tiene intersección no vacia.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{F} = \{B^-_{r_n}(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de bolas cerradas tal que $\{r_n\} \to 0$; se requiere demostrar que $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{B^-_{r_n}(z_n) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Usando el Axioma de Elección, podemos escoger $x_n \in B^-_{r_n}(z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero demostraremos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$; puesto que $\{r_n\} \to 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq k$, $|r_n - 0| = |r_n| < \epsilon/3$. Entonces, si $m, n \geq k$, $x_m \in B^-_{r_m}(z_m) \subseteq B^-_{r_k}(z_k)$ y $x_n \in B^-_{r_n}(z_n) \subseteq B^-_{r_k}(z_k)$, o sea, $x_m, x_n \in B^-_{r_k}(z_k)$. Por lo tanto, $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, z_k) + d(z_k, x_n) \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 < \epsilon$, así que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Por ser (X, d) completo, la sucesión $\{x_n\}$ converge, digamos a $x \in X$. Para completar esta parte de la demostración, basta probar que $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Pero $\{x_n\}$ es una sucesión en el conjunto cerrado $B^-_{r_1}(z_1)$ y por el Corolario 1.0.25, $x \in B^-_{r_1}(z_1)$. En forma semejante, $\{x_n\}_{n \geq 2}$ es una sucesión en el conjuntos cerrado $B^-_{r_2}(z_2)$ y por lo tanto $x \in B^-_{r_2}(z_2)$ y en general $x \in B^-_{r_n}(z_n)$; por lo tanto $x \in \bigcap \mathcal{F}$. $\triangle$

$(\Leftarrow)$ Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Escoger $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_1$, entonces $d(x_m, x_n) < 1/2$, en particular $d(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ para cada $n \geq n_1$; sea $B_1 = B^-_1(x_{n_1})$. Ahora escoger $n_2 \in \mathbb{N}$ $(n_2 > n_1)$ tal que si $m, n \geq n_2$, entonces $d(x_m, x_n) < 1/2^2$, en particular $d(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ para cada $n \geq n_2$; sea $B_2 = B^-_{1/2}(x_{n_2})$. Procedimos de esta manera a construir una sucesión $\{B_n\}$ de bolas cerradas cuyos radios $\{1, 1/2, 1/2^2, ...\} \to 0$.

Además, esta sucesión es encajada, pues $B_k = B^-_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})$ tiene radio $1/2^{k-1}$ y para $m, n \geq n_k$, tenemos $d(x_m, x_n) < 1/2^k$, en particular, si $n \geq n_k$, tenemos $d(x_n, x_{n_k}) < 1/2^k$. Por lo tanto, si $z \in B_{k+1} = B^-_{1/2^k}(x_{n_{k+1}})$ entonces $d(z, x_{n_{k+1}}) \leq 1/2^k$ y puesto que $n_{k+1} > n_k$, también tenemos $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) <$

$1/2^k$. Por lo tanto, $d(z, x_{n_k}) \leq d(z, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq 1/2^k + 1/2^k = 1/2^{k-1}$, o sea, $z \in B_k$.

Ahora, según la hipótesis, existe $x \in \bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y para completar la demostración, probaremos que $\{x_n\} \to x$. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$ y escoger $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k-2} < \epsilon$. Entonces, puesto que $x, x_{n_k} \in B_k = B^-_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})$, sigue que $d(x, x_{n_k}) \leq 1/2^{k-1}$. Pero se escogió n_k (el mismo que arriba) tal que si $n \geq n_k$, tenemos $d(x_n, x_{n_k}) \leq 1/2^k$ y por lo tanto $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \leq 1/2^k + 1/2^{k-1} < 2/2^{k-1} = 1/2^{k-2} < \epsilon$, así completando la demostración. $\square$

Este teorema nos pernite dar otra demostración de la completez de $(\mathbb{R}, |\ |)$:

Corolario 3.1.7. $(\mathbb{R}, |\ |)$ *es completo.*

Demostración: Tarea. (Observar que una bola cerrada en $(\mathbb{R}, |\ |)$ es un conjunto cerrado y acotada y usar el Teorema de Heine-Borel).

Definición 3.1.8. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es denso en ninguna parte si* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$.

Observación. Si A es denso en ninguna parte entonces también lo es $\mathrm{cl}(A)$ pues $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = \emptyset$.

Tarea 3.1.9. *Demostrar que si A es denso en ninguna parte, entonces $X \setminus A$ es denso e int$(X \setminus A) \neq \emptyset$ ¿Es cierto el inverso?*

Corolario 3.1.10. ***(El Teorema de Baire)*** *Un espacio métrico completo no es la unión de un número numerable de subconjuntos densos en ninguna parte.*

Demostración: Supongamos al contrario que (X, d) es un espacio métrico completo y $X = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde cada subconjunto A_n es denso en ninguna parte; según la observación que precede el teorema, podemos asumir que cada conjunto A_n es cerrado. Puesto que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(X)) = X$ y $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A_1)) = \emptyset$, sigue que $A_1 \neq X$. Por eso, podemos escoger $x_1 \in X \setminus A_1$ y por ser abierto este conjunto, existe un número $r_1 \in (0, 1)$ tal que la bola abierta $B_{r_1}(x_1) \subseteq X \setminus A_1$; entonces la bola cerrada $B_1 = B^-_{r_1/2}(x_1) \subseteq B_{r_1}(x_1)$ y satisface $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Claramente, $\mathrm{int}(B_{r_1/4}(x_1)) = B_{r_1/4}(x_1) \neq \emptyset$ y puesto que $\mathrm{int}(A_2) = \emptyset$, $A_2 \not\supseteq B_{r_1/4}(x_1)$, o sea, $B_{r_1/4}(x_1) \setminus A_2 = B_{r_1/4}(x_1) \cap (X \setminus A_2)$ es un conjunto abierto y no vacio. Por lo tanto podemos escoger $x_2 \in B_{r_1/4}(x_1) \setminus A_2$ y $r_2 \in (0, r_1/4)$ tal que $B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1/4}(x_1) \setminus A_2$; sea $B_2 = B^-_{r_2/2}(x_2) \subseteq B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1/4}(x_1) \setminus A_2 \subseteq B^-_{r_1/2}(x_1) \setminus A_2 \subseteq B_1$ y claramente, $B_2 \cap A_2 = \emptyset$. Continuamos así para construir una sucesión encajada de bolas cerradas $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ cuyos radios $r_n/2$ satisfacen $0 < r_{n+1} < r_n/4$ y por lo tanto $\{r_n\} \to 0$. Por el Teorema 3.1.6, existe $x \in \bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y puesto que $B_n \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ sigue que $x \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o sea, $x \notin \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = X$, una contradicción. $\square$

Definición 3.1.11. *Una función* $f : (X,d) \to (X,d)$ *es una contracción si existe* $\alpha \in (0,1)$ *tal que* $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ *para cada* $x, y \in X$.

Definición 3.1.12. *Un punto* $x \in X$ *es un punto fijo de una función* $f : (X,d) \to (x,d)$ *si* $f(x) = x$.

Lema 3.1.13. *Una contracción es continua.*

Demostración: Tarea.

Teorema 3.1.14. *Si* $f : (X,d) \to (X,d)$ *es una contracción y el espacio métrico* (X,d) *es completo, entonces* f *tiene un punto fijo único.*

Demostración: Sea $x_0 \in X$ y suponer que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ para cada $x, y \in X$. Definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) \equiv f^2(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \equiv f^n(x_0) \end{aligned}$$

etc. Entonces, si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, tenemos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(f^m(x_0), f^n(x_0)) \leq \alpha d(f^{m-1}(x_0), f^{n-1}(x_0)) \\ &\leq \alpha^2 d(f^{m-2}(x_0), f^{n-2}(x_0)) \\ &\leq \ldots\ldots\cdots \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq \alpha^n [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots\cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \\ &= \alpha^n [d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f^2(x_0)) + \cdots + d(f^{m-n-1}(x_0), f^{m-n}(x_0))] \\ &\leq \alpha^n d(x_0, f(x_0))[1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots \alpha^{m-n-1}] \\ &\leq \alpha^n d(x_0, f(x_0)) \sum_0^\infty \alpha^n = \frac{\alpha^n d(x_0, f(x_0))}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{d(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$ es un número real fijo y $\alpha \in (0,1)$ sigue que

$$\left\{ \frac{\alpha^n d(x_0, f(x_0))}{1-\alpha} \right\} \to 0.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n d(x_0, f(x_0))}{1-\alpha} < \epsilon,$$

así demostrando que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por la completez de (X,d), esta sucesión converge, digamos a $x \in X$. Para completar la demostración probaremos que x es el punto fijo único de la contracción f.

Con este fin, por el Lema 3.1.13, la contracción f es continua y por lo tanto, al aplicar el Teorema 2.1.2,

$$x = \lim\{x_n\} = \lim\{f^n(x_0)\} = f(\lim\{f^{n-1}(x)\}) = f(\{x_{n-1}\}) = f(x),$$

puesto que $\lim\{x_n\} = \lim\{x_{n-1}\}$.

