Vladimir V. Tkachuk

Notas de Cálculo Avanzado 1.

Básicamente, hay dos requisitos para este curso. El estudiante debe tener una idea clara de qué son los números naturales, enteros y racionales así como la habilidad de aplicar correctamente las operaciones aritméticas y sus combinaciones. El segundo requisito es estar familiarizado con los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos y las operaciones sobre conjuntos. Empezaremos con un repaso breve de las nociones lógicas, conjuntistas y numéricas para que los símbolos y las abreviaciones que se van a manejar, no causen problemas.

1. Construcción de los Números Reales.

La existencia y las propiedades de los números naturales son parte de casi cualquier sistema axiomático. Este curso no será una excepción por lo cual podemos percibir y manejar sus propiedades de manera puramente intuitiva. Es comparativamente fácil construir el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros a partir del conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales. En este curso no vamos a revisar esta construcción como tampoco vamos a desarrollar la construcción del conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales a partir de los enteros.

Sin embargo, es imprescindible que el estudiante sepa la naturaleza y la procedencia de los números reales; por esta razón, la mayor parte de este capítulo se dedicará a la construcción del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. También vamos a ver dos temas avanzados de la Teoría de Conjuntos. En particular, examinaremos funciones inyectivas y sobreyectivas, demostraremos el teorema de Cantor–Bernstein y probaremos que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es numerable.

Tradicionalmente, la primera clase empieza con el repaso de los conceptos básicos de la Lógica, de la Teoría de Conjuntos y de las propiedades aritméticas de los números racionales. Al darnos cuenta de que el conjunto $\mathbb{Q}$ tiene ciertas deficiencias (como, por ejemplo, la imposibilidad de sacar la raíz cuadrada de 2) empezaremos la construcción de los números reales por medio de las cortaduras de Dedekind. Dicha construcción no es fácil y requerirá un máximo esfuerzo del estudiante.

1.1. Repaso de los conceptos lógicos. *Se van a utilizar las siguientes abreviaciones:*

(a) El símbolo $\forall$ es la letra A volteada y proviene de la expresión "for any" en inglés por lo cual sirve para abreviar cualquiera de las frases: "para todo", "para cada" ó "para cualquiera";
(b) El símbolo $\exists$ es la letra E volteada y proviene de la expresión "exists" en inglés por lo cual sirve para abreviar la palabra "existe" ó "existen";
(c) el símbolo $\neg$ se utiliza para negar afirmaciones. Por ejemplo, la expresión $\neg(x < y)$ dice que no es cierto que x sea menor que y;
(d) el símbolo $\Longrightarrow$ dice que una cosa implica la otra y por lo tanto sirve para abreviar la palabra entonces, ó la frase esto implica. Por ejemplo, la expresión $(x \geqslant y) \Longrightarrow (x + 1 > y)$ dice que si x es mayor o igual que y entonces $x + 1$ es estrictamente mayor que y.
(e) el símbolo $\Longleftarrow$ abrevia la expresión "se implica por". Por ejemplo, la fórmula $(x < 2) \Longleftarrow (x = 1)$ dice que la igualdad $x = 1$ implica que $x < 2$. Además este símbolo lo utilizaremos para indicar la suficiencia en una demostración.
(f) el símbolo $\Longleftrightarrow$ dice que dos afirmaciones son equivalentes y sirve para abreviar la expresión "si y solo si". Por ejemplo, $-1 < x < 1 \iff |x| < 1$.

(g) el símbolo $\equiv$ se utilizará para indicar que un concepto por definición coincide con otro. Por ejemplo, (una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva) $\equiv$ ($x \neq y$ implica que $f(x) \neq f(y)$). De modo que el símbolo $\equiv$ abrevia la frase "significa por definición que".

(h) el símbolo $\wedge$ dice que se cumplen las dos afirmaciones que conecta, es decir $A \wedge B$ significa que se cumplen las dos afirmaciones A y B. Por ejemplo, $(x^2 \geqslant 0) \wedge (cosx \leqslant 1)$ es una afirmación cierta para cada $x \in \mathbb{R}$.

(i) el símbolo $\vee$ dice que se cumple por lo menos una de las afirmaciones que conecta,es decir $A \vee B$ significa que se cumple A ó B o bien las dos afirmaciones A y B. Por ejemplo, $(x > 0) \vee (x \leqslant 0)$ es una afirmación cierta para cada $x \in \mathbb{R}$.

(j) el símbolo significará que se obtuvo una contradicción.

(k) (Principio de la Inducción Matemática) Una afirmación $\mathcal{A}(n)$ que depende del número natural n se cumple para todos los números naturales si y sólo si es válida la afirmación $\mathcal{A}(1)$ y $\mathcal{A}(n) \Longrightarrow \mathcal{A}(n+1)$ para todo n natural.

1.2. Repaso de conceptos de la Teoría de Conjuntos.

(a) *Recuerde que $a \in A$ dice que el punto a pertenece al conjunto A. La expresión $A \subset B$ abrevia la frase "A está contenido en B" misma que significa que todos los puntos de A pertenecen a B. Si volteamos el signo de contención entonces tendremos la expresión $A \supset B$ misma que significa que B esta contenido en A, es decir $B \subset A$. Si tachamos un símbolo con la diagonal, entonces obtenemos la negación de dicho símbolo. Por ejemplo, $a \notin B$ dice que el punto a no pertenece al conjunto B. La expresión $A \not\subset B$ significa que el conjunto A no está contenido en el conjunto B y el significado de $A \not\supset B$ es que el conjunto A no contiene a B.*

(b) *Hay dos maneras más comunes de definir un conjunto: simplemente hacer una lista de sus elementos o decir que el conjunto incluye todos los puntos con cierta propiedad. El primer método normalmente se utiliza si el conjunto tiene pocos elementos. Por ejemplo, la expresión $A = \{3, 4, 17, \sqrt{2}, 2009\}$ dice que el conjunto A consiste de los números $3, 4, 17, \sqrt{2}, 2009$. Sin embargo, una lista también puede ser infinita, por ejemplo, si escribimos $B = \{2, 4, \ldots\}$, entonces es claro que B consiste todos los números enteros positivos pares. La fórmula $A = \{x : \varphi(x)\}$ dice que los elementos del conjunto A son todos los números x que tienen la propiedad $\varphi(x)$. Recuérdese que el símbolo $\emptyset$ denota el conjunto vacío. Dados conjuntos A y B el conjunto $A \cap B$ es la intersección de A y B misma que consiste de los puntos que pertenecen tanto a A como a B. La unión $A \cup B$ consiste de los puntos que pertenecen a alguno de los conjuntos A y B y $A \backslash B$ consiste de los puntos de A que no pertenecen a B. Vamos a manejar también uniones e intersecciones infinitas. Si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es la unión de $\mathcal{A}$ misma que consiste de los puntos que pertencen a algún elemento de $\mathcal{A}$. En notación conjuntista, $\bigcup \mathcal{A} = \{x :$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal* *que $x \in A\}$. Analogamente, el conjunto $\bigcap \mathcal{A} = \{x : x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}\}$. es la intersección de la familia $\mathcal{A}$.*

(c) *Como un ejemplo, recordemos que dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si ellos consisten de los mismos elementos, es decir, un punto x pertenece a A si y sólo si x pertence a B. Esta definición se puede expresar con la siguiente fórmula: $A = B \equiv [\forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)] \wedge [\forall x(x \in B \Longrightarrow x \in A)]$*

1.3. Repaso de números naturales, enteros, racionales y sus propiedades.

(a) *Los matemáticos dicen que los números naturales fueron creados por Dios y el resto de las matemáticas, lo inventaron los matemáticos. Es verdad que se puede construir todas las matemáticas a partir de ciertos axiomas que a veces incluyen a los números naturales. Sin embargo, en este curso vamos a suponer que el estudiante ya sabe las propiedades de los números racionales y mostraremos cómo, a partir de los racionales, se definen los números reales. Acuérdese que el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales consiste de los números que se utilizan en la vida real para contar, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Como este conjunto no es suficiente para efectuar la sustracción (es decir, si a y b son números naturales, entonces $a - b$ no necesariamente es natural), se utiliza el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, es decir $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$. Sin embargo, el cociente de dos enteros no necesariamente es un entero; para corregir este defecto de los enteros, se definió el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$.*

(b) *Es muy importante entender que dos números racionales podrían ser iguales aunque sus expresiones parezcan distintas. Por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{7}{14}$ mientras $\frac{1}{2}$ parece ser muy distinto de $\frac{7}{14}$. En general, si $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0,\ s \neq 0$ entonces $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ si y sólo si $ps = qr$. En lenguaje formal, un número racional realmente no es una fracción sino un conjunto de fracciones equivalentes. Por ejemplo, el número racional representado por la fracción $\frac{1}{2}$ está dado por el conjunto $\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ y $q = 2p\}$. Para los fines prácticos, en este curso vamos a identificar todo número racional con cualquiera de las fracciones que lo representan.*

(c) *Una habilidad importante es saber comparar los números racionales. En particular, hay que tener muy claro cuándo un número racional es igual a cero; observe que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$ tenemos la igualdad $\frac{p}{q} = 0$ si y sólo si $p = 0$ y $q \neq 0$.*

(d) *Para comparar dos números racionales arbitrarios, primero tenemos que poder comparar cualquier número racional con el cero. Demuestre, por favor, que para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tenemos la desigualdad $\frac{p}{q} > 0$ si y sólo si $p > 0$ y $q > 0$ ó bien $p < 0$ y $q < 0$.*

(e) *Analogamente podemos expresar el hecho de que un número racional es menor que cero. Pruebe que para todos* $p, q \in \mathbb{Z}$ *con* $q \neq 0$ *tenemos la desigualdad* $\frac{p}{q} < 0$ *si y sólo si* $p > 0$ *y* $q < 0$ *ó bien* $p < 0$ *y* $q > 0$.

(f) *Finalmente observemos que la comparación de dos números racionales arbitrarios se reduce a una comparación con el cero porque para cualequiera números* $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ *con* $q \neq 0$, $s \neq 0$ *tenemos la desigualdad* $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ *si y sólo si* $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0$. *De modo que* $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ *si y sólo si* $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} < 0$.

1.4. Repaso de las operaciones aritméticas con los números racionales.

(a) *Dados números* $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ *tales que* $qs \neq 0$ *los estudiantes normalmente saben muy bien que para las sumas y las restas tenemos las fórmulas* $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$ *y* $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs}$. *Estas fórmulas, de hecho, son las definiciones de la suma y de la sustracción respectivamente. Sin embargo, pocos saben que dichas definiciones tienen sentido solamente porque son coherentes, es decir, el resultado de la operación respectiva no depende de las fracciones que representan los números racionales dados por* $\frac{p}{q}$ *y* $\frac{r}{s}$. *Por ejemplo, ¿quién nos garantiza que* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{3}{9}$*? Obviamente, si esta igualdad no se cumple, entonces la suma de los racionales tiene muy poco sentido. La igualdad mencionada tiene lugar porque tenemos el siguiente teorema general de coherencia de nuestras definiciones.*

Teorema de Coherencia. *Si* $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ *y* $qq'ss' \neq 0$ *entonces de las igualdades* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ *y* $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ *se sigue que* $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} + \frac{r'}{s'}$ *y* $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} - \frac{r'}{s'}$. *Observe que el teorema mencionado no es nada evidente. Trate de demostrarlo usando las definiciones de las operaciones y de las igualdades de los números racionales.*

(b) *Para multiplicar y dividir los números racionales tenemos las fórmulas* $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$ *y* $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}$. *Estas definiciones también se tienen que justificar con un teorema de coherencia. Por favor, intente formularlo y demostrarlo.*

(c) *Los números racionales se construyeron como una extensión del conjunto de los números enteros. Observe que el conjunto* $\mathbb{Z}$ *no está contenido en* $\mathbb{Q}$ *ya que sus elementos no son fracciones. Sin embargo,* $\mathbb{Q}$ *contiene un conjunto* Z *idéntico a* $\mathbb{Z}$ *en cuanto a las propiedades y operaciones. Para verlo basta hacer* $\varphi(m) = \frac{m}{1}$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}$. *Es un ejercicio fácil comprobar que el conjunto* $Z = \{\varphi(m) : m \in \mathbb{Z}\}$ *es idéntico (o isomorfo si utilizamos el lenguaje formal) al conjunto* $\mathbb{Z}$. *Por eso vamos a indentificar cada número entero* m *con su representante* $\varphi(m) = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.

1.5. Repaso de las propiedades de los números racionales.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales ya tiene muy buenas propiedades en cuanto a operaciones y comparaciones entre sus elementos. Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir los elementos de $\mathbb{Q}$ y también los podemos comparar, es decir, decidir cuál de los dos números dados es el mayor. Los siguientes teoremas presentan las propiedades más importantes del orden y de la operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales.

Teorema (Las propiedades del orden). Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$; entonces

(a) *Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$; en otras palabras, el orden es una relación transitiva en $\mathbb{Q}$;*

(b) *tenemos que $a < b$ ó $a > b$ ó bien $a = b$; esta propiedad se llama la tricotomía del orden.*

(c) *Tenemos que $a > b$ si y sólo si $b < a$; en otras palabras, el orden es antirreflexivo en $\mathbb{Q}$.*

(d) *El orden se preserva bajo la suma, es decir, si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.*

(e) *El orden se preserva bajo productos por números positivos, es decir, si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.*

Teorema (Las propiedades de las operaciones). Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$; entonces

(a) *tenemos que $a + b = b + a$ es decir, las sumas son conmutativas.*

(b) *tenemos que $ab = ba$ es decir, los productos también son conmutativos.*

(c) *se tiene la igualdad $a + (b + c) = (a + b) + c$, es decir, la suma es una operación asociativa.*

(d) *se tiene la igualdad $a(bc) = (ab)c$, es decir, la multiplicación también es una operación asociativa.*

(e) *El cero sirve de neutro aditivo, es decir $a + 0 = a$.*

(f) *El uno sirve de neutro multiplicativo, es decir $a \cdot 1 = a$.*

(g) *Para cada $a \in \mathbb{Q}$ existe un número $b \in \mathbb{Q}$ tal que $a + b = 0$; el número b se llama el inverso aditivo de a y se denota por $-a$.*

(h) *Para cada $a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$ existe un número $b \in \mathbb{Q}$ tal que $ab = 1$; el número b se llama el inverso multiplicativo de a y se denota por $\frac{1}{a}$.*

(i) *La multiplicación es distributiva con respecto a las sumas, es decir, tenemos la igualdad $c(a + b) = ca + cb$.*

(j) *(El Axioma de Arquímedes) Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$.*

Aunque los números racionales tienen muy buenas propiedades, el conjunto $\mathbb{Q}$ tiene un defecto importante: la presencia de muchos "huecos" mismos que provocan que ciertas operaciones no tienen inversas en $\mathbb{Q}$. El siguiente teorema presenta un defecto de $\mathbb{Q}$ de manera formal.

1.6. Teorema. *No existe un número racional q tal que $q^2 = 2$.*

La siguiente definición ya de hecho, introduce los números reales. Sin embargo, esta definición es muy técnica y tenemos que recorrer un camino muy largo para ver (y probar) que las cortaduras realmente pueden ser tratadas como números. De modo que las llamaremos números sólo después de definir y demostrar las propiedades del orden y de las operaciones aritméticas en el conjunto de las cortaduras.

1.7. Definición. *Un conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind si α satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\alpha \neq \emptyset$ *y* $\mathbb{Q} \setminus \alpha \neq \emptyset$*;*

(b) si $p \in \alpha$ y $q < p$ entonces $q \in \alpha$;

(c) No existe $p \in \alpha$ tal que $q \leqslant p$ para todo $q \in \alpha$; en otras palabras, α no puede tener elemento máximo.

Una cortadura de Dedekind (o simplemente cortadura) es, intuitivamente, un subconjunto de los racionales que se parece a un rayo izquierdo $\{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$ para un número $a \in \mathbb{Q}$. De hecho, si tuviéramos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales entonces cada cortadura sería un conjunto de tipo $(-\infty, c) \cap \mathbb{Q}$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Para visualizar mejor el concepto de cortadura veamos los siguientes ejemplos.

1.8. Ejemplos. (a) El conjunto vacío no es cortadura.

(b) Si $\alpha = \mathbb{Q}$ entonces α no es cortadura.

(c) El conjunto $\beta = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ sí es cortadura.

(d) El conjunto $\gamma = \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant 0\}$ no es cortadura.

(e) El conjunto $\delta = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ no es cortadura.

(f) El conjunto $\mu = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ sí es cortadura.

La siguiente proposición muestra que el complemento de una cortadura es algo parecido a un rayo derecho.

1.9. Proposición. *Supongamos que α es una cortadura de Dedekind y $p \in \alpha$. Entonces $p < q$ para cualquier $q \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.*

La siguiente proposición nos muestra que a cada número racional le podemos asociar una cortadura de manera natural.

1.10. Proposición. *Si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $r^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$ es una cortadura de Dedekind misma que se llama cortadura racional.*

Ya hemos comentado que las cortaduras de Dedekind son precisamente los números reales. Para darnos cuenta de que son parecidas a los números tenemos que poder compararlas, en particular, saber cuándo son iguales.

1.11. Definición. *Si α y β son cortaduras de Dedekind entonces $\alpha = \beta$ si son iguales como conjuntos, es decir $\alpha = \beta$ si y sólo si $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \alpha$.*

A continuación mostraremos cómo definir el orden en el conjunto de las cortaduras. Más adelante veremos que dicho orden coincide con contención estricta de conjuntos.

1.12. Definición. *Sean α y β cortaduras de Dedekind.*

(a) Diremos que $\alpha < \beta$ si $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$, es decir existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$.

(b) La expresión $\alpha > \beta$ significa que $\beta < \alpha$.

(c) Usaremos la expresión $\alpha \leqslant \beta$ para decir que $\alpha < \beta$ ó bien $\alpha = \beta$.

(d) Analogamente, $\alpha \geqslant \beta$ si y sólo si $\beta \leqslant \alpha$.

(e) Si $\alpha \geqslant 0^*$ entonces la cortadura α se llama no negativa.

(f) Si $\alpha > 0^*$ entonces la cortadura α se llama positiva.

(g) Si $\alpha < 0^*$ entonces la cortadura α se llama negativa.

(h) Si $\alpha \leqslant 0^*$ emtonces la cortadura α se llama no positiva.

El siguiente teorema muestra que cualesquiera dos cortaduras son comparables con respecto al orden que acabamos de introducir.

1.13. Teorema (La tricotomía del orden). *Si α y β son cortaduras de Dedekind entonces se satisface exactamente una de las siguientes condiciones: $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$ ó bien $\alpha > \beta$.*

Necesitamos probar también la transitividad de nuestro orden; mostraremos, además, que este orden practicamente coincide con la contención de conjuntos.

1.14. Teorema. *(a) Dadas cortaduras α y β tenemos la desigualdad $\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si $\alpha \subset \beta$;*
(b) para cualesquiera cortaduras α, β y γ si $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha < \gamma$.

Ya estamos en posición de definir la suma de dos cortaduras.

1.15. Teorema. *Supongamos que α y β son cortaduras de Dedekind. Entonces el conjunto $\{p+q : p \in \alpha \text{ y } q \in \beta\}$ es una cortadura de Dedekind misma que se llama $\alpha + \beta$.*

Ahora nos toca probar las propiedades básicas de la suma.

1.16. Teorema. *Si α, β, γ son cortaduras de Dedekind entonces*

(a) $\alpha + \beta = \beta + \gamma$;

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(c) $\alpha + 0^* = \alpha$.

Para construir el inverso aditivo para cualquier cortadura vamos a necesitar el siguiente enunciado técnico.

1.17. Lema Técnico. *Supongamos que α es una cortadura de Dedekind y p es un número racional positivo. Entonces existen números $t, s, w \in \mathbb{Q}$ tales que $s - t = p$ mientras que $t \in \alpha,\ w \notin \alpha$ y $w < s$ (y por lo tanto $s \notin \alpha$).*

Hace falta un esfuerzo considerable para demostrar que cada cortadura tiene un inverso aditivo. De eso se trata en el siguiente teorema.

1.18. Teorema. *Para toda cortadura de Dedekind α, existe una única cortadura de Dedekind β tal que $\alpha + \beta = 0^*$; la cortadura β se llama $-\alpha$.*

Nuestro siguiente paso es establecer las propiedades que relacionan la operación de inversa aditiva con el orden.

1.19. Proposición. *(a) La inversa aditiva del cero es el cero, es decir, $-0^* = 0^*$;*

(b) para toda cortadura α tenemos que $-(-\alpha) = \alpha$;
(c) si α, β, γ son cortaduras de Dedekind y $\beta < \gamma$ entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$;
(d) dadas cortaduras α y β tales que $\alpha > 0^*$ y $\beta > 0^*$ tenemos que $\alpha + \beta > 0^*$;
(e) si α es una cortadura y $\alpha > 0^*$ entonces $-\alpha < 0^*$;
(f) si α es una cortadura y $\alpha < 0^*$ entonces $-\alpha > 0^*$.

Los métodos que acabamos de desarrollar ya nos permiten introducir la sustracción entre cortaduras.

1.20. Proposición. *Para cualesquiera cortaduras α y β existe una única cortadura γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$. La cortadura γ se llama $\beta - \alpha$ y coincide con $\beta + (-\alpha)$.*

Definir el producto de cortaduras no es fácil y se hará en tres pasos. Primero vamos a introducir el producto de cortaduras no negativas.

1.21. Teorema. *Sean α y β cortaduras de Dedekind tales que $\alpha \geqslant 0^*$ y $\beta \geqslant 0^*$. Entonces el conjunto $\{pq : p \in \alpha,\ q \in \beta,\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0\} \cup 0^*$ es una cortadura de Dedekind que se llama $\alpha \cdot \beta$ (esta cortadura, también la vamos a denotar por $\alpha\beta$). Recuerde que $0^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ es la cortadura racional asociada a cero.*

Ya podemos introducir el concepto de valor absoluto de manera usual.