Finalmente, el punto fijo es único, pues si z fuera otro punto fijo de f, entonces $d(x,z) \geq (\alpha)^{-1}d(f(x),f(z)) > d(f(x),f(z)) = d(x,z)$, una contradicción. □

Tarea. Encuentra una función $f : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, pero f no tiene un punto fijo.

3.2 Compacidad

Definición 3.2.1. *Un espacio métrico (X,d) es compacto si cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X tiene un punto de acumulación en X.*

En muchos aspectos conjuntos compactos se comportan como conjuntos finitos.

Tarea. Demostrar que cualquier conjunto finito es compacto.

Proposición 3.2.2. *Un espacio métrico (X,d) es compacto si y solo si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X.*

Demostración: Tarea.

Hay muchas maneras de caracterizar espacios métricos compactos. En esta seccin veremos dos de ellas, la primera en términos de cubiertas abiertas y la segunda en términos de completez.

Definición 3.2.3. *Se dice que x es un punto de acumulación del subconjunto A de un espacio métrico X si $(B_\epsilon(x) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. La colección de todos los puntos de acumulación de A se llama el* conjunto derivado de *A y se escribe A^d.*

Lema 3.2.4. *Para cualquier $A \subseteq X$, tenemos* $\mathrm{cl}(A) = A \cup A^d$.

Demostración: Puesto que $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$, para demostrar que $A \cup A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$ solo tenemos que probar que $A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Con este fin, suponer que $x \notin \mathrm{cl}(A)$; entonces existe un subconjunto cerrado $C \subseteq X$ tal que $A \subseteq C$ pero $x \notin C$. Sigue que $X \setminus C$ es un conjunto abierto que contiene a x (o sea, $X \setminus C$ es una vecindad de x) pero no intersecta a A. Por lo tanto, x no es un punto de acumulación de A.

Inversamente, debemos demostrar que $\mathrm{cl}(A) \subseteq A \cup A^d$. Basta demostrar que si $x \in \mathrm{cl}(A)$ pero $x \notin A$, entonces $x \in A^d$. Pero si $x \notin A^d$, entonces existe una vecindad V de x que no contiene puntos de A diferentes de x y puesto que $x \notin A$, $V \cap A = \emptyset$. Entonces $X \setminus V$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ que contiene a A pero no a x. Sigue que $x \notin \mathrm{cl}(A)$. □

Corolario 3.2.5. *Un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y solo si $A^d \subseteq A$.*

Demostración: Si A es cerrado entonces, por el Teorema 1.0.11 a), $A = \mathrm{cl}(A) = A \cup A^d$ y por lo tanto $A^d \subseteq A$. Inversamente, si $A^d \subseteq A$, entonces $\mathrm{cl}(A) = A \cup A^d = A$ y sigue otra vez del Teorema 1.0.11 a) que A es cerrado. □

Lema 3.2.6. *Cada conjunto infinito contiene un subconjunto numerablemente infinito, o sea, un subconjunto en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$.*

Demostración: Sea A un conjunto infinito y escoger $x_1 \in A$. Puesto que A es infinito, $A \setminus \{x_1\}$ es infinito y podemos escoger $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Al haber escogido $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$, puesto que A es infinito, $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es infinito y podemos escoger $x_{n+1} \in A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, etc. Al proceder así, construimos el subconjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$. □

Tarea 3.2.7. *Deducir de la definición que x es un punto de acumulación de A si cada vecindad de x contiene puntos de A distintos de x.*

Teorema 3.2.8. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass). Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación (en X).*

Demostración: Suponer que X es compacto y D es un subconjunto infinito de X. Por el Lema 3.2.6, existe un subconjunto numerablemente infinito $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq D$. Puesto que A es compacto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación $x \in A$. Si V es una vecindad de x, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq V$ y $\{x_n\}$ es frecuentemente en $B_\epsilon(x)$ y por lo tanto, frecuentemente en V. Pero esto implica que un número infinito de los términos de la sucesión $\{x_n\}$ están en V y puesto que los x_n son todos distintos, V contiene a puntos de D distintos de x, o sea, $x \in X$ es un punto de acumulación de D.

Inversamente, suponer que X tiene la propiedad de que cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en A. Demostraremos que X es compacto. Con este fin, sea $f = \{x_n\}$ una sucesión en X. Si el rango de f es finito, entonces un número infinito de los términos tienen el mismo valor, digamos a, o sea, el conjunto $\{n : x_n = a\}$ es infinito y claramente, a es un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$. Por el otro lado, si el rango de f, $R(f)$ es infinito, entonces ponemos $z_1 = x_1$. Puesto que $R(f)$ es infinito, existe $x_{m_2} \in$

$R(f)$ tal que m_2 es el entero más pequeño tal que $x_{m_2} \neq x_1$ y ponemos $z_2 = x_{m_2}$. Al haber definido distintos $\{z_1 = x_1, z_2 = x_{m_2}, \ldots, z_n = x_{m_n}\} \subseteq R(f)$, puesto que $R(f)$ es infinito, existe $m_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $m_{n+1} > \max\{1, m_2, \ldots, m_n\}$ y $x_{m_{n+1}} \notin \{z_1 = x_1, z_2 = x_{m_2}, \ldots, z_n = x_{m_n}\}$ y se define $z_{n+1} = x_{m_{n+1}}$. Al continuar este proceso construimos una subsucesión $\{z_n\}$ de $\{x_n\}$ con la propiedad de que todos los términos z_n son distintos. Ahora consideremos el *conjunto* $C = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$; C es infinito y por lo tanto, por hipótesis, tiene un punto de acumulación $x \in X$. Es decir, hay un número infinito de z_n's en cada vecindad de x. Pero esto implica que la *sucesión* $\{z_n\}$ es frecuentemente en cada vecindad de x, o sea, x es un punto de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ y por lo tanto de la sucesión $\{x_n\}$. Así es que X es compacto. $\square$

Definición 3.2.9. *Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una cubierta de X si $\cup\mathcal{F} = \cup\{F : F \in \mathcal{F}\} = X$. Una cubierta $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta si todos sus elementos son conjuntos abiertos. Una cubierta $\mathcal{G}$ de X es una subcubierta de una cubierta $\mathcal{F}$* de X *si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

Teorema 3.2.10. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si cada cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F}$ una cubierta abierta numerable de X. Si X no es compacto, entonces por el Lema 3.2.6 y el Teorema 3.2.8, existe un subconjunto numerablemente infinito $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ sin puntos de acumulación en X, es decir, $A^d = \emptyset$ y ahora sigue del Lema 3.2.4 que $\mathrm{cl}(A) = A$, el cual implica que A es cerrado.

Puesto que a_1 no es un punto de acumulación de A, podemos encontrar $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(a_1) \cap A \subseteq \{a_1\}$. Se puede aplicar el mismo argumento a todos los elementos de A: Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $\epsilon_n > 0$ tal que $B_{\epsilon_n}(a_n) \cap A \subseteq \{a_n\}$. Ahora definimos

$$\mathcal{F} = \{B_{\epsilon_n}(a_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus A\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta numerable de X que no posee una subcubierta finita pues el único elemento de $\mathcal{F}$ que contiene a a_n es $B_{\epsilon_n}(a_n)$.$\triangle$

($\Rightarrow$) Suponer que $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable de X que no posee una subcubierta finita. Puesto que $F_1 \neq X$, podemos escoger $x_1 \in X \setminus F_1$. Puesto que $F_1 \cup F_2 \neq X$, podemos escoger $x_1 \in X \setminus (F_1 \cup F_2)$. En general, puesto que $\bigcup\{F_k : k \leq n\} \neq X$, podemos escoger $x_n \in X \setminus \bigcup\{F_k : k \leq n\}$. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; afirmamos que A no tiene puntos de acumulación en X. Para demostrar nuestra afirmación, consideramos $x \in X$; puesto que $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de X, $x \in F_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y por ser abierto F_k, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq F_k$. Por la construcción, $x_n \notin F_k$ para cualquier $n \geq k$. O sea, los unicos puntos x_m que podrían estar en F_k son $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$. Sea

$$\epsilon = \min\{r, \min\{d(x, x_i) : x \neq x_i, \ \text{y} \ i \leq k-1\}\}.$$

Es claro que $\epsilon > 0$ y $B_\epsilon(x) \cap A \subseteq \{x\}$, así demostrando que x no es un punto de acumulación de A. $\square$

Definición 3.2.11. *Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de la intersección finita si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacia. Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es fija si $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.*

Tarea 3.2.12. *Demostrar que un espacio métrico es compacto si y solo si cada familia numerable de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita es fija.*

Corolario 3.2.13. *Cada espacio métrico compacto es completo.*

Demostración: Sigue inmediatemente de la Tarea 3.2.12 y el Teorema 3.1.6, puesto que una familia encajada de bolas cerradas es una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. □

Definición 3.2.14. *Un espacio métrico (X, d) es* totalmente acotado *o* precompacto *si para cualquier $\epsilon > 0$ existen un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $X = \bigcup\{B_\epsilon(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$.*

Definición 3.2.15. *Un espacio métrico (X, d) es* acotado *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$, $d(x, y) \leq M$.*