1.22. Definición. *Si α es una cortadura de Dedekind entonces*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \geqslant 0^*; \\ -\alpha, & \text{si } \alpha < 0^*. \end{cases}$$

1.23. Ejercicio. *Pruebe que $|\alpha| \geqslant 0^*$ para cualquier cortadura α.*

Y ahora sí, podemos completar la definición del producto de cortaduras.

1.24. Definición. *Si α y β son cortaduras de Dedekind, entonces*

(a) $\alpha\beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$ si $\alpha < 0^*$ y $\beta \geqslant 0^*$;

(b) $\alpha\beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$ si $\alpha \geqslant 0^*$ y $\beta < 0^*$;

(c) $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|$ si $\alpha < 0^*$ y $\beta < 0^*$.

1.25. Ejercicio. *Dada cualquier cortadura α, demostrar que $|\alpha| = 0^*$ si y sólo si $\alpha = 0^*$.*

1.26. Ejercicio. *Dada cualquier cortadura α, probar que $|-\alpha| = |\alpha|$.*

1.27. Ejercicio. *Probar que $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ para cualesquiera cortaduras α y β.*

1.28. Ejercicio. *Supongamos que α y β son cortaduras de Dedekind tales que $\alpha > 0^*$ y $\beta > 0^*$. Probar que $\alpha\beta > 0^*$.*

El siguiente paso es demostrar que el producto de cortaduras de Dedekind tiene las propiedades que debe tener. Sin embargo, por ser muy técnica la definición del producto, algunas demostraciones van a requerir un esfuerzo considerable. En particular, el teorema que sigue tiene una demostración bastante complicada.

1.29. Teorema. *Si α, β y γ son cortaduras de Dedekind, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(a) $\alpha\beta = \beta\alpha$;
(b) $\alpha \cdot 0^* = 0^*$;
(c) *si* $\alpha\beta = 0^*$ *entonces* $\alpha = 0^*$ *ó* $\beta = 0^*$;
(d) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$;
(e) $\alpha(-\beta) = (-\alpha)(\beta) = -\alpha\beta$;
(f) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
(g) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ *y* $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$;
(h) *si* $\alpha < \beta$ *y* $\gamma > 0^*$ *entonces* $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

En este momento ya estamos listos para definir la división de cortaduras.

1.30. Teorema. *Si α es una cortadura de Dedekind y $\alpha \neq 0^*$ entonces para toda β existe una única γ tal que $\alpha\gamma = \beta$. La cortadura γ se llama $\frac{\beta}{\alpha}$.*

Es obligatorio no sólo construir los números reales, sino también probar que los reales forman una extensión de $\mathbb{Q}$ y sus operaciones son extensiones de las operaciones aritméticas en $\mathbb{Q}$. El siguiente teorema muestra que el conjunto de las cortaduras es una extensión deseada de los racionales.

1.31. Teorema. *Dados cualesquiera $p, q \in \mathbb{Q}$ tenemos las siguientes propiedades:*
(a) *para toda cortadura α, la desigualdad $p^* < \alpha$ se cumple si y sólo si $p \in \alpha$;*
(b) *la desigualdad $p < q$ se cumple si y sólo si $p^* < q^*$;*
(c) $(p + q)^* = p^* + q^*$;
(d) $(-p)^* = -p^*$;
(e) $(pq)^* = p^* \cdot q^*$;
(f) *si* $q \neq 0$ *entonces* $(\frac{p}{q})^* = \frac{p^*}{q^*}$.

La extensión de los racionales que acabamos de construir es la mínima entre todas las extensiones naturales de $\mathbb{Q}$. El siguiente teorema expresa este hecho de manera formal.

1.32. Teorema (de la densidad de los racionales). *Si α y β son cortaduras de Dedekind tales que $\alpha < \beta$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < q^* < \beta$.*

Por fin, ya tenemos la definición más importante de este Capítulo.

1.33. Definición. *De ahora en adelante las cortaduras Dedekind se llamarán números reales; el conjunto de los números reales se denotará por el símbolo $\mathbb{R}$.*

La estructura interna de los números reales (como subconjuntos de $\mathbb{Q}$) se va a utilizar por última vez en la demostración del teorema que sigue. En el resto rel curso ya podremos olvidar de que realmente son conjuntos y sólo vamos a percibirlos como puntos de $\mathbb{R}$. Será suficiente hacer uso de las propiedades del orden y de las operaciones aritméticas sobre los elementos de $\mathbb{R}$.

1.34. Teorema (de la ausencia de huecos en el conjunto de los reales). *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que*

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$;
(b) $A \cap B = \emptyset$;
(c) $\alpha < \beta$ *en cuanto* $\alpha \in A$ *y* $\beta \in B$.

Entonces existe un único $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ para cualesquiera $\alpha \in A$ y $\beta \in B$.

1.35. Corolario. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que*

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$;
(b) $A \cap B = \emptyset$;
(c) $\alpha < \beta$ *en cuanto* $\alpha \in A$ *y* $\beta \in B$.

Entonces existe el punto máximo de A ó el punto mínimo de B.

El concepto de supremo/ínfimo que presentamos a continuación es una herramienta clave en cualquier situación que involucra límites y/o continuidad.

1.36. Definición. *Dado cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que $\alpha = \sup(A)$ (o sea, que α es el supremo del conjunto A) si $\beta \leqslant \alpha$ para cada $\beta \in A$ y para todo $\gamma < \alpha$ existe $\beta \in A$ tal que $\gamma < \beta$. Diremos que $\alpha = \inf(A)$ (es decir, α es el ínfimo del conjunto A) si $\alpha \leqslant \beta$ para cada $\beta \in A$ y para todo $\gamma > \alpha$ existe $\beta \in A$ tal que $\beta < \gamma$.*

El siguiente teorema (llamado el Principio del Supremo) muestra el método principal para demostrar que es posible pasar al límite en cierto contexto. El Principio del Supremo se va a aplicar para examinar la compacidad y la conexidad de algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$ así como demostrar la completez del conjunto de los reales.

1.37. Teorema (el Principio del Supremo). *Supongamos que E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.*

(a) Si es posible encontrar un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant a$ para todo $x \in E$ (o sea, E es superiormente acotado) entonces existe $\sup(E)$.

(a) *Si es posible encontrar un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geqslant a$ para todo $x \in E$ (o sea, E es inferiormente acotado) entonces existe* $\inf(E)$.

El Principio del Supremo, lo aplicaremos en seguida para mostrar que los reales ya no tienen la deficiencia de los racionales en cuanto a la existencia de raíces de los números positivos (véase el Teorema 1.6).

1.38. Teorema. *Si x es un número real positivo y $n \in \mathbb{N}$ entonces existe un único número $y > 0$ tal que $y^n = x$.*

Las fracciones decimales son un método muy común de representar los números reales. A continuación mostraremos cómo formalizar este método.

1.39. Definición. *Un número real d se llama* digito *si d pertenece al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mismo que se llama el conjunto de los dígitos.*

1.40. Definición. *Diremos que una expresión s es una fracción decimal finita si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s = a \, . \, d_1 d_2 \ldots d_k$ donde $a \in \mathbb{Z}$ y d_i es un dígito para todo $i = 1, \ldots, k$. El número a se llama la parte entera de s y d_i es el i-ésimo dígito decimal de s.*

1.41. Definición. *Si $s = a \, . \, d_1, \ldots d_k$ es una fracción decimal finita considérese el número $r(s) = a + 10^{-1} \cdot d_1 + \ldots + 10^{-k} d_k$. Se dice que un número $x \in \mathbb{R}$ se representa por una fracción decimal finita s si $x = r(s)$.*

Las fracciones decimales finitas representan muy pocos números reales. Es un buen ejercicio probar que el número racional $\frac{1}{3}$ no se puede representar por medio de una fracción decimal finita. Como nuestro propósito es representar a todos los números reales, necesitamos extender el concepto de fracción decimal finita.

1.42. Definición. *Diremos que una expresión s es una fracción decimal infinita si $s = a \, . \, d_1 d_2 \ldots$, donde $a \in \mathbb{Z}$ y d_i es un dígito para todo $i \in \mathbb{N}$. El número a se llama la parte entera de s y d_i es el i-ésimo dígito decimal de s. Para todo $k \in \mathbb{N}$ la fracción decimal finita $w_k(s) = a \, . \, d_1 \ldots d_k$ se llama la k-ésima aproximación de s.*

1.43. Definición. *Un número $x \in \mathbb{R}$ se representa por una fracción decimal infinita $s = a \, . \, d_1 d_2 \ldots$ si $0 \leqslant x - a < 1$ y tenemos la desigualdad $0 \leqslant x - r(w_k(s)) < 10^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Intuitivamente una fracción decimal infinita s representa a un número x si las aproximaciones finitas de s estén tan cercanas a x como queramos.

1.44. Ejercicio. *(a) Pruebe que $\frac{1}{3}$ se representa por la fracción decimal infinita $s = 0 \, . \, 333 \ldots$;*
(b) demuestre que la fracción decimal infinita $t = 0 \, . \, 999 \ldots$ no representa a ningún número;

(c) demuestre que si $u = a.d_1 \dots d_k$ es una fracción decimal finita entonces la fracción decimal infinita $u' = a.d_1 \dots d_k 000 \dots$ representa el mismo número.

Las fracciones decimales (finitas e infinitas) ya son suficientes para representar cualquier número real.

1.45. Teorema. *Todo $x \in \mathbb{R}$ se representa por una fracción decímal (finita o infinita).*

Nuestro siguiente paso es caracterizar los números racionales en términos de sus representaciones decimales.

1.46. Definición. *Una fracción decimal infinita s se llama periódica si existen números $k, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ y dígitos $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_m$ tales que*

$$s = a.d_1 \dots d_k e_1 \dots e_m e_1 \dots e_m e_1 \dots e_m e_1 \dots,$$

es decir, el grupo de dígitos $e_1 \dots e_m$ se repite indefinidamente después del grupo $d_1 \dots d_k$.

1.47. Teorema. *Un número $x \in \mathbb{R}$ es racional si y solo si x se representa por una fracción decímal periódica.*

En lo que resta de este Capítulo nos dedicaremos a desarrollar unos métodos de la teoría avanzada de conjuntos; nuestro propósito es llegar a demostrar el teorema de Cantor–Bernstein y verificar que cualquier intervalo no trivial de $\mathbb{R}$ no es numerable.

1.48. Definición. *Dados conjuntos A y B recuerde que f es una función de A en B si a cada elemento $a \in A$ se le asocia un único elemento $b = f(a) \in B$. La expresión $f : A \to B$ dice que f es una función de A en B. El conjunto A se llama el dominio de la función f mismo que se denota por* $\operatorname{dom}(f)$*. El conjunto B se llama el contradominio de F y $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset B$ es la imagen de f; la vamos a denotar por* $\operatorname{Im}(f)$*.*

La siguiente definición introduce las tres clases más importantes de funciones. Intuitivamente, si $f : A \to B$ es una inyección entonces A se puede percibir como un conjunto "más chico" que B. Si f is una sobreyección entonces A tiene que ser "más grande"; si f is una biyección entonces A y B de cierta manera "son iguales".