Tarea 3.2.16. *Se dice que dos métricas son* equivalentes *si generan la misma topología. Demuestra que si d es un métrica en X entonces $d' : X \times X \to [0, \infty)$ definida por $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ es una métrica acotada equivalente en X.*

Tarea 3.2.17. *Demuestra que un espacio métrico totalmente acotado es acotado.*

Tarea 3.2.18. *Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. Demuestra que la función d es una métrica acotada en $\mathbb{R}$ pero no es totalmente acotada.*

Teorema 3.2.19. *Un espacio métrico compacto es totalmente acotado.*

Demostración: Supongamos al contrario que (X, d) no es totalmente acotado. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que ningúna colección finita de bolas abiertas de radio ϵ cubre (tiene unión igual) a X. Escoger $x_1 \in X$; puesto que $B_\epsilon(x_1) \neq X$, podemos escoger $x_2 \in X \setminus B_\epsilon(x_1)$. Puesto que $B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2) \neq X$, podemos escoger $x_3 \in X \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$. Al haber escogido $x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ tales que $x_j \notin \bigcup\{B_\epsilon(x_i) : 1 \leq i \leq j - 1\}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n - 1\}$, puesto que $\bigcup\{B_\epsilon(x_i) : 1 \leq i \leq n - 1\} \neq X$, podemos escoger $x_n \in X \setminus \bigcup\{B_\epsilon(x_i) : 1 \leq i \leq n - 1\}$. Así construimos una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ y afirmamos que esta sucesión no tiene ningún punto de acumulación. Para ver esto, nota que si x_m, x_n son términos distintos de la sucesión, entonces $d(x_m, x_n) \geq \epsilon$ y por lo tanto ninguna subsucesión puede ser de Cauchy y por eso, ninguna subsucesión puede converger. □

Corolario 3.2.20. *Un espacio métrico compacto es completo y totalmente acotado.*

Teorema 3.2.21. *Un espacio métrico totalmente acotado es separable.*

Demostración: Sea (X,d) un espacio métrico totalmente acotado. Para cada $\epsilon = 1/n$ escogemos un conjunto finito de puntos $\{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$ tal que $\bigcup\{B_{1/n}(x_j^n) : 1 \leq j \leq k_n\} = X$. Sea $D = \{x_j^n : n \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq j \leq k_n\}$; D es un conjunto numerable y afirmamos que D es denso en X. Para ver esto, basta demostrar que cada abierto no vacio en X intersecta a D. Con este fin, sea U abierto y no vacio en X y $x \in U$; entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq U$ y podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$. Por ser $\{B_{1/n}(x_j^n) : 1 \leq j \leq k_n\}$ una cubierta de X, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{1/n}(x_j^n)$, o sea, $x_j^n \in B_{1/n}(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq U$, así demostrando que $U \cap D \neq \emptyset$. □

Teorema 3.2.22. *Un espacio métrico totalmente acotado es segundo numerable.*

Demostración: Sigue de los Teoremas 3.2.21 y 1.0.36. □

Corolario 3.2.23. *Un espacio métrico compacto es segundo numerable.*

Demostración: Sigue de los Teoremas 3.2.19 y 3.2.22. □

Teorema 3.2.24. *Un espacio métrico es compacto si y solo si cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita.*

Demostración: ($\Leftarrow$) Es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2.10.

($\Rightarrow$) Sean (X,d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} = \{F_j : j \in I\}$ una cubierta abierta de X (I es un conjunto índice, el cual, en general, no es numerable). Por ser (X,d) segundo numerable (Corolario 3.2.23), existe una base numerable $\mathcal{B} = \{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ y cada elemento $F_j \in \mathcal{F}$ es una una unión de elementos de $\mathcal{B}$, digamos $F_j = \bigcup\{B_m : m \in \mathbb{N}_j \subseteq \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, $X = \bigcup\{\bigcup\{B_m : m \in \mathbb{N}_j \subseteq \mathbb{N}\} : j \in I\}$ y por lo tanto, $\mathcal{G} = \{B_m : m \in \bigcup\{\mathbb{N}_j : j \in I\}\} \subseteq \mathcal{B}$ es una cubierta abierta numerable de X. Por el Teorema 3.2.10, esta cubierta tiene una subcubierta finita, digamos $\{B_k : k \in H\}$, donde $H \subseteq \mathbb{N}$ es finito. Puesto que cada elemento de $\mathcal{G}$ es un subconjunto de (por lo menos) uno de los elementos de $\mathcal{F}$, si reemplazamos cada B_k con uno de los elementos de $\mathcal{F}$ que lo contiene, digamos F_k, sigue que $\{F_k : k \in H\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{F}$ de X. □

Nota. Muchos autores usan la condición descrita en el Teorema 3.2.24 como la definición de compacidad.

Lema 3.2.25. *Un subconjunto de un espacio totalmente acotado es totalmente acotado (en la métrica restringida).*

Demostración: Sean (X,d) totalmente acotado, $A \subseteq X$ y $\epsilon > 0$. Por ser (X,d) totalmente acotado, existen un número finito de bolas abiertas $\{B_\epsilon(x_1),\ldots, B_\epsilon(x_n)\}$ que cubren a X. La unión de estas mismas bolas contiene a A, pero para demostrar que $(A, d|A)$ es totalmente acotado debemos cubrir A con un número finito de bolas abiertas de radio ϵ **con centros en** A (nota que los puntos x_k no son necesariamente elementos de A). Así, empezemos de nuevo!

Por ser (X,d) totalmente acotado, existen un número finito de bolas abiertas $\{B_{\epsilon/2}(x_1),\ldots\ldots, B_{\epsilon/2}(x_n)\}$ que cubren a X. Si $A \cap B_{\epsilon/2}(x_j) \neq \emptyset$ entonces escogemos $a_j \in B_{\epsilon/2}(x_j) \cap A$ y consideremos la familia de bolas abiertas *en A y con centros en A*,

$$\{B^A_\epsilon(a_j) : 1 \leq j \leq n \text{ y } a_j \in B_{\epsilon/2}(x_j) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Si $x \in A$, entonces existe $x_j \in X$ tal que $x \in B_{\epsilon/2}(x_j)$ y $a_j \in B_{\epsilon/2}(x_j)$. Por lo tanto, $d(x,a_j) \leq d(x,x_j) + d(x_j,a_j) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, así demostrando que $x \in B^A_\epsilon(a_j)$. □

Teorema 3.2.26. *Un espacio métrico es compacto si y solo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Esto se demostró en el Corolario 3.2.20.
$(\Leftarrow)$ Sean (X,d) un espacio métrico completo y totalmente acotado y $A \subseteq X$ un conjunto infinito. Por el Teorema 3.2.8, basta demostrar que A tiene un punto de acumulación. Nota que el Lema 3.2.6 implica que la existencia de un subconjunto numerablemente infinito $C = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ y basta demostrar que C tiene un punto de acumulación. Con este fin, consideremos cubiertas por bolas abiertas de radio $1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ser X totalmente acotado, la cubierta abierta $\mathcal{B}_1 = \{B_1(x) : x \in X\}$ tiene una subcubierta finita $\{B_1(x_1), B_1(x_2), \ldots, B_1(x_m)\}$, y puesto que C es infinito, una de estas bolas, digamos $B_1(x_{j_1}) \equiv B_1$ contiene un número infinito de elementos de C; sea $y_1 \in C \cap B_1$ uno de ellos. Por el Lema 3.2.25, B_1 es totalmente acotado (en la métrica restringida) y existen un número finito de bolas abiertas de radio $1/2$ que intersectan a B_1 y cuya unión contiene a B_1. Puesto que $B_1 \cap C$ es infinito, una de estas bolas abiertas, digamos $B_{1/2}(x_{j_2}) \equiv B_2$, contiene un número infinito de puntos de $B_1 \cap C$; sea $y_2 \in C \cap B_2 \cap B_1$ uno de ellos, distinto de y_1. Así construimos una sucesión de puntos distintos $\{y_n\}$ tal que

$$y_1 \in B_1 \cap C,\ y_2 \in B_1 \cap B_2 \cap C,\ \ldots\ldots, y_k \in \bigcap\{B_j : 1 \leq j \leq k\} \cap C, \ldots$$

y el radio de B_k es $1/k$. Si $\epsilon > 0$, escoger $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/m_0 < \epsilon/2$; si $m,n \geq m_0$ entonces $y_m, y_n \in B_{m_0}$ y por lo tanto $d(y_m,y_n) < 2/m_0 < \epsilon$ así que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por la completez de X, esta sucesión converge, digamos a $x \in X$. Entonces $\{y_n\}$ es finalmente en cada vecindad V de x, o sea, V contiene un número infinito de términos de la sucesión $\{y_n\}$, es decir elementos de C distintos de x. Así, x es un punto de acumulación de C. □

El próximo teorema generaliza el hecho de que una función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua.