1.49. Definición. *Dada una función $f : A \to B$ diremos que*

(a) f es una inyección (o inyectiva) si para cualesquiera $a, a' \in A$ tales que $a \neq a'$ tenemos que $f(a) \neq f(a')$;

(b) f es una sobreyección (o sobreyectiva) si $f(A) = B$, es decir, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;

(c) f es una biyección si f es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Si tenemos una función $f : A \to B$ entonces f tiene sus valores en los puntos de cualquier subconjunto $A' \subset A$. En lenguaje formal esto se llama la posibilidad de restringir la función f a cualquier subconjunto de A. La siguiente definición formaliza esta idea.

1.50. Definición. *Dados conjuntos A y B, si se tiene una función $f : A \to B$ entonces, para todo $C \subset A$ podemos definir una función $g : C \to B$ haciendo $g(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. La función g se llama la restricción de f a C y se denota por $f|C$.*

La manera más sencilla de definir una función de A en B es mandar todos los puntos de A al mismo punto de B. Tales funciones se llaman constantes. Aquí abajo viene la definición formal.

1.51. Definición. *Una función $f : A \to B$ se llama constante si existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$ para todo $a \in A$.*

La manera más fácil de definir una función de un conjunto A en sí mismo es hacer que deje cada punto de A en su lugar. Esta clase de funciones se introduce en la definición que sigue.

1.52. Definición. *Dado un conjunto A la función indentidad $\mathrm{id}_A : A \to A$ se define mediante la igualdad $\mathrm{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$.*

Ya hemos visto que una función $f : A \to B$ puede visualizarse como algo que "traslada" los puntos de A hacia B. Si una otra función $g : B \to C$ "traslada" los puntos de B hacia C entonces combinando las funciones f y g obtenemos "un traslado" de los puntos de A hacia C. Esta idea es el motivo para la siguiente definición.

1.52. Definición. *Supongamos que A, B y C son conjuntos y tenemos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Hagamos $h(a) = g(f(a))$ para cada $a \in A$; ésto nos da una función $h : A \to C$ misma que se denota por $g \circ f$ y se llama la composición de las funciones f y g.*

Si una función $f : A \to B$ manda los puntos de A hacia B y $g : B \to A$ entonces la composición $g \circ f$ mueve los puntos de A dentro de A. Un caso especial es cuando la función $g \circ f$ deja cada punto de a en su lugar. Intuitivamente esto significa que g trae a de regreso a su misma ubicación, es decir g "invierte" la acción de f.

1.53. Definición. *Dados conjuntos A y B, si $f : A \to B$, entonces una función $g : B \to A$ se llama una inversa para f si $g \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

1.54. Ejercicio. *Probar que una función $f : A \to B$ no puede tener más de una inversa, es decir, si una inversa de f existe entonces es única.*

1.55. Ejercicio. *Probar que una función $f : A \to B$ tiene inversa si y sólo si f es una biyección.*

1.56. Ejercicio. *Dada una función $f : A \to B$ supongamos que $g : B \to A$ es la inversa de f. Probar que f es la inversa de g. En particular, la inversa de cualquier biyección también es una biyección.*

El teorema que sigue presenta la lista de las propiedades más importantes de las inyecciones, sobreyecciones y biyecciones

1.57. Teorema. *Supongamos que A, B y C son conjuntos y tenemos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$.*
(a) Si f y g son inyecciones entonces $g \circ f$ también es inyectiva. En otras palabras, la composición de dos inyecciones es una inyección.
(b) Si f y g son sobreyecciones entonces $g \circ f$ también es sobreyectiva. En otras palabras, la composición de dos sobreyecciones es una sobreyección.
(c) Si f y g son biyecciones entonces $g \circ f$ también es biyectiva. En otras palabras, la composición de dos biyecciones es una biyección.
(d) Si $f : A \to B$ es una inyección y $A' \subset A$, entonces $f|A'$ es una inyección.
(e) Si $f : A \to B$ es una inyección, entonces $f : A \to f(A)$ es una biyección.

Acto seguido, vamos a desarrollar la idea de comparación de dos conjuntos. Si A y B son conjuntos finitos, una manera evidente de definir cuando A es “más grande” que B es declarar que esto sucede si A tiene más elementos que B. Desafortunadamente, no es tan fácil extender esta idea a conjuntos infinitos. Aquí es donde entran en acción las funciones inyectivas y biyectivas.

1.58. Definición. *Dados conjuntos A y B diremos que la cardinalidad de A no excede la cardinalidad de B (denotando esto por $|A| \leqslant |B|$) si existe una inyección $f : A \to B$.*

1.59. Definición. *Dados conjuntos A y B diremos que la cardinalidad de A es igual a la cardinalidad de B (denotando esto por $|A| = |B|$) si existe una biyección $f : A \to B$.*

Cabe mencionar que en este curso *jamás definiremos la cardinalidad de un conjunto*. La definición es técnica y está muy por arriba de las necesidades de este curso. Interesantemente, vamos a poder comparar cardinalidades sin saber qué es una cardinalidad. El estudiante tiene que tener esto muy presente y debe acostumbrarse a esta situación que a primera vista parece contradictoria.

1.60. Proposición. *(a) Dados conjuntos A y B tenemos que $|A| \leqslant |B|$ si y sólo si existe una sobreyección de $f : B \to A$.*
(b) Dados conjuntos A, B y C, si $|A| \leqslant |B|$ y $|B| \leqslant |C|$ entonces $|A| \leqslant |C|$.

Ya hemos llegado a un teorema clásico de la teoría de conjuntos mismo que lleva el nombre de Cantor–Bernstein. Este teorema sigue muy difícil de demostrar a pesar de que se descubrió hace más de cien años. Si nos olvidamos del hecho de que no sabemos qué es la cardinalidad y percibimos las cardinalidades como números reales entonces el teorema parece evidente. Sin embargo, si lo reformulamos utilizando la definición de manera directa, entonces veríamos que tenemos que construir una biyección entre A y B a partir de una inyección $f : A \to B$ y una inyección $g : B \to A$ y esto, en general, no puede ser fácil.

1.61. Teorema (Cantor–Bernstein). *Si A y B son conjuntos tales que $|A| \leqslant |B|$ y $|B| \leqslant |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Terminaremos este Capítulo examinando conjuntos finitos y numerables. Veremos, en particular, que no todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad.

1.62. Definición. *Un conjunto A se llama finito si existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| \leqslant |\{1, \ldots, n\}|$.*

1.63. Definición. *Un conjunto A se llama numerable si $|A| \leqslant |\mathbb{N}|$.*

Para entender mejor el concepto de numerabilidad, observe que si A es numerable entonces existe una sobreyección $f : \mathbb{N} \to A$ (véase la Proposición 1.60). De modo que $A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$; haciendo $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos una numeración $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ del conjunto A. El termino "numerable" se debe precisamente a la posibilidad de numerar el conjunto con los índices naturales.

1.64. Proposición. *Si un conjunto A es finito entonces es numerable.*

En la Teoría de Conjuntos un conjunto numerable se percibe como "pequeño". Si adoptamos esta visón entonces es fácil entender la siguiente proposición. En ella se dice, basicamente, que si un conjunto A es pequeño y B es más chico que A entonces B también es pequeño.

1.65. Proposición. *Supongamos que A es un conjunto numerable.*

(a) *Si $B \subset A$, entonces B también es numerable.*

(b) *Si C es un conjunto y existe una sobreyección $f : A \to C$ entonces C también es numerable.*

(c) *Si D es un conjunto y existe una inyección $f : D \to A$ entonces D también es numerable.*

Si ya nos hicimos de la idea de que los conjuntos numerables son "pequeños" entonces es fácil ver que el siguiente teorema dice simplemente que la unión de un número pequeño de conjuntos pequeños es un conjunto pequeño.

1.66. Teorema. *Si un conjunto A_n es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable.*

Una operación clásica sobre los conjuntos es el producto. Esta operación nos brinda objetos tan importantes como el plano $\mathbb{R}^2$ o el espacio $\mathbb{R}^3$. En este curso sólo vamos a utilizar productos finitos.

1.67. Definición. *Dados conjuntos A y B el conjunto $\{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ de los pares ordenados de los elementos de A y B se llama el producto de A y B y se denota por $A \times B$.*

El siguiente paso es cerciorarnos del hecho de que el producto de dos conjuntos pequeños es un conjunto pequeño.

1.68. Teorema. *Si A y B son conjuntos numerables, entonces el conjunto $A \times B$ es numerable.*

1.69. Corolario. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.*

El siguiente teorema muestra que no todos subconjuntos de los números reales son numerables. En particular, existen conjuntos infinitos (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$) cuyas cardinalidades no coinciden.

1.70. Teorema. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces el intervalo (a, b) no es numerable.*

1.71. Corolario. *El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los números irracionales no es numerable.*

Ejercicios del Capítulo 1.

1.A. Ejercicio. *Escriba la fórmula*

$$\mathbf{P}: \qquad \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}((k \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant k \leqslant m) \Longrightarrow ((k = n) \vee (k = m)))$$

con palabras sin utilizar los cuantificadores ni tampoco el signo de implicación. ¿Es cierto o falso el enunciado dado por la fórmula **P**?

1.B. Ejercicio. *Verifique si es cierto o falso el enunciado dado por la siguiente fórmula*

$$\mathbf{Q}: \qquad \exists n \in \mathbb{N}(n > 1) \wedge \forall m \in \mathbb{N}(\tfrac{m}{n} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \tfrac{m+1}{n+1} \in \mathbb{N}).$$

Escriba la negación de la fórmula **Q**.

1.C. Ejercicio. *Demuestre, utilizando la inducción matemática, que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.D. Ejercicio. *Demuestre la coherencia de la comparación de números racionales. En otras palabras, hay que probar para cualesquiera $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ tales que $q \cdot q' \cdot s \cdot s' \neq 0$, que si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ y tenemos las igualdades $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ y $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ entonces $\frac{p'}{q'} < \frac{r'}{s'}$.*

1.E. Ejercicio. *Demuestre la coherencia de la suma de números racionales. En otras palabras, hay que probar para cualesquiera $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ tales que $q \cdot q' \cdot s \cdot s' \neq 0$, que $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} + \frac{r'}{s'}$ en cuanto $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ y $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$.*

1.F. Ejercicio. *Demuestre la coherencia de la resta de números racionales. En otras palabras, hay que probar para cualesquiera* $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ *tales que* $q \cdot q' \cdot s \cdot s' \neq 0$, *que* $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} - \frac{r'}{s'}$ *en cuanto* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ *y* $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$.

1.G. Ejercicio. *Pruebe la coherencia de la multiplicación de números racionales. En otras palabras, hay que probar para cualesquiera* $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ *tales que* $q \cdot q' \cdot s \cdot s' \neq 0$, *que* $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{r'}{s'}$ *en cuanto* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ *y* $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$.