Teorema 3.2.27. *Si (X, d) es compacto y $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua, entonces f es uniformemente continua en X.*

Demostración: Puesto que f es continua en cada punto $x \in X$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(x) > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta(x)$ entonces $e(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. La familia de bolas abiertas $\{B_{\delta(x)/2}(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y por ser X compacto, hay una subcubierta finita, digamos $\{B_{\delta(x_1)/2}(x_1), \ldots, B_{\delta(x_n)/2}(x_n)\}$. Sea $\delta = \min\{\delta(x_1)/2, \ldots, \delta(x_n)/2\} > 0$. Ahora, si $z \in X$, para algún j (fijo en adelante), $z \in B_{\delta(x_j)/2}(x_j)$, el cual implica que $d(z, x_j) < \delta(x_j)/2$ y, en su turno que $e(f(z), f(x_j)) < \epsilon/2$.

Además, si $d(x, z) < \delta$, sigue que $d(x, z) < \delta(x_j)/2$ y puesto que $d(z, x_j) < \delta(x_j)/2$, tenemos $d(x, x_j) \leq d(x, z) + d(z, x_j) < \delta(x_j)/2 + \delta(x_j)/2 = \delta(x_j)$, y por lo tanto, $e(f(x), f(x_j)) < \epsilon/2$.

Por lo tanto, si $d(x, z) < \delta$,

$$e(f(x), f(z)) \leq e(f(x), f(x_j)) + e(f(x_j), f(z)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

así demostrando que f es uniformemente continua. □

3.3 Conexidad

Otro concepto topológico muy importante es él de conexidad. Es de utilidad en Análisis Matemático en el estudio de funciones continuas.

Definición 3.3.1. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es conexo si no es la unión de dos subconjuntos relativamente abiertos (o sea, abiertos en $(A, d|A)$), mutuamente ajenos y no vacios. Un conjunto es* disconexo *si no es conexo.*

Tarea 3.3.2. *Demuestra que si $A \subseteq X$ es disconexo, entonces A es la unión de dos subconjuntos mutuamente ajenos y relativamente cerrados en A.*

Ejemplo 3.3.3. *El subconjunto $\mathbb{Q}$ de $(\mathbb{R}, |\ |)$ no es conexo .*

Demostración: Los subconjuntos $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi)$ y $\mathbb{Q} \cap (\pi, \infty)$ son relativamente abiertos en $\mathbb{Q}$, mutuamente ajenos y su unión es $\mathbb{Q}$. $\square$

Tarea 3.3.4. *Determinar los subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, d)$ donde d es la métrica discreta.*

A continuación veremos que los subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, |\ |)$ son precisamente los intervalos.

Teorema 3.3.5. *Un subconjunto $A \subseteq (\mathbb{R}, |\ |)$ es conexo si y solo si es un intervalo.*

Demostración: Suponer primer que A no es un intervalo. Entonces existen $a < b < c$ tales que $a, c \in A$, $b \notin A$. Puesto que $b \notin A$, sigue que A es la unión de los dos conjuntos ajenos y relativamente abiertos, $[A \cap (\infty, b)] \cup [A \cap (b, \infty)]$. Además, puesto que $a \in A \cap (\infty, b)$ y $c \in A \cap (b, \infty)$, estos conjuntos no son vacios. Sigue que A es disconexo.

Inversamente, suponer que A es un intervalo, digamos $A = [a, b]$ y que A no es conexo. Entonces existen conjuntos mutuamente ajenos, no vacios y relativamente abiertos S, T tales que $S \cup T = A$; asumimos que $b \in T$. Puesto que S y T son relativamente abiertos, existen U, V abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $U \cap A = S$ y $V \cap A = T$. El conjunto S está acotado superiormente (por b) y por lo tanto tiene supremo; sea $s = \sup(S)$, obviamente, $a \leq s \leq b$, y por lo tanto $s \in A$. Nota que $s \neq a$ pues S es abierto en $(A, |\ |)$ y por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $[s, s + \epsilon) \subseteq S$; esto en su turno demuestra que s no es el supremo de S, una contradicción. Ahora hay dos posibilidades, i) $s \in S$ o ii) $s \in T$.

i) Si $s \in S$, entonces $s < b$ y puesto que U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq U$ y sin pérdida de generalidad asumimos que $\epsilon < b - s$, o sea, $s + \epsilon < b$; por lo tanto $[s, s + \epsilon) \subseteq A \cap U = S$. Entonces $s + \epsilon/2 \in S$ lo cual contradice que s es el supremo de S.

ii) Si $s \in T$, puesto que V es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(s-\epsilon, s+\epsilon) \subseteq V$ y otra vez sin pérdida de generalidad asumimos que $\epsilon < s - a$, o sea, $a < s - \epsilon$; por lo tanto $(s-\epsilon, s] \subseteq A \cap V = T$. Entonces $s - \epsilon/2$ es una cota superior de S, lo cual contradice que s es el supremo de S. $\square$

Tarea 3.3.6. *Probar que si (X, d) es conexo y $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua y suprayectiva, entonces (Y, e) es conexo.*

Tarea 3.3.7. *Demuestra que la cerradura* $\mathrm{cl}(A)$ *de un subconjunto conexo A de (X, d) es conexo.*

Capitulo 4

Espacios de Funciones Continuas

4.1 El Espacio C(X)

En esta capítulo estudiaremos métricas en conjuntos de funciones con valores reales. Muchos de los resultados que vemos aquí son válidos en estructuras más generales.

Nota importante: En adelante, se supone que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales *siempre* tiene la métrica del valor absoluto.

Definición 4.1.1. *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $B(X)$ denotará la colección de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ cuyos rangos son acotados. $C(X)$ denotará la colección de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.*

Lema 4.1.2. *Si (X, d) es compacto y $f : (X, d) \to (Y, e)$ es continua y suprayectiva, entonces (Y, e) es compacto también.*

Demostración: Sea $\mathcal{F}$ una cubierta abierta de Y. Por el Teorema 3.2.24, basta demostrar que existe una subcubierta finita de $\mathcal{F}$ de Y. Por el Corolario 2.1.4, si $F \in \mathcal{F}$, $f^{-1}[F]$ es abierto en X y claramente, la colección $\{f^{-1}[F] : F \in \mathcal{F}\}$ cubre a X. Por compacidad de X, existe una subcubierta finita, $\{f^{-1}[F_1], f^{-1}[F_2], \ldots, f^{-1}[F_n]\}$ digamos. En su turno, esto implica que

$$\{f(f^{-1}[F_1]), f(f^{-1}[F_2]), \ldots, f(f^{-1}[F_n])\}$$

cubre a Y y puesto que f es suprayectiva, $f(f^{-1}[F_j]) = F_j$, o sea, $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{F}$ de Y. $\square$

Corolario 4.1.3. *Si (X, d) es compacto, entonces $C(X) \subseteq B(X)$.*

Demostración: Sea $f \in C(X)$; por el lema anterior, si X es compacto, entonces $f[X]$ es compacto en $\mathbb{R}$, por lo tanto acotado. $\square$

Definimos una función $\upsilon : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\upsilon(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

Nota que υ (la letra griega *upsilon*) está bien definida, puesto que f y g son funciones acotadas y por lo tanto $f - g$ también lo es.

Lema 4.1.4. *La función υ es una métrica en $B(X)$.*

Demostración: Tarea.

Recordemos la definición de convergencia uniforme: Una sucesión de funciones $\{f_n : (X,d) \to (\mathbb{R}, |\ |)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente a una función f si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ y cada $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Es un ejercicio fácil demostrar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente si y solo si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} < \epsilon$. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.5. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $B(X)$ converge a una función $f \in B(X)$ si y solo si la sucesión converge uniformemente a f.*

Demostración: Tarea.

Debido a este resultado, la métrica υ se llama *la métrica de convergencia uniforme* en $B(X)$.

Teorema 4.1.6. *El espacio métrico $(B(X), \upsilon)$ es completo.*

Demostración: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$; se requiere demostrar que $\{f_n\}$ es convergente. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$; entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n > k$,

$$\upsilon(f_n, f_m) = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} < \epsilon/2.$$

Entonces para cada $a \in X$ (fijo), y $m, n \geq k$, $|f_m(a) - f_n(a)| < \epsilon/2$, es decir $\{f_n(a)\}$ es una sucesión de Cauchy (en $\mathbb{R}$) y por lo tanto converge (en $\mathbb{R}$), digamos a r_a. Esto ocurre para cada elemento $x \in X$ y así podemos definir una función $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = r_x$ y demostraremos que f es el límite uniforme (o sea, el límite en $B(X)$) de la sucesión $\{f_n\}$.

Puesto que $\{f_n(x)\} \to f(x)$, existe $j_x \in \mathbb{N}$ (que en general, dependerá de x) tal que $|f_{k+j_x}(x) - f(x)| < \epsilon/2$. Ahora para cada $x \in X$, si $n \geq k$, tenemos $k + j_x \geq k$ y por lo tanto, usando otra vez el hecho de que la sucesión $\{f_n\}$ sea de Cauchy,

$$|f_n(x) - f_{k+j_x}(x)| < \epsilon/2.$$

Combinando las desigualdades, se tiene que para cada $x \in X$ y cada $n \geq k$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f_{k+j_x}(x) + f_{k+j_x}(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f_{k+j_x}(x)| + |f_{k+j_x}(x) - f_n(x)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

y así hemos demostrado la convergencia uniforme de la sucesión. $\square$

Teorema 4.1.7. *Si f_n es continua en (X, d) y $\{f_n\} \to f$ en $(B(X), \upsilon)$ (o sea, $\{f_n\} \to f$ uniformemente), entonces f es continua en (X, d).*

Demostración: Sean $a \in X$ y $\epsilon > 0$; puesto que $\{f_n\} \to f$, existe $k \in \mathbb{N}$ (en adelante, fijo) tal que si $n \geq k$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$ para cada $x \in X$. Además, por la continuidad de f_k en a, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$, entonces $|f_k(x) - f_k(a)| < \epsilon/3$. Ahora, si $d(x, a) < \delta$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(a) + f_k(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es continua en a. Puesto que $a \in X$ es arbitrario, f es continua en X. $\square$

Corolario 4.1.8. *Si (X, d) es compacto, entonces $C(X)$ es un subconjunto cerrado de $(B(X), \upsilon)$.*

Demostración: Que $C(X)$ sea subconjunto de $B(X)$ es consecuencia del Corolario 4.1.3. Que $C(X)$ sea cerrado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.7 y el Corolario 1.0.25. $\square$

Teorema 4.1.9. *Si (X, d) es compacto, entonces el espacio $(C(X), \upsilon)$ (con la métrica restringida) es completo.*

Demostración: Sigue del Corolario 4.1.8 y el Teorema 3.1.4. $\square$

Definición 4.1.10. *Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de funciones de (X, d) en $\mathbb{R}$ es equicontinua si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.*

Es inmediatemente obvio que si $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua, entonces cada elemento de $\mathcal{F}$ es uniformemente continua.

Normalmente cuando intentamos demostrar la continuidad uniforme de una función f, empezamos con un $\epsilon > 0$ y buscamos $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ y requerimos que la δ depende solamente de ϵ y no del punto x. Casi siempre omitimos mencionar que la δ **también depende de la función** f. (Por ejemplo, dado $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ y dado $\epsilon > 0$, $\delta = \epsilon$ funciona para demostrar la continuidad uniforme de f, pero en el caso de g, tendríamos que escoger $\delta = \epsilon/2$.)

Esto sirve para identificar familias equicontinuas de funciones. De la definición, es claro que los elementos de una familia equicontinua son funciones uniformemente continuas, pero una familia $\mathcal{F}$ es equicontinua si y solo si dado $\epsilon > 0$, la misma δ funciona para todas las funciones en $\mathcal{F}$.

Tarea 4.1.11. *Demostrar que una familia finita $\mathcal{F}$ de funciones de (X, d) en $\mathbb{R}$ es equicontinua si y solo si cada elemento de $\mathcal{F}$ es uniformemente continua.*

Tarea 4.1.12. *Determinar si la familia $\{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ donde $f_n(x) = x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es equicontinua.*

Tarea 4.1.13. *Demostrar que si $A \subseteq (X, d)$ es totalmente acotado, también lo es* $\mathrm{cl}(A)$.

Teorema 4.1.14. *Si $\mathcal{F} \subseteq (C([a, b]), \upsilon)$ es acotada y equicontinua, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.*

Demostración: Por ser $\mathcal{F}$ acotado, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\upsilon(f, g) \leq L$ para cada $f, g \in \mathcal{F}$. Afirmamos que esto implica que la familia $\mathcal{F}$ es *uniformemente acotada*, o sea, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $f \in \mathcal{F}$ y para cada $x \in [a, b]$ (es decir, M es una cota para todas las funciones en $\mathcal{F}$ simultaneamente). Para ver esto, supongamos al contrario que tal M no existe; entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in \mathcal{F}$ tal que el rango de f_n no está contenido en $[-n, n]$, o sea $\upsilon(f_n, \overline{0}) > n$. Entonces, si $k = \upsilon(f_1, \overline{0}) = \sup\{|f_1(x) - \overline{0}(x)| : x \in [a, b]\} = \sup\{|f_1(x)| : x \in [a, b]\}$, tenemos

$$\upsilon(f_n, \overline{0}) \leq \upsilon(f_n, f_1) + \upsilon(\overline{0}, f_1)$$

y en consecuencia,

$$\upsilon(f_n, f_1) \geq \upsilon(f_n, \overline{0}) - \upsilon(f_1, \overline{0}) > n - k.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} (\upsilon(f_n, f_1)) \geq \lim\limits_{n\to\infty} (n - k) = \infty$, así demostrando que $\mathcal{F}$ no está acotado.

Ahora, sea dado $\epsilon > 0$; puesto que $\mathcal{F}$ es equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon/20$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Sea

$$P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

una partición de $[a, b]$ de norma menor que δ y sea

$$Q = \{-M = y_0, y_1, \ldots, y_m = M\}$$

una partición de $[-M, M]$ de norma menor que $\epsilon/20$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ definimos una función $\psi_f : P \to Q$ por $\psi_f(x_j) = y_{k(j)}$, donde $k(j)$ se escoge entre los enteros $0, 1, \ldots, m$ de tal manera que $|y_{k(j)} - f(x_j)| < \epsilon/20$ (tal $k(j)$ existe pues la norma de Q es menor que $\epsilon/20$).

La gráfica de la función ψ_f consiste en los $n+1$ puntos de la forma $(x_j, y_{k(j)}) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ y obtenemos una función $g_f : [a, b] \to \mathbb{R}$ "uniendo los puntos", o sea, extendiendo la función linealmente en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Notamos que aun cuando $\mathcal{F}$ es infinito, solo hay un número finito de distintas funciones ψ_f, pues solo hay un número finito (de hecho, $(m+1)^{n+1}$) de puntos de la forma $(x_j, y_{k(j)})$. Por lo tanto, hay solo un número finito de funciones distintas g_f.

Puesto que $|x_j - x_{j-1}| < \delta$, se tiene que $|f(x_j) - f(x_{j-1})| < \epsilon/20$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|g_f(x_j) - g_f(x_{j-1})| &= |g_f(x_j) - f(x_j) + f(x_j) - f(x_{j-1}) + f(x_{j-1}) - g_f(x_{j-1})| \\
&\le |g_f(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_{j-1}) - g_f(x_{j-1})| \\
&< \epsilon/20 + \epsilon/20 + \epsilon/20 = 3\epsilon/20.
\end{aligned}$$

Por ser g_f lineal en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, sigue que si $x \in [x_{j-1}, x_j]$, entonces $|g_f(x) - g_f(x_{j-1})| < 3\epsilon/20$ también.

Finalmente demostraremos que las bolas abiertas de radio $\epsilon/2$ con centros en las funciones $g_f \in C([a, b])$ (de las cuales solo hay un número finito) cubren a $\mathcal{F}$.

Con este fin, sea $h \in \mathcal{F}$; se requiere encontrar una bola abierta $B_{\epsilon/2}(g_f) \subseteq C([a, b])$ que contiene a h o equivalentemente, una función g_f tal que $\upsilon(h, g_f) < \epsilon/2$. (En este momento el lector debe haber adivinado que la función que buscamos es g_h - procedemos a demostrarlo.)

Pero, si $x \in [a, b]$, entonces $x \in [x_{j-1}, x_j]$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$ y por lo tanto

$$|g_h(x) - g_h(x_{j-1})| < 3\epsilon/20 \text{ y } |h(x_{j-1}) - h(x)| < \epsilon/20.$$

Por eso, sigue que

$$\begin{aligned}
|g_h(x) - h(x)| &= |g_h(x) - g_h(x_{j-1}) + g_h(x_{j-1}) + h(x_{j-1}) - h(x_{j-1}) - h(x)| \\
&\le |g_h(x) - g_h(x_{j-1})| + |g_h(x_{j-1}) + h(x_{j-1})| - |h(x_{j-1}) - h(x)| \\
&< 3\epsilon/20 + \epsilon/20 + \epsilon/20 = \epsilon/4
\end{aligned}$$

Ahora sigue que $\upsilon(h, g_h) = \sup\{|g_h(x) - h(x)| : x \in [a,b]\} \leq \epsilon/4 < \epsilon/2$, o sea, $h \in B_{\epsilon/2}(g_h)$.

Ahora hemos demostrado que un número finito de bolas abiertas de radio $\epsilon/2$, con centros en las funciones g_h cubren a $\mathcal{F}$. Para cada una del número finito de funciones g_h, elegimos una sola función $f_h \in \mathcal{F}$ (h es una de ellas, pero puede haber muchas) tal que $\upsilon(f_h, g_h) < \epsilon/2$; dejamos al lector la demostración de que las bolas abiertas de radio ϵ con centros en las funciones f_h cubren a $\mathcal{F}$, así demostrando que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

$\square$

Corolario 4.1.15. (El Teorema de Arzela-Ascoli) *Si $\mathcal{F} = \{f_n : [a,b] \to \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de funciones en $C([a,b])$ y $\mathcal{F}$ es acotada y equicontinua, entonces $\mathcal{F}$ posee una subsucesión convergente en $(C([a,b]), \upsilon)$ (o sea, una subsucesión uniformemente convergente).*

Demostración: Del Teorema 4.1.14, sigue que la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada y de la Tarea 4.1.13 se deduce que también lo es $\text{cl}(\mathcal{F})$. Pero $\text{cl}(\mathcal{F})$ es un subconjunto cerrado del espacio métrico completo $(C([a,b]), \upsilon)$ y por lo tanto es completo también. Ahora sigue del Teorema 3.2.26 que $\text{cl}(\mathcal{F})$ es compacto y finalmente es una consecuencia de la Proposición 3.2.2 que $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión convergente. $\square$

Definición 4.1.16. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de X en $\mathbb{R}$ es* creciente *(respectivamente* decreciente*) si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ (respectivamente $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$) para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Una sucesión de funciones es* monótona *si es creciente o decreciente.*

El siguiente teorema va a ser un inverso parcial del Teorema 4.1.7. Sabemos que el límite uniforme de funciones continuas es continua, pero si una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f, ¿Bajo que condiciones es la convergencia uniforme?