1.H. Ejercicio. *Pruebe la coherencia de la división de números racionales. En otras palabras, hay que probar para cualesquiera* $p, p', q, q', r, r', s, s' \in \mathbb{Z}$ *tales que* $q \cdot q' \cdot s \cdot s' \neq 0$, *que* $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} : \frac{r'}{s'}$ *en cuanto* $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ *y* $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$.

1.I. Ejercicio. *Pruebe que el número* $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ *es irracional.*

1.J. Ejercicio. *Pruebe que el número* $\log_2 3$ *es irracional.*

1.K. Ejercicio. *¿Será irracional el número* $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$*?*

1.L. Ejercicio. *Probar que el conjunto* $\mathbb{P}$ *de los números irracionales es denso en* $\mathbb{R}$, *es decir, si* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$ *entonces existe* $p \in \mathbb{P}$ *tal que* $a < p < b$.

1.M. Ejercicio. *Dadas dos cortaduras de Dedekind* α *y* β *demostrar que* $\alpha \cup \beta$ *es una cortadura de Dedekind.*

1.N. Ejercicio. *Dadas dos cortaduras de Dedekind* α *y* β *demostrar que* $\alpha \cap \beta$ *es una cortadura de Dedekind.*

1.O. Ejercicio. *Dar un ejemplo de una familia* $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de cortaduras de Dedekind tal que el conjunto* $\bigcup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *no sea cortadura de Dedekind.*

1.P. Ejercicio. *Dar un ejemplo de una familia* $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de cortaduras de Dedekind tal que el conjunto* $\bigcap\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ *no sea cortadura de Dedekind.*

1.Q. Ejercicio. *Supongamos que* α *y* β *son dos distintas cortaduras de Dedekind. Probar que el conjunto* $(\alpha \setminus \beta) \cup (\beta \setminus \alpha)$ *es infinito.*

1.R. Ejercicio. *Sean* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$ *conjuntos no vacíos y acotados. Sabiendo, además, que* $A \subset B$, *demostrar que* $\inf(B) \leqslant \inf(A) \leqslant \sup(A) \leqslant \sup(B)$.

1.S. Ejercicio. *Sea* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6x^2 - 3x + 1 < 0\}$; *verificar si existe* $\sup(A)$. *¿Existirá* $\inf(A)$*?*

1.T. Ejercicio. *Demostrar que una función* $f : A \to B$ *es sobreyectiva si y sólo si existe una función* $g : B \to A$ *tal que* $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

1.U. Ejercicio. *Demostrar que una función* $f : A \to B$ *es inyectiva si y sólo si existe una función* $g : B \to A$ *tal que* $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

1.V. Ejercicio. *Dado un conjunto* A *sea* $\exp(A) = \{B : B \subset A\}$. *Demostrar que no existe sobreyección de* A *en* $\exp(A)$. *En otras palabras, debemos probar que* *para cualquier función $\varphi : A \to \exp(A)$, existe $B \in \exp(A)$ tal que $B \neq \varphi(a)$ para todo $a \in A$.*

1.W. Ejercicio. *Supongamos que A es un conjunto finito y $f : A \to A$ es una inyección. Probar que f es biyectiva.*

1.X. Ejercicio. *Supongamos que A es un conjunto finito y $f : A \to A$ es una sobreyección. Probar que f es biyectiva.*

1.Y. Ejercicio. *Sabiendo que A es un conjunto numerable infinito, demostrar que $|A| = |A \times A|$.*

1.Z. Ejercicio. *Un número $r \in \mathbb{R}$ se llama* algebráico *si existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales tal que r es una raíz de $p(x)$. Probar que el conjunto de los números algebráicos es numerable.*

2. Sucesiones Numéricas

Una de las operaciones fundamentales del Análisis es el paso al límite. Esta operación tiene innumerables aplicaciones tanto el las matemáticas como en ciencias aplicadas. En el Análisis hay varias formas de pasar al límite; en este Capítulo examinaremos la forma más simple de dicha operación que se basa en el concepto de *sucesión numérica*. Intuitivamente, una sucesión numérica es una secuencia infinita de números como, por ejemplo, $1, 2, 3, \ldots$. Sin embargo, para trabajar con las sucesiones necesitamos tener la información completa sobre cada término suyo. La siguiente definición muestra cómo se logra esto de manera formal.

2.1. Definición. *Una sucesión en* $\mathbb{R}$ *es una función* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Normalmente,* $x(n)$ *se denota por* x_n *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *La imagen de la función* x *es el conjunto* $x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *La sucesión dada por* x *tradicionalmente se denota por* (x_n). *Los números* x_n *se llaman términos de la sucesión* (x_n). *Una sucesión* (x_n) *se llama finita si el conjunto* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es finito.*

Como siempre, si se introduce un nuevo concepto, en seguida daremos varios ejemplos para ilustrarlo.

2.2. Ejemplos. (a) Si tenemos una sucesión $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ que consiste de puros unos, entonces $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Una sucesión cuyos términos son iguales se llama constante.
(b) Si nos fijamos en la sucesión $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ en la cual se alternan los unos y los menos unos, es fácil ver que $x_n = (-1)^{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
(c) La sucesión $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2009}, \ldots)$ ya no es tan trivial como las dos anteriores pero tampoco es difícil adivinar que $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(d) La sucesión $(1, 2, 3, \ldots, 2009, \ldots)$ es un ejemplo de coincidencia del término de la sucesión con su índice, es decir, $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(e) Si tenemos ejemplos de sucesiones que provienen de problemas reales, entonces ya no es tan fácil ver cómo es el comportamiento de la sucesión. Por ejemplo, si $x_n = \frac{\ln(n)}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces hace falta un esfuerzo para probar que sus términos pueden ser tan chiquitos como queramos o, por ejemplo que $x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente definición introduce el concepto más importante de este Capítulo.

2.3. Definición. *Dada una sucesión* (x_n) *de números reales diremos que* (x_n) *converge a un punto* $x \in \mathbb{R}$ *(y lo vamos a denotar por* $x_n \to x$*) si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - x| < \epsilon$ *para todo* $n \geqslant m$. *El número* m *de hecho depende de* ε*; para subrayarlo, a veces se escribe que* $m = m(\varepsilon)$. *Una sucesión* (x_n) *se llama convergente si existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \to x$. *El hecho de que* x *es el límite de una sucesión* (x_n) *también se denota por* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ó simplemente por* $\lim x_n = x$. *La sucesión* (x_n) *se llama divergente si ella no es convergente.*

Intuitivamente, la convergencia $x_n \to x$ significa que la distancia entre x_n y x es menor que cualquier número positivo dado a partir de cierto índice. Para cuestiones prácticas, si $\varepsilon > 0$ is muy pequeño entonces los puntos x_n y x no se podrán distinguir. Por ejemplo, si $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$ entonces para casi cualquier problema de aplicación, si $|x_n - x| < \varepsilon$ entonces podemos considerar que $x_n = x$ a partir de cierto número.

Ahora veamos algunos ejemplos de convergencia y de divergencia de sucesiones.

2.4. Ejemplos. (a) Si $a \in \mathbb{R}$ y $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \to a$.
(b) Si $x_n = (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces (x_n) diverge;
(c) Si $x_n = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $x_n \to 0$.
(d) Si $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión (x_n) diverge.
(e) Si $x_n = \frac{n}{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $x_n \to 1$.

La existencia de una cota superior o inferior para todos los elementos de una sucesión es muy importante si queremos averiguar si es convergente. De modo que hay un término específico para las sucesiones de este tipo.

2.5. Definición. *(a) Una sucesión numérica (x_n) se llama superiormente acotada si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
(b) La sucesión (x_n) se llama inferiormente acotada si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geqslant L$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(c) La sucesión (x_n) se llama acotada si existe un número $M > 0$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

El concepto de sucesión acotada es el más fuerte y resulta que es equivalente a que la sucesión tenga tanto una cota superior como una inferior.

2.6. Proposición. *Una sucesión (x_n) es acotada si y solo si es acotada superiormente e inferiormente al mismo tiempo.*

Veamos unos ejemplos de existencia de cotas para sucesiones.

2.7. Ejemplos. (a) Si $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión (x_n) es acotada.
(b) Hagamos $x_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$; entonces la sucesión (x_n) es inferiormente acotada.
(c) Sea $x_n = \ln(\frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces la sucesión (x_n) es superiormente acotada.
(d) Si $x_n = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión (x_n) es acotada.

Si una sucesión pudiera tener dos límites, la teoría de la convergencia de sucesiones no serviría de mucho. El siguiente teorema muestra que el concepto de límite está bien definido.

2.8. Teorema (La unicidad del límite). *Dada una sucesión numérica* (x_n)*, si* $x_n \to a$ *y* $x_n \to b$ *entonces* $a = b$*.*

La siguiente propiedad de sucesiones convergentes no es difícil de demostrar; sin embargo se untiliza con mucha frecuencia y tiene consecuencias fundamentales.

2.9. Proposición. *Si una sucesión numérica es convergente, entonces es acotada.*

La proposición que sigue muestra que en muchos casos es suficiente considerar las sucesiones que convergen a cero.

2.10. Proposición. *Sea* (x_n) *una sucesión numérica. Entonces,*

(a) $x_n \to 0$ *si y sólo si* $|x_n| \to 0$*.*

(b) $x_n \to x$ *si y sólo si la sucesión* $(x_n - x)$ *converge a cero.*

A continuación veremos que el trabajo con las sucesiones convergentes se facilita considerablemente por muy buenas propiedades artméticas del límite.

2.11. Teorema (Propiedades aritméticas del límite). *Supongamos que* (x_n) *y* (y_n) *son sucesiones numéricas.*

(a) Si $a \in \mathbb{R}$ *y* $x_n = a$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $x_n \to a$*.*

(b) Si $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$ *entonces la sucesión* $(x_n + y_n)$ *converge a* $x + y$*.*

(c) Si $x_n \to x$ *y* $t \in \mathbb{R}$*, entonces la sucesión* (tx_n) *converge a* tx*.*

(d) Si $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$ *entonces la sucesión* $(x_n y_n)$ *converge a* xy*.*

(e) Si $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$ *mientras* $y \neq 0$ *y* $y_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces la sucesión* $(\frac{x_n}{y_n})$ *converge a* $\frac{x}{y}$*.*

A continuación examinaremos el comportamiento del límite con respecto al orden en el conjunto de los reales.

2.12. Teorema. *Supongamos que* (x_n) *es una sucesión en* $\mathbb{R}$ *y* $x_n \to a$*.*

(a) Si $b \in \mathbb{R}$ *y existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \geqslant b$*, para todo* $n \geqslant m$ *entonces* $a \geqslant b$*.*

(b) Si $b \in \mathbb{R}$ *y existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \leqslant b$*, para todo* $n \geqslant m$ *entonces* $a \leqslant b$*.*

El siguiente corolario nos muestra que el límite se comporta de manera natural con respecto al orden en $\mathbb{R}$.