Hemos visto en el curso de Cálculo Avanzado II, ejemplos de sucesiones que convergen puntualmente pero no uniformemente:

Ejemplo 4.1.17. *La sucesión $\{f_n\}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge puntual y monotónicamente en $[0,1]$ a la función f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

y es fácil ver que esta convergencia no es uniforme aunque sí es monótona.

Ejemplo 4.1.18. *La sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ dada por $f_n(x) = |x/n|$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función continua $\overline{0}$ y otra vez es fácil ver que esta convergencia no es uniforme aunque sí es monótona.*

Tarea 4.1.19. *Encuentra un ejemplo de una sucesión de funciones continuas de* $[0,1]$ *en* $[0,1]$ *que convergen puntualmente pero no uniformemente a una función continua.*

Los resultados 4.1.17, 4.1.18 y 4.1.19 demuestran que para obtener un teorema inverso de 4.1.7, vamos a tener que imponer condiciones fuertes.

Consideremos las siguientes condiciones:

1. Que X sea compacto,

2. Que la convergencia sea monótona y

3. Que el límite sea continua.

El Ejemplo 4.1.17 demuestra que condiciones 1) y 2) no bastan para garantizar convergencia uniforme. El Ejemplo 4.1.18 demuestra que 2) y 3) tampoco bastan para garantizarla y finalmente, la Tarea 4.1.19 demuestra que 1) y 3) no la garantizan tampoco. No obstante, el siguiente teorema prueba que las tres condiciones juntas si implican convergencia en $(C(X), \upsilon)$, o sea, convergencia uniforme.

Teorema 4.1.20. (El Teorema de Dini) *Si* (X, d) *es compacto y* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones en* $C(X)$ *que convergen puntual y monotónicamente a una función continua* $f \in C(X)$*, entonces la convergencia es uniforme.*

Demostración: Sean $\{f_n\}$ y f como en la hipótesis y suponer que $\{f_n\}$ es creciente. Entonces, para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión creciente de números reales convergente a $f(x)$ y claramente $f(x) \geq f_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ (que depende de x) tal que si $n \geq n(x)$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) < \epsilon/3$. Así, con cada $x \in X$ asociamos un entero $n(x)$.

Sea $x \in X$ (por el momento, fijo); por ser continua f en x, existe $\delta'_x > 0$ tal que si $d(x, z) < \delta'_x$, entonces

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon/3,$$

y por ser continua $f_{n(x)}$ en x, existe $\delta''_x > 0$ tal que si $d(x, z) < \delta''_x$, entonces

$$|f_{n(x)}(z) - f_{n(x)}(x)| < \epsilon/3.$$

Sea

$$\delta_x = \min\{\delta'_x, \delta''_x\} > 0.$$

Así, con cada $x \in X$ hemos asociado un número $\delta_x > 0$ y si $d(x, z) < \delta_x$, entonces

$$|f_{n(x)}(z) - f_{n(x)}(x)| < \epsilon/3 \text{ y } |f(z) - f(x)| < \epsilon/3.$$

Entonces, si $d(x,z) < \delta_x$, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) - f_{n(x)}(z) &= |f(z) - f_{n(x)}(z)| \\ &= |f(z) - f(x) + f(x) - f_{n(x)}(x) + f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(z)| \\ &\leq |f(z) - f(x)| + |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(z)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora, dejamos que x varíe en X. Las bolas abiertas $B_{\delta_x}(x)$ forman una cubierta abierta de (X,d) y por ser este espacio compacto, existe una subcubierta finita, digamos

$$\{B_{\delta_{x_1}}(x_1), B_{\delta_{x_2}}(x_2), \ldots, B_{\delta_{x_m}}(x_m)\}.$$

Nos fijamos en los m puntos $x_1, \ldots, x_m$ y ponemos

$$k_0 = \max\{n(x_1), \ldots, n(x_m)\}.$$

Ahora, si $z \in X$, entonces tenemos $z \in B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$ y por lo tanto $f(z) - f_{n(x_j)}(z) < \epsilon$. Además, puesto que $\{f_n\}$ es una sucesión creciente, si $n \geq k_0$, tenemos

$$f_n(z) \geq f_{k_0}(z) \geq f_{n(x_j)}(z).$$

Por lo tanto, si $z \in X$ y $n \geq k_0$,

$$|f(z) - f_n(z)| = f(z) - f_n(z) \leq f(z) - f_{k_0}(z) \leq f(z) - f_{n(x_j)}(z) < \epsilon,$$

así demostrando que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, o sea, $\{f_n\}$ converge a f en $C(X)$. $\square$

Corolario 4.1.21. *Existe una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a la función f dada por $f(x) = +\sqrt{x}$ en $[0,1]$.*

Demostración: Definimos por recursión (inducción) una sucesión $\{f_n\}$ como sigue:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ f_{n+1}(x) &= f_n(x) + \frac{1}{2}(x - [f_n(x)]^2). \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{2}(x - [f_1(x)]^2) = \frac{1}{2}x, \ y \\ f_3(x) &= f_2(x) + \frac{1}{2}(x - [f_2(x)]^2) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x - x^2/4) = x - x^2/8 \end{aligned}$$

Demostraremos por inducción que $f_n(x) \leq +\sqrt{x}$ para cada $x \in [0,1]$. Con este fin, notamos primero que $f_1(x) \leq +\sqrt{x}$ para cada $x \in [0,1]$. Suponer que hemos demostrado que $f_n(x) \leq +\sqrt{x}$ para cada $x \in [0,1]$; para completar la inducción, se requiere comprobar que $f_{n+1}(x) \leq +\sqrt{x}$, o sea $+\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \geq 0$ para cada x.

Tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - f_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - f_n(x) - \frac{1}{2}(x - [f_n(x)]^2) \\ &= [\sqrt{x} - f_n(x)][1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))] \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva, $f_n(x) \leq \sqrt{x}$ y por lo tanto,

$$[\sqrt{x} - f_n(x)] \geq 0$$

y

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x)) \leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{x}) = \sqrt{x} \leq 1.$$

y ahora sigue que $\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \geq 0$.

Pero si $f_n(x) \leq \sqrt{x}$, tenemos $[f_n(x)]^2 \leq x$, o sea $x - [f_n(x)]^2 \geq 0$ y sigue de la definición inductiva de la sucesión que $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ para cada $x \in [0,1]$.

Así hemos demostrado que para cada $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \geq f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, o sea, para cada x, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión creciente y acotada en $\mathbb{R}$, y por lo tanto converge, digamos a $r_x \in \mathbb{R}$ (ver Teorema 2.1.5 de las Notas de Cálculo Avanzado). Si se define $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = r_x$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a g en $[0,1]$.

Claramente la sucesión $\{f_{n+1}(x)\}$ también converge a $g(x)$ y por lo tanto $\{f_n(x) - f_{n+1}(x)\} \to 0$. Pero $f_n(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x - [f_n(x)]^2)$ y por lo tanto la sucesión $\{x - [f_n(x)]^2\} \to 0$ para cada x, o sea la sucesión $\{[f_n(x)]^2\}$ converge a x en $\mathbb{R}$ o equivalentemente, $\{f_n(x)\} \to \sqrt{x}$ en $\mathbb{R}$ para cada $x \in [0,1]$.

Así hemos demostrado que la sucesión creciente de polinomios $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función continua f dada por $f(x) = \sqrt{x}$ en el espacio métrico compacto $([0,1], |\ |)$. Es una consecuencia del Teorema de Dini, que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $\sqrt{x}$, o sea converge en $C([0,1])$. $\square$

Este corolario es el primer paso en la demostración de uno de los teoremas más importantes en Análisis, el Teorema de Weierstrass. Demostraremos una versión concreta de este teorema, pero antes de continuar necesitamos nueva terminología.

Definición 4.1.22. *Sea (X, d) un espacio métrico; una álgebra de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ es una familia $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ tal que*

1. *Si $f, g \in \mathcal{A}$, entonces $fg \in \mathcal{A}$ y $f + g \in \mathcal{A}$, y*
2. *Si $f \in \mathcal{A}$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $rf \in \mathcal{A}$.*

Se dice que $\mathcal{A}$ *separa puntos de* X si para cada $x, y \in X$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Obviamente, $C(X)$ es una álgebra y por esa razón, frecuentemente se refiere a una álgebra $\mathcal{A}$ como una *subálgebra* de $C(X)$.

Lema 4.1.23. *Si la sucesión de funciones $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ converge uniformemente a la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $g : (X,d) \to [0,1]$, entonces la sucesión $\{f_n \circ g : (X,d) \to \mathbb{R}\}$ converge uniformemente a la función $f \circ g : (X,d) \to \mathbb{R}$.*

Demostración: Tarea.

Lema 4.1.24. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de funciones continuas de un espacio métrico compacto (X,d) en $\mathbb{R}$; si $\mathcal{A}$ es cerrado en $(C(X), \upsilon)$ y $f \in \mathcal{A}$, entonces $|f|$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ es un elemento de $\mathcal{A}$ también.*

Demostración: Sea $M = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, entonces la función f^2/M^2 mapea (X,d) a $[0,1]$. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de polinomios construida en el Corolario 4.1.21 que converge uniformemente a la función $+\sqrt{x}$. Entonces, por el Lema 4.1.23, $\{f_n \circ (f^2/M^2)\}$ converge uniformemente a $(f^2/M^2)^{\frac{1}{2}} = |f|/M$, o sea, $\{Mf_n \circ (f^2/M^2)\}$ converge uniformemente a $|f|$ en $[0,1]$. Finalmente, notamos que cada función f_n es un polinomio, lo cual implica que

$$Mf_n \circ (f^2/M^2)$$

es un polinomio en la variable f, o sea, es una suma de multiplos de potencias de f y por lo tanto cada término de la sucesión $\{Mf_n \circ (f^2/M^2)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$. Puesto que $\mathcal{A}$ es cerrado, sigue que el límite de esta sucesión, es decir la función $|f| \in \mathcal{A}$. $\square$

Sea (X,d) un espacio métrico. Si $f, g \in C(X)$ entonces se definen las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ por

$(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ para cada $x \in X$.

$(f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$ para cada $x \in X$.

Tarea 4.1.25. *Demostrar que $f \vee g$ y $f \wedge g$ son funciones continuas.*

Lema 4.1.26. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de funciones continuas de (X, d) en $\mathbb{R}$; si $\mathcal{A}$ es cerrado en $(C(X), \upsilon)$ y $f, g \in \mathcal{A}$, entonces $f \vee g \in \mathcal{A}$ y $f \wedge g \in \mathcal{A}$.*

Demostración: Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} f \vee g &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \text{ y} \\ f \wedge g &= \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|. \end{aligned}$$

Las funciones a la derecha pertenecen a $\mathcal{A}$ por el Lema 4.1.24. □

Lema 4.1.27. *Si el álgebra $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ separa puntos y contiene a todas las funciones constantes, entonces para cada par de puntos $y, z \in X$ y números reales $a, b \in \mathbb{R}$, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(y) = a$ y $g(z) = b$.*

Demostración: Puesto que $\mathcal{A}$ separa puntos de X, existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Definimos $g \in C(X)$ por

$$g(x) = a + \frac{(b-a)[f(x) - f(y)]}{f(z) - f(y)}.$$

Se comprueba fácilmente que $g(y) = a$, $g(z) = b$; además, $g \in \mathcal{A}$ puesto que g es una combinación lineal de un múltiplo de f y una función constante. □

Teorema 4.1.28. (El Teorema de Aproximación de Weierstrass) *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ una subálgebra cerrada que separa puntos y contiene a las funciones constantes; entonces $\mathcal{A} = C(X)$.*

Demostración: Suponer que $f \in C(X)$; debemos demostrar que $f \in \mathcal{A} = \mathrm{cl}(\mathcal{A})$ o lo que es equivalente, que cada bola abierta en $(C(X), \upsilon)$ con centro en f tiene intersección no vacia con $\mathcal{A}$. Con este fin, sea dado $\epsilon > 0$; se requiere encontrar $g \in \mathcal{A}$ tal que $\upsilon(f, g) < \epsilon$.

(Por el momento) fijar $x \in X$; puesto que $\mathcal{A}$ separa puntos de X y contiene a las funciones constantes, sigue del Lema 4.1.27 que para cada $z \in X$ existe una función $h_z : X \to \mathbb{R}$ tal que $h_z \in \mathcal{A}$ y

$$h_z(x) = f(x) \text{ y } h_z(z) = f(z).$$

(Nota que todas las funciones h_z dependen también del punto fijo x que elegimos en el párrafo anterior.)

Puesto que f y todas las funciones h_z son continuas en el espacio compacto (X, d), son uniformemente continuas y también lo son las funciones $h_z - f$. Por lo tanto, existe $\delta_z > 0$ tal que si $d(y, z) < \delta_z$, entonces $|(h_z - f)(y) - (h_z - f)(z)| < \epsilon/2$. Pero $(h_z - f)(z) = 0$ y en consecuencia, $|(h_z - f)(y)| = |h_z(y) - f(y)| < \epsilon/2$.

Así con cada $z \in X$ hemos asociado un número $\delta_z > 0$. La colección de bolas abiertas $\{B_{\delta_z}(z) : z \in X\}$ es una cubierta abierta de (X, d) y por compacidad, existe una subcubierta finita, digamos

$$\{B_{\delta_{z_1}}(z_1), B_{\delta_{z_2}}(z_2), \ldots, B_{\delta_{z_m}}(z_m)\}.$$

Sea

$$g_x = \bigwedge\{h_{z_j} : 1 \leq j \leq m\} = h_{z_1} \wedge h_{z_2} \wedge \cdots \wedge h_{z_m}.$$

Ahora $g_x(x) = \bigwedge\{h_{z_j} : 1 \leq j \leq m\}(x) = \inf\{h_{z_j}(x) : 1 \leq j \leq m\} = f(x)$ y por ser $\mathcal{A}$ cerrado, sigue del Lema 4.1.26, que $g_x \in \mathcal{A}$. Además, si $y \in X$, entonces $y \in B_{\delta_{z_j}}(z_j)$ para alguna $j \in \{1, \ldots, m\}$ y por lo tanto, $|h_{z_j}(y) - f(y)| < \epsilon/2$, y en consecuencia, para cada $y \in X$,

$$g_x(y) \leq h_{z_j}(y) < f(y) + \epsilon/2 \qquad (*)$$

Ahora dejamos que x varíe. Para cada $x \in X$ hemos construido una funcion $g_x \in \mathcal{A}$ tal que $g_x(x) = f(x)$. Puesto que f y todas las g_x son funciones continuas de (X, d) en $\mathbb{R}$, son uniformemente continuas en X y sigue que las funciones $g_x - f$ también lo son. Por lo tanto, existe $\eta_x > 0$ tal que si $d(x, y) < \eta_x$, entonces

$$|(g_x - f)(y) - (g_x - f)(x)| < \epsilon/2,$$

o sea, $|(g_x - f)(y)| = |g_x(y) - f(y)| < \epsilon/2$ y en particular, para cada $y \in X$,

$$g_x(y) > f(y) - \epsilon/2 \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ se puede concluir que para cada $x \in X$ las funciones g_x satisfacen la desigualdad

$$f(y) - \epsilon/2 < g_x(y) < f(y) + \epsilon/2 \qquad (***)$$

para cada $y \in X$.

Con cada $x \in X$ hemos asociado un número $\eta_x > 0$ y por lo tanto, la colección de bolas abiertas $\{B_{\eta_x}(x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de (X, d). Otra vez por compacidad, existe una subcubierta finita, digamos

$$\{B_{\eta_{x_1}}(x_1), B_{\eta_{x_2}}(x_2), \ldots, B_{\eta_{x_k}}(x_k)\}.$$

Sea

$$g = \bigvee\{g_{x_j} : 1 \leq j \leq k\} = g_{x_1} \vee g_{x_2} \vee \cdots \vee g_{x_k}.$$

Otra vez, por el Lema 4.1.26, $g \in \mathcal{A}$ y de $(***)$ se concluye que para cada $y \in X$, tenemos $f(y) - \epsilon/2 < g(y) < f(y) + \epsilon/2$, es decir $|f(y) - g(y)| < \epsilon/2$. o sea,

$$\upsilon(f, g) \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

□

Para poder anunciar la forma original del Teorema de Weierstrass necesitamos el siguiente resultado.

Lema 4.1.29. *Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $(C(X), \upsilon)$ entonces también lo es* $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$.

Demostración: Tarea. $\square$

Los polinomios (en una variable con coeficientes reales) con dominio $[0,1]$, denotado por $\mathcal{P}([0,1])$ forman una álgebra que separa a los puntos de $[0,1]$ y contiene a las funciones constantes (los polinomios de grado 0). Ahora sigue del Lema 4.1.29 que la cerradura de $\mathcal{P}([0,1])$ es una subálgebra cerrada de $(C([0,1]), \upsilon)$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes y por lo tanto es todo $C([0,1])$. Esta observación nos permite enunciar la versión original del Teorema de Weierstrass:

Corolario 4.1.30. *Los polinomios con dominio $[0,1]$ son densos en el espacio $(C([0,1]), \upsilon)$; es decir, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua, existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f (en $[0,1]$).*

El Corolario 4.1.30 no se puede generalizar a funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

Tarea 4.1.31. *Demostrar que no existe ninguna sucesión de polinomios que convergen uniformemente a la función f definida por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ en $\mathbb{R}$. ¿Existe una sucesión de polinomios que convergen puntualmente a f en $\mathbb{R}$?*

4.2 Algunas Aplicaciones

Todos los teoremas de las secciones anteriores tienen aplicaciones en Análisis Matemático, pero en muchos casos, las aplicaciones son muy teóricas. Abajo damos unas aplicaciones concretas a la teoría de ecuaciones diferenciales.