2.13. Corolario. *Dadas sucesiones numéricas* (x_n) *y* (y_n) *supongamos que* $x_n \to x$ *y* $y_n \to y$*. Si, además, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \leqslant y_n$*, para todo* $n \geqslant m$*, entonces* $x \leqslant y$*.*

Si tenemos una sucesión (x_n) que converge a un punto x entonces no siempre es posible calcular exactamente el número x sabiendo solamente los números x_n. Sin embargo, si necesitamos una aproximación de x, el siguiente corolario nos muestra cómo buscar un intervalo que contiene al límite.

2.14. Corolario. *Sea (x_n) una sucesión numérica tal que $x_n \to x$. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Si, además, existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $x_n \in [a, b]$ para todo $n \geqslant m$ entonces $x \in [a, b]$.*

Ya hemos visto que los intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, de alguna manera, no dejan escapar el límite. Por otro lado, los intervalos abiertos lo rechazan.

2.15. Proposición. *Sea (x_n) una sucesión numérica tal que $x_n \to x$. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Si, además, existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $x_n \notin (a, b)$ para todo $n \geqslant m$ entonces $x \notin (a, b)$.*

A veces es muy difícil determinar si una sucesión converge o no. El siguiente teorema es un método muy poderoso para probar que una sucesión tiene límite.

2.16. Teorema (El lema del sandwich). *Dadas sucesiones numéricas (x_n) y (y_n) supongamos que $x_n \to a$ y $y_n \to a$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Si (z_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ para todo $n \geqslant m$, entonces la sucesión (z_n) es convergente y $z_n \to a$.*

Es mucho más fácil averiguar si un sucesión converge si sus términos crecen o decrecen. Por eso existe una definición particular para sucesiones de este tipo.

2.17. Definición. *Supongamos que (x_n) es una sucesión numérica.*

(a) Se dice que (x_n) es creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Se dice que (x_n) es decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) La sucesión (x_n) se llama monótona si es creciente o decreciente.

Como siempre, acompañaremos la definición de un nuevo concepto con unos ejemplos ilustrativos.

2.18. Ejemplos. (a) Hagamos $x_n = 1$ para todo índice $n \in \mathbb{N}$; esto nos da una sucesión (x_n) que es creciente y decreciente al mismo tiempo.
(b) Si $x_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión (x_n) es creciente.
(c) Sea $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en este caso, la sucesión (x_n) es decreciente.

El siguiente teorema es un método muy poderoso para determinar si una sucesión converge. A continuación veremos múltiplos ejemlpos de ello.

2.19. Teorema (de la convergencia de sucesiones monótonas). *Una sucesión monótona es convergente si y solo si es acotada.*

Si tenemos una sucesión, podemos construir muchas otras sucesiones a partir de ella. Por ejemplo, si $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ entonces la sucesión $(2, 4, 6, \ldots)$ es una parte de S. Esta idea de una sucesión que está contenida en una otra, se formaliza en la siguiente definición.

2.20. Definición. *Dada una sucesión numérica* (x_n)*, diremos que una sucesión* (y_n) *es subsucesión de* (x_n) *si existe una sucesión* (k_n) *de números naturales tal que* $k_n < k_{n+1}$ *y* $y_n = x_{k_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. De modo que también vamos a representar la sucesión* (y_n) *como* (x_{k_n})*.*

Acto seguido, revisaremos unas sucesiones y sus subsucesiones.

2.21. Ejemplos. (a) Consideremos la sucesión (x_n) tal que $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $y_n = 1$ y $z_n = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces (y_n) y (z_n) son subsucesiones de la sucesión (x_n).
(b) Sea $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(\frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{34}, \ldots)$ cuyo n-ésimo termino z_n se da por la fórmula $z_n = \frac{1}{11n+1}$, es una subsucesión de la sucesión (x_n).

Las siguientes propiedades de subsucesiones se van a utilizar mucho en este curso.

2.22. Lema. *Para cualquier subsucesión* (x_{k_n}) *de una sucesión* (x_n) *tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $k_n \geqslant n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) si $x \in \mathbb{R}$ *y* $x_n \to x$*, entonces* $x_{k_n} \to x$*.*

Cuando se trabaja con las sucesiones, se necesita expresar el hecho de que un número infinito de términos de una sucesión (x_n) se encuentran muy cerca de un punto a, es decir, la sucesión *se acumula* alrededor del punto a.

2.23. Definición. *Dada una sucesión numérica* (x_n) *diremos que un punto* $a \in \mathbb{R}$ *es punto de acumulación de* (x_n) *si para cualesquiera* $\varepsilon > 0$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *existe* $n \geqslant m$ *tal que* $|x_n - a| < \varepsilon$*.*

El siguiente teorema relaciona los puntos de acumulación de una sucesión con sus subsucesiones convergentes.

2.24. Teorema (Caracterización de los puntos de acumulación). *Dada una sucesión numérica* (x_n)*, para cualquier punto* $a \in \mathbb{R}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) a *es un punto de acumulación de la sucesión* (x_n)*;*

(b) el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\} = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon\}$ *es infinito para cualquier* $\varepsilon > 0$*;*

(c) existe una subsucesión (x_{k_n}) *de la sucesión* (x_n) *tal que* $x_{k_n} \to a$*.*

El teorema que formulamos a continuación es un hecho fundamental del Análisis. La respectiva propiedad de las sucesiones acotadas de hecho expresa una propiedad topológica (llamada compacidad) de los intervalos $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

2.25. Teorema. *Cada sucesión acotada tiene un punto de acumulación.*

Ya hemos visto que existen sucesiones acotadas divergentes. Sin embargo, de cada sucesion acotada se puede extraer una subsucesión convergente.

2.26. Corolario. *Cada sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Como antes, apoyaremos nuestra percepción del nuevo concepto con unos ejemplos de sucesiones y sus puntos de acumulación.

2.27. Ejemplos. (a) Sea $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$ son los únicos posibles puntos de acumulación para la sucesión (x_n).
(b) Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Entonces todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación para la sucesión (q_n).
(c) Si $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $a = 0$ es el único punto de acumulación de la sucesión (x_n).
(d) Hagamos $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces la sucesión (x_n) no tiene puntos de acumulación.

Para formular el teorema más importante de este capítulo necesitaremos el concepto de una sucesión de Cauchy. Intuitivamente, una sucesión es de Cauchy si sus términos se vuelven tan cercanos como queramos a partir de cierto índice.

2.28. Definición. *Una sucesión numérica (x_n) es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_k| < \varepsilon$ para cualesquiera $n, k \geqslant m$.*

El siguiente teorema clásico es el resultado principal de este Capítulo. Su importancia se debe al hecho de que presenta un criterio de convergencia de sucesiones arbitrarias.

2.29. Teorema (Criterio de Cauchy). *Una sucesión numérica es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

También se puede obtener un criterio de convergencia si analizamos el conjunto de los puntos de acumulación de una sucesión. Para esto son muy útiles los conceptos del límite superior e inferior.

2.30. Definición. *Dada una sucesión numérica (x_n) supongamos que el conjunto A de los puntos de acumulación de (x_n) es no vacío. Si existe $M = sup(A)$, entonces el número M se llama el límite superior de la sucesión (x_n); dicho límite superior se denota por $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ó simplemente $\limsup x_n$. Si existe $m = \inf(A)$, entonces el número m se llama el límite inferior de la sucesión (x_n); dicho límite inferior se denota por $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ó simplemente $\liminf x_n$.*

A continuación veremos cómo son los límites superior e inferior para algunas sucesiones concretas.

2.31. Ejemplos. (a) Si $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existen los límites superior e inferior para la sucesión (x_n) y, además, $\limsup x_n = 1$ y $\liminf x_n = -1$.
(b) Hagamos $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces existen los límites superior e inferior para la sucesión (x_n). Además, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Sea $x_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el límite superior de la sucesión (x_n) no existe y tampoco existe $\liminf x_n$.
(d) Tomemos una numeración $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales. Entonces, para la sucesión (x_n) no existe el límite superior ni el límite inferior.

El siguiente teorema nos da otro criterio de convergencia de sucesiones en términos de los límites superiores e inferiores.

2.32. Teorema. *Supongamos que (x_n) es una sucesión acotada. Entonces*
(a) existe tanto el límite superior como el límite inferior de la sucesión (x_n);
(b) la sucesión (x_n) es convergente si y solo si $\limsup x_n = \liminf x_n$.

Para finalizar este capítulo veremos unos ejemplos clásicos de sucesiones convergentes. Para la mayoría de estos ejemplos no es nada fácil demostrar su convergencia.

2.33. Ejemplos. (a) Dado cualquier $p > 0$, hagamos $x_n = \frac{1}{n^p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces $x_n \to 0$.
(b) Si p es un número positivo y $y_n = \sqrt[n]{p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $y_n \to 1$.
(c) Sea $z_n = \sqrt[n]{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces $z_n \to 1$.
(d) Dados cualesquiera $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ hagamos $u_n = \frac{n^\alpha}{(1+p)^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces $u_n \to 0$.
(e) Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$ sea $v_n = x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$; entonces $v_n \to 0$.

Ejercicios del Capítulo 2.

2.A. Ejercicio. *Dada una sucesión convergente (x_n) hagamos $y_n = x_n - x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión (y_n) converge a cero.*

2.B. Ejercicio. *Supongamos que (x_n) es una sucesión monótona y una subsucesión de (x_n) converge. Probar que la sucesión (x_n) es convergente.*

2.C. Ejercicio. *Supongamos que (x_n) es una sucesión que converge a cero y (y_n) es una sucesión acotada. Probar que la sucesión $(x_n y_n)$ converge a cero.*

2.D. Ejercicio. *Supongamos que $S = (x_n)$ es una sucesión convergente y $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; sea a el límite de S. Hagamos $y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión (y_n). Demostrar que si $a \neq 0$ entonces (y_n) es una sucesión convergente y su límite es 1.*

2.E. Ejercicio. *Dar un ejemplo de una sucesión convergente (x_n) tal que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $(\frac{x_n}{x_{n+1}})$ es divergente.*

2.F. Ejercicio. *Dada una sucesión convergente (x_n) hagamos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que $\sup(A) \in A$ y $\inf(A) \in A$.*

2.G. Ejercicio. *Supongamos que* (x_n) *es una sucesión convergente y* $x_n \to a$. *Probar que* $|x_n| \to |a|$.

2.H. Ejercicio. *Supongamos que* (x_n) *y* (y_n) *son sucesiones acotadas. Demostrar que* $\lim\,\inf(x_n) + \lim\,\inf(y_n) \leqslant \lim\,\inf(x_n + y_n)$.

2.I. Ejercicio. *Supongamos que* (x_n) *y* (y_n) *son sucesiones acotadas. Demostrar que* $\lim\,\sup(x_n + y_n) \leqslant \lim\,\sup(x_n) + \lim\,\sup(y_n)$.

2.J. Ejercicio. *Sea* $x_n = \text{sen}(\frac{n\pi}{4})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Hallar todos los puntos de acumulación de la sucesión* (x_n).

2.K. Ejercicio. *Sea* $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *es creciente y acotada.*

2.L. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{\text{sen}(n)}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que* $x_n \to 0$.