En esta sección se supone que $\mathbb{R}$ tiene la métrica del valor absoluto y que $\mathbb{R}^2$ tiene la métrica Arquimedeana α definida por

$$\alpha((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Tarea 4.2.1. *Demostrar que si $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ es continua en $a \in X$, entonces existe una vecindad U de a tal que f es acotada en U.*

Teorema 4.2.2. (El Teorema de Picard) *Sea $dy/dt = f(t, y)$ una ecuación diferencial con condición inicial $y(t_0) = y_0$ y tal que f es continua en una vecindad U del punto $(t_0, y_0) \in (\mathbb{R}^2, \alpha)$ y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t, y) - f(t, z)| \leq M|y - z|$ para cada $(t, y), (t, z) \in U$. Entonces existe un $r > 0$ tal que en el intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ existe una solución única de la ecuación que satisface la condición inicial.*

Demostración: Queremos demostrar la existencia de una función única ϕ definida en $[t_0 - r, t_0 + r]$ tal que $y = \phi(t)$ es una solución de la ecuación diferencial. Si ϕ es una solución tal, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo, tendremos

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Puesto que f es continua en el punto (t_0, y_0) entonces por la Tarea 4.2.1, f es acotada en una vecindad de (t_0, y_0); o sea, existe una vecindad V de (t_0, y_0) y $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t, y)| \leq K$ para cada $(t, y) \in V$. Ahora escogemos una vecindad "rectangular" de (t_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ contenido en V - específicamente escogemos $r > 0$ suficientemente pequeño para que $[t_0 - r, t_0 + r] \times [y_0 - Kr, y_0 + Kr] \subseteq V$ y además se requiere que $r < 1/M$.
Denotamos por L la colección

$$\{g \in C([t_0 - r, t_0 + r]) : |g(t) - y_0| \leq Kr \text{ para cada } t \in [t_0 - r, t_0 + r]\}$$

y afirmamos que L es un subconjunto cerrado de $C([t_0 - r, t_0 + r])$.

Para demostrar la afirmación, basta demostrar que $C([t_0 - r, t_0 + r]) \setminus L$ es abierto, o sea, para cada $h \in C([t_0 - r, t_0 + r]) \setminus L$, existe una bola abierta $B_\eta(h) \subseteq C([t_0 - r, t_0 + r]) \setminus L$. Pero si $h \notin L$, entonces existe $t' \in [t_0 - r, t_0 + r]$ tal que $|h(t') - y_0| = S > Kr$. Al poner $(S - Kr)/2 = \eta > 0$ es fácil verificar que $B_\eta(h) \cap L = \emptyset$, así comprobando la afirmación. Puesto que $(C([t_0 - r, t_0 + r]), \upsilon)$ es completo, sigue que (L, υ) (con la métrica restringida) también lo es.

Ahora definimos $F : (L, \upsilon) \to (L, \upsilon)$ por

$$F(\phi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Para demostrar que F está bien definida, debemos probar que si $\phi \in L$, entonces $F(\phi) \in L$. Puesto que una integral indefinida es una función continua (Teorema 6.1.1 de las Notas de Cálculo Avanzado), sigue que $F(\phi) \in (C([t_0 - r, t_0 + r])$ y por lo tanto, para demostrar que $F(\phi) \in L$, basta averiguar que $|[F(\phi)](t) - y_0| \leq Kr$ para cada $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. Con este fin, nota que

$$|[F(\phi)](t) - y_0| = |\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds| \leq |\int_{t_0}^{t} Kds| \leq Kr,$$

así demostrando que $F(\phi) \in L$.

Ahora notamos que si ϕ_0 es un punto fijo de F, entonces

$$\phi_0(t) = [F(\phi_0)](t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))ds$$

y por lo tanto, ϕ_0 es la solución única requerida. Por eso, debemos demostrar que F tiene un punto fijo único y debido a la completez de (L, υ) y el Teorema 3.1.14, basta demostrar que $F : (L, \upsilon) \to (L, \upsilon)$ es una contracción.

Con este fin, nota que si $\phi, \psi \in L$ y $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, entonces

$$\begin{aligned}
|[F(\phi)](t) - [F(\psi)](t)| &= |\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M|\phi(s) - \psi(s)|ds \\
&\leq Mr \sup\{|\phi(t) - \psi(t)| : t \in [t_0 - r, t_0 + r]\} \\
&= Mr\upsilon(\phi,\psi).
\end{aligned}$$

Finalmente al tomar el supremo al lado izquierdo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\upsilon(F(\phi), F(\psi)) \\
&\qquad = \sup\{|[F(\phi)](t) - [F(\psi)](t)| : t \in [t_0 - r, t_0 + r]\} \\
&\qquad \leq Mr\upsilon(\phi,\psi),
\end{aligned}$$

y puesto que $Mr < 1$, esto demuestra que F es una contracción. □

La condición $|f(t,y) - f(t,z)| \leq M|y - z|$ (que llamamos una *condición de Lipschitz* en la segunda variable) en la hipótesis del Teorema 4.2.2 es crítica para la demostración. No obstante, se puede demostrar la existencia de una solución sin recurso a una condición de Lipschitz - solo se requiere la continuidad de la función f.

Tarea 4.2.3. *Demuestra que si $f : V \to \mathbb{R}$ es un polinomio (en dos variables) en una región compacta $V = [t_0-a, t_0+a]\times[y_0-b, y_0+b] \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces f satisface una condición de Lipschitz en V, o sea, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(t,y)-f(t,z)| \leq M|y - z|$ para cada $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ y $y, z \in [y_0 - b, y_0 + b]$.*

Antes de enunciar el siguiente teorema notamos que los polinomios en dos variables en una region $V = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathbb{R}^2$ forman una álgebra $\mathcal{A}$ que separa puntos de V y por lo tanto $\mathcal{A}$ es denso en $C(V)$.

Teorema 4.2.4. (Teorema de Peano) *Sea $dy/dt = f(t,y)$ una ecuación diferencial con condición inicial $y(t_0) = y_0$ y tal que f es continua en una vecindad U del punto $(t_0, y_0) \in (\mathbb{R}^2, \alpha)$. Entonces existe un $r > 0$ tal que en el intervalo $[t_0-r, t_0+r]$ existe una solución de la ecuación que satisface la condición inicial.*

Demostración: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeños para que $V = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq U$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de polinomios que convergen uniformemente a f en V. Por la Tarea 4.2.3, cada función f_n satisface una condición de Lipschitz en V y sigue del Teorema 4.2.2 que existe una solución (única) $\phi_n : [t_0 - a, t_0 + a] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ de la ecuación diferencial $dy/dt = f_n(t, y)$ con $\phi_n(t_0) = y_0$.

Suponer que $|f(t, y)| \leq M$ para cada $(t, y) \in V$; puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $f(t, y) - f_n(t, y) < 1$, para cada $(t, y) \in V$. En consecuencia, para cada $n \geq n_0$, $|f_n(t, y)| < M + 1$ para cada $(t, y) \in V$.

Entonces, para cada $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|\phi_n(t) - \phi_n(t')| &= |\int_{t_0}^{t} f_n(s, \phi_n(s))ds - \int_{t_0}^{t'} f_n(s, \phi_n(s))ds| \\ &= |\int_{t}^{t'} f_n(s, \phi_n(s))ds| \\ &\leq (M + 1)|t - t'|\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, al poner $\delta = \epsilon/(M + 1)$, si $|t - t'| < \delta$, para cada $n \geq n_0$, $|\phi_n(t) - \phi_n(t')| < \epsilon$, es decir la familia $\{\phi_n : n \geq n_0\}$ es equicontinua. Además, para cada t, tenemos

$$|\phi_n(t) - y_0| \leq b,$$

es decir, la familia $\mathcal{F} = \{\phi_n : n \in n_0\}$ es acotada en $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Por lo arriba expuesto, podemos aplicar el Teorema de Arzela-Ascoli: Existe en $\mathcal{F}$ una sucesión convergente, digamos $\{\psi_n\} \to \psi$. Afirmamos que ψ es una solución de la ecuación diferencial. Para demostrar esto, consideremos

$$|f_n(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))|$$

$$\begin{aligned}&= |f_n(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi_n(s)) + f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| \\ &\leq |f_n(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi_n(s))| + |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))|\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\{f_n(\cdot, \psi_n)\}$ converge uniformemente a $f(\cdot, \psi)$. Pero

$$\psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_n(s))ds$$

y cuando $n \to \infty$, vemos que

$$\psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds,$$

o sea ψ es una solución de la ecuación. $\square$