2.M. Ejercicio. *Dado un número* $a \in (-1, 1)$ *hagamos* $x_n = 1 + a + \ldots + a^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.N. Ejercicio. *Hagamos* $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. *Probar que la sucesión* (x_n) *es divergente.*

2.O. Ejercicio. *Sea* $x_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.P. Ejercicio. *Sea* $x_n = \frac{2n^2+n+1}{4n^2+3}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.Q. Ejercicio. *Sea* $x_n = \sqrt[n]{7n^2 + 1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.R. Ejercicio. *Sea* $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.S. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{2^n + n^3}{3^n + n^2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.T. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{7^n + 3^n}{2^n + 5^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.U. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que* $x_n \to 0$.

2.V. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que* $x_n \to 0$.

2.W. Ejercicio. *Sea* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que* $x_n \to 0$.

2.X. Ejercicio. *Consideremos la sucesión* $(\sqrt{3},\ \sqrt{3+\sqrt{3}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ldots)$. *En otras palabras, para nuestra sucesión* (x_n) *tenemos las igualdades* $x_1 = \sqrt{3}$ *y* $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Probar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.Y. Ejercicio. *Considere la sucesión* $(3,\ 3+\frac{1}{3},\ 3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}},\ldots)$. *En otras palabras, para nuestra sucesión* (x_n) *tenemos que* $x_1 = 3$ *y* $x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Probar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

2.Z. Ejercicio. *Hagamos* $x_1 = 1$ *y* $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Probar que la sucesión* (x_n) *converge y hallar su límite.*

3. Series Numéricas.

En las matemáticas y sus aplicaciones con frecuencia surge la necesidad de analizar sumas que tienen un número infinito de términos. Dada una suma infinita, normalmente se tiene que determinar qué tan análogas son sus propiedades con respecto a las sumas finitas. Veremos que los métodos que hemos desarrollado para trabajar con sucesiones convergentes permiten construir una teoría rigurosa de sumas infinitas mismas que se llaman *series.*

3.1. Definición. *Una serie numérica es una expresión formal de tipo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, donde* $a_n \in \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*; los números* a_n *se llaman términos de la serie. La expresión* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *es otra manera de representar la misma serie. Además, no es necesario empezar la sumación con el índice uno; en particular, la expresión* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ *también es una forma válida de definir una serie misma que se puede representar también por medio de la expresión* $a_k + a_{k+1} + \ldots$ *para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*.*

3.2. Comentario. Obsérvese que una serie es una *expresión formal* y no una suma infinita. De hecho, las sumas infinitas no existen ni tienen sentido. Sin embargo, cualquier subconjunto finito del conjunto de los términos de una serie forma una suma finita misma que tiene sentido y se puede usar como aproximación de lo que debería ser la suma de la serie.

3.3. Ejemplos. (a) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$; aquí, evidentemente, $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, todos los términos de nuestra serie son iguales a 1 así que $1 + 1 + 1 + \ldots$ es la otra forma de escribirla.

(b) Si $a_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede escribirse como $\sum_{n=1}^{\infty} n$; en este caso $1 + 2 + 3 + \ldots$ es la forma alternativa para presentar la misma serie.

(c) Si nos fijamos en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ entonces $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ es la forma alternativa formal; sin embargo $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ es la manera equivalente más común para representar esta serie.

(d) Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la expresión $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ es su forma alternativa.

(e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ se puede representar tanto en la forma $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots$ como por medio de la expresión $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ misma que es una alternativa equivalente.

Nuestro siguiente paso es definir cuándo una serie puede tratarse como una suma y cómo asignarle de manera natural, un número a esta suma.

3.4. Definición. *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *hagamos* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}$; *el número* S_n *se llama la* n*-ésima suma parcial de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

La suma de una serie no siempre se puede definir; en este caso se dice que la suma no existe. En el caso de existencia de la suma de la serie, las sumas parciales forman sus aproximaciones.

3.5. Definición. *Se dice que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge (o es convergente) si la sucesión* (S_n) *de sus sumas parciales tiene un límite* S. *En este caso se dice que la suma de la serie es igual a* S *y (faltando de cierta manera a la rigurosidad porque se indentifica la serie con su suma) se escribe que* $\sum_{i=1}^{\infty} a_n = S$.

3.6. Ejemplos. (a) Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$; si $n \in \mathbb{N}$ y S_n es su n-ésima suma parcial entonces $S_n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n$ por lo cual dicha serie es divergente.

(b) En el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ tenemos que $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto, nuestra serie es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$.

(c) Veamos lo que pasa con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; observemos primero que tenemos la igualdad $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí es fácil ver que $S_n = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto nuestra serie converge y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(d) Si se trata de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tenemos que $a_n = \frac{1}{n^2} < b_n = \frac{1}{n(n+1)}$; además, si $T_n = b_1 + \ldots + b_n$ entonces $S_n < T_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión (S_n) de las sumas parciales de nuestra serie es creciente; como $0 < S_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, las sumas parciales forman una sucesión monótona y acotada así que nuestra serie converge.

(e) Finalmente, fijémonos en la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; como $S_n = -1$ para cualquier n impar y $S_n = 0$ si n es par, nuestra serie es divergente.

La indexación de los términos de una serie no tiene por que empezar con $n = 1$. En este curso seguimos la tradición de demostrar los teoremas para las series cuyos términos tienen índices de 1 a infinito. Sin embargo es posible empezar con cualquier otro índice y nada cambiará en la teoría.

3.7. Observación. *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, se pueden dar definiciones análogas de las sumas parcilaes y de la convergencia de las series* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

Las series se estudian aparte de las sucesiones porque tienen múltiples aplicaciones tanto en las matemáticas como en otras áreas del conocimiento. Sin embargo, la definición de la convergencia de una serie se traduce automáticamente en un enunciado sobre convergencia de una sucesión. La siguiente observación muestra que la teoría de la convergencia de sucesiones y la teoría de la convergencia de series básicamente son lo mismo.

3.8. Observación. *Cualquier teorema sobre convergencia de series puede formularse como un teorema sobre convergencia de sucesiones y viceversa.*

Ya estamos listos para estudiar las propiedades más importantes de las series.

3.9. Proposición (Propiedades aritméticas de las series). *Supongamos que tenemos series convergentes* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, *entonces*

(a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge y* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$;

(a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *converge y* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = a - b$;

(c) para todo $t \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ta_n$ *converge y* $\sum_{n=1}^{\infty} ta_n = ta$.

El siguiente criterio de convergencia de series es una consecuencia fácil del Criterio de Cauchy de convergencia de sucesiones.

3.10. Teorema (Criterio de Cauchy de convergencia de series). *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $p, k \in \mathbb{N}$ con $m \leqslant p < k$ se tiene que* $\left|\sum_{n=p+1}^{k} a_n\right| < \varepsilon$.

A veces es es conveniente utilizar el Criterio de Cauchy en la siguiente forma.

3.11. Corolario. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para cualesquiera* $p \geqslant m$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\left| \sum_{n=p+1}^{p+k} a_n \right| < \varepsilon$.

A continuación presentamos la condición necesaria más importante de convergencia de series. Es muy fácil verificar si se cumple esta condición lo cual, en muchos casos, ayuda a descartar de inmediato la convergencia de una serie.

3.12. Corolario (Condición necesaria de convergencia de series). *Si una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $a_n \to 0$.

Es lógico preguntarnos si la condición necesaria anterior también es suficiente para la convergencia de una serie. Resulta que no es así.

3.13. Ejemplo. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente. Por lo tanto es posible que* $a_n \to 0$ *mientras la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *no es convergente.*

Si todos los términos de una serie son no negativos entonces tenemos un criterio de su convergencia mucho más fácil de aplicar.

3.14. Teorema. *Si* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si la sucesión* (S_n) *de sus sumas parciales es acotada.*

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mucha información sobre su convergencia se puede obtener si analizamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. La siguiente definición presenta un concepto que surge de dicha idea.

3.15. Definición. *Se dice que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

La definición anterior deja entrever que la convergencia absoluta de series es un concepto más fuerte que su convergencia. A continuación lo vamos a comprobar.

3.16. Ejemplos. (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolutamente.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente pero no converge absolutamente.

De modo que hay series que convergen sin converger absolutamente. Ahora vamos a cerciorarnos de que la convergencia absoluta implica la convergencia.

3.17. Proposición. *Si una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, entonces es convergente.*

Un método importante para averiguar si una serie converge es compararla de alguna manera con una serie estándar de la cual ya se sabe todo sobre su convergencia. El siguiente teorema formaliza esta idea.

3.18. Teorema (de la comparación de series). *Supongamos que* (a_n) *y* (c_n) *son sucesiones numéricas.*

(a) Si existe $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n| \leqslant c_n$ *para todo* $n \geqslant m$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(b) Si existe $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \geqslant c_n \geqslant 0$ *para todo* $n \geqslant m$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *es divergente, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tambien es divergente.*

El siguiente teorema nos presenta una clase de series estándares que son muy útiles para verificar la convergencia de una serie arbitraria. Recuerde que una serie se llama *progresión geométrica* si tiene la forma $1 + x + \ldots + x^n + \ldots$ para algún $x \in \mathbb{R}$. Dicha serie también se puede denotar por $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; observe que la indexación de sus términos comienza con cero.

3.19. Teorema. *Dado cualquier número* $x \in \mathbb{R}$*, la progresión geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *es convergente si y solo si* $|x| < 1$*. En este caso* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ya estamos listos para definir el número e que es uno de los más importantes en matemáticas. Recuerde que $0! = 1$ y $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

3.20. Teorema–Definición. *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *es convergente; de aquí en adelante su suma se denotará por* e. *En otras palabras,* $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Hay otra forma, también muy común de representar el número e. No es nada trivial que las dos representaciones son equivalentes.

3.21. Teorema. *Hagamos* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces la sucesión* (a_n) *es convergente y* $a_n \to e$.

Acto seguido vamos a probar otro criterio más de convergencia de series con términos positivos. Dicho criterio es un método muy poderoso para probar que ciertas series convergen.

3.22. Teorema (El Criterio de Condensación). *Supongamos que* $a_n \geqslant 0$ *y* $a_{n+1} \leqslant a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots$ *es convergente.*

El siguiente teorema es muy difícil de demostrar directamente. En cambio, es relativamente fácil deducirlo del Criterio de Condensación.

3.23. Teorema. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *es convergente si y sólo si* $p > 1$.

Si se trata de series cuyos términos pueden ser negativos, hay relativamente pocos los teoremas que dan herramientas para analizarlas. Para el caso, cuando los signos de los términos de una serie se alternan, es muy útil el siguiente resultado clásico de Leibnitz.

3.24. Teorema (El Criterio de Leibnitz). *Supongamos que* $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si además,* $a_n \to 0$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *es convergente.*

Ya tenemos métodos bastante fuertes para poder averiguar si una serie converge. A continuación veremos como se aplican en situaciones concretas.

3.25. Ejemplos. (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{3^n - 2^n}}$ es divergente.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$ es convergente.

(c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

(d) Hagamos $a_{2n-1} = 2^{-2n+1}$ y $a_{2n} = \frac{1}{2n}$, para cualquier número $n \in \mathbb{N}$. Los signos de los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ se alternan y $a_n \to 0$. Sin embargo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es divergente. Esto muestra que en el Criterio de Leibnitz no se puede omitir el hecho de que la sucesión (a_n) sea decreciente.

Los dos últimos teoremas de este capítulo son resultados famosos de Cauchy y D'Alembert. Dichos teoremas nos brindan condiciones suficientes para la convergencia absoluta de series. Empezeremos con la condición suficiente de Cauchy misma que a veces se llama *el criterio de la raíz.*

3.26. Teorema (Condición Suficiente de Cauchy). *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *supongamos que existe* $\alpha = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) Si $\alpha < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(b) Si $\alpha > 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(c) Si $\alpha = 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *puede ser convergente ó divergente.*

La condición suficiente de D'Alembert que presentamos a continuación, en algunos libros se llama *el criterio del cociente.* De hecho la condición suficiente de Cauchy es más fuerte pero para series cuyos términos contienen factoriales y potencias conviene más utilizar el resultado de D'Alembert.

3.27. Teorema (Condición Suficiente de D'Alembert). *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y existe* $\alpha = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$.

(a) Si $\alpha < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

(b) Si $\alpha > 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(c) Si $\alpha = 1$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *puede ser convergente ó divergente.*

Finalmente, veamos algunos ejemplos que ilustran como funcionan los métodos que se desarrollaron en este capítulo.

3.28. Ejemplos. (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$ es convergente; aquí tenemos una ilustración de la idea de que el denominador crece mucho más rápido que el numerador.

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ converge; en este caso podemos ver la fuerza de la Condición Suficiente de Cauchy.

(c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge; esto se puede probar utilizando la Condición Suficiente de D'Alembert.

(d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ también es convergente. Una vez más nos ayuda la Condición Suficiente de D'Alembert.

(e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right)$ es divergente. Es una ilustración más de que en el Criterio de Leibnitz, no se puede omitir la condición de que la sucesión de los términos de la serie sea decreciente.

(f) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ es divergente. Para demostrarlo es aplicable el Criterio de Condensación.

(g) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ es convergente. Aquí también es de mucha ayuda el Criterio de Condensación.

Ejercicios del Capítulo 3.

3.A. Ejercicio. *Para una sucesión numérica* (a_n) *se sabe que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *es convergente. Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ *también es convergente.*

3.B. Ejercicio. *Se tienen sucesiones numéricas* (a_n) *y* (b_n) *tales que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *convergen. Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ *también converge.*

3.C. Ejercicio. *Dar un ejemplo de una serie convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ *sea divergente.*

3.D. Ejercicio. *Supongamos que* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente. Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ *también es convergente.*

3.E. Ejercicio. *Supongamos que* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente. Hagamos* $c_n = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Será convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$*?*

3.F. Ejercicio. *Probar que la serie*

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n+1}\tfrac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

es convergente y hallar su suma.

3.G. Ejercicio. *Probar que la serie*

$$1 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^4 - (\tfrac{1}{2})^6 + \ldots + (-1)^{n+1}(\tfrac{1}{2})^{2n-2} + \ldots$$

es convergente y hallar su suma.

3.H. Ejercicio. *Probar que la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$ *es convergente y hallar su suma.*

3.I. Ejercicio. *Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ *es convergente y hallar su suma.*

3.J. Ejercicio. *Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *es convergente y hallar su suma.*

3.K. Ejercicio. *Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(n)}{n^2}$ *converge absolutamente.*

3.L. Ejercicio. *Averiguar si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ *es convergente.*

3.M. Ejercicio. *Averiguar si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ *es convergente.*

3.N. Ejercicio. *¿La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ *será convergente?*

3.O. Ejercicio. *¿Es cierto que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *es convergente?*

3.P. Ejercicio. *Averiguar si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ *converge.*

3.Q. Ejercicio. *Averiguar si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ *es convergente.*

3.R. Ejercicio. *Considere la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ *para averiguar si es convergente.*

3.S. Ejercicio. *¿Es cierto que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$ *es convergente?*

3.T. Ejercicio. *¿La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ *será convergente?*

3.U. Ejercicio. *Dada la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$*, averiguar si es convergente.*

3.V. Ejercicio. *Averiguar si la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ *es convergente.*

3.W. Ejercicio. *Considere la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$ *para ver si es convergente.*

3.X. Ejercicio. *¿Será convergente la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^3}$*?*

3.Y. Ejercicio. *Considerar la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$ *para comprobar o descartar su convergencia.*

3.Z. Ejercicio. *¿La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ *será convergente?*

4. Topología de $\mathbb{R}$.

En este capítulo estudiaremos las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$ y sus subconjuntos. Para desarrollar la teoría de funciones continuas y de integración vamos a necesitar muchos conceptos de la topología de los reales. En particular, introduciremos y estudiaremos conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, cerradura e interior. El reusltado principal de este capítulos es el famoso teorema de clasificación de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

El concepto clave es el de conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Por medio de las propiedades de los abiertos veremos cómo representar rigurosamente la idea de que un punto está "cerca" de un conjunto; de esta idea se desprende casi toda la teoría de funciones continuas.

4.1. Definición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama abierto si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. En otras palabras, un conjunto es abierto si cada punto suyo pertenece a un intervalito contenido en A. Intuitivamente, esto significa que si un abierto contiene a un punto x, entonces contiene a todos los puntos suficientemente cercanos a x. De modo que los puntos que están fuera de un abierto se encuentran "lejos" de los puntos de este abierto.*

¿Y qué tal si un conjunto A no tiene puntos? En este caso ningún punto de A presenta contradicción con la definición de abierto. Ya hace más de cien años que los matemáticos acordaron que si no hay contradicción a un enunciado entonces éste se considera válido. De modo que es válida la siguiente observación.

4.2. Observación. *El conjunto vacío es abierto.*

A continuación vamos a presentar la definición de los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Veremos que hay mucha dualidad entre las propiedades de abiertos y cerrados pero esa dualidad no es una simetría.

4.3. Definición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama cerrado si $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto.*

Como siempre, describiremos unos ejemplos para dar una idea de cómo son algunos abiertos y cerrados concretos.

4.4. Ejemplos. (a) El conjunto $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado al mismo tiempo.

(b) El conjunto vacío es abierto y cerrado al mismo tiempo.

(c) El conjunto $\{x\}$ es cerrado pero no abierto para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces el intervalo (a, b) es abierto pero no cerrado.

(e) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leqslant b$ entonces el intervalo $[a, b]$ es cerrado pero no abierto.

(f) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es abierto ni cerrado.

(g) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces el intervalo $(a, b]$ no es abierto ni cerrado.

(h) $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado pero no abierto.

Ya es tiempo de formular las propiedades más importantes de los conjuntos abiertos y cerrados.

4.5. Teorema. *(a) Cualquier unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
(b) Toda intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(c) Cualquier intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(d) Toda unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

El concepto de vecindad que presentamos a continuación expresa de manera formal la idea de que un punto (o un conjunto) está muy dentro del otro, es decir dentro de la vecindad.

4.6. Definición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama vecindad de un punto $x \in \mathbb{R}$ si existe un abierto $V \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in V \subset A$. Se dice que A es vecindad de un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ si existe un abierto $W \subset \mathbb{R}$ tal que $B \subset W \subset A$.*

Veamos para algunos conjuntos concretos, cómo son sus vecindades.

4.7. Ejemplos. Supongamos que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < c < d < b$. *Entonces*
(a) el conjunto $[a, b]$ es una vecindad de cada punto $x \in (a, b)$;
(b) el conjunto (a, b) es una vecindad de cada punto $x \in (a, b)$;
(c) el conjunto $[a, b]$ es una vecindad del conjunto $[c, d]$.

Es fácil ver a partir de la definición que un conjunto abierto U es vecindad de cada punto $x \in U$. Resulta que lo recíproco también es cierto mismo que nos da el siguiente criterio útil para checar si un conjunto es abierto.

4.8. Proposición (Criterio para que un conjunto sea abierto). *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si y solo si A es una vecindad de cada punto $x \in A$.*

A continuación vamos a definir el interior de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Intuitivamente, el interior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se puede percibir como el abierto más grande contenido en A.

4.9. Definición. *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Int}(A) = \bigcup\{U : U$ es abierto y $U \subset A\}$; el conjunto $\operatorname{Int}(A)$ se llama el interior del conjunto A.*

El interior de un conjunto A muestra la parte "maciza" de A; en los ejemplos que siguen veremos que el interior de A puede uncluso ser vacío o coincidir con todo el conjunto A.

4.10. Ejemplos. (a) Si $x \in \mathbb{R}$ y $A = \{x\}$ entonces $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.
(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $\operatorname{Int}(A) = (a, b)$.
(c) Si $A = \mathbb{Q}$ entonces $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

Como el interior de un conjunto A se expresa como unión de los abiertos contenidos en A, no es de extrañarse que obtengamos otro criterio en términos del interior, para que un conjunto sea abierto.

4.11. Proposición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si y solo si $A = \operatorname{Int}(A)$.*

El concepto de cerradura que introducimos a continuación parece muy formal y artificial. Sin embargo, veremos que expresa la noción intuitiva de que un punto esta "muy cerca" de un conjunto.

4.12. Definición. *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{A} = \bigcap\{F : F \subset \mathbb{R},\ F$ es cerrado y $A \subset F\}$. El conjunto $\overline{A}$ se llama la cerradura de A.*

De la definición se ve en seguida que la cerradura de cualquier conjunto A contiene a A. Veamos, en unos ejemplos concretos, cuántos puntos tenemos que agregarle a A para obtener el conjunto $\overline{A}$.

4.13. Ejemplos. (a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

(b) La cerradura de los racionales coincide con $\mathbb{R}$; en otras palabras, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(c) Si nos fijamos en la sucesión $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ entonces para obtener su cerradura, le tenemos que agregar su límite, es decir, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(d) El conjunto de los naturales coincide con su cerradura, o sea, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

La operación de pasar de un conjunto a su interior se aplica con frecuencia cuando se trabaja con las nociones topoloógicas. Resulta que esta operación tiene muy buenas propiedades con respecto a operaciones conjuntistas.

4.14. Teorema (Las propiedades del interior). *(a) Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\mathrm{Int}(A) \subset A$.*

(b) El conjunto $\mathrm{Int}(A)$ es abierto para todo $A \subset \mathbb{R}$.

(c) Si $A \subset B$, entonces $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

(d) Dado cualquier $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$.

(e) Tenemos la igualdad $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ para cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}$.

(f) Dados cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

(g) Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

La operación de pasar de un conjunto a su cerradura es dual a la toma del interior. Por eso es de esperarse que la cerradura tenga propiedades parecidas a las del interior. Cercioremonos de que en efecto, es así.

4.15. Teorema (Las propiedades de la cerradura). *(a) Para todo $A \subset \mathbb{R}$ tenemos que $A \subset \overline{A}$.*

(b) Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

(c) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

(d) Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(e) Para todo $A \subset \mathbb{R}$ tenemos la igualdad $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(f) Para cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(g) La contención $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ tiene lugar para todos $A, B \subset \mathbb{R}$.

(h) Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión (a_n) de elementos de A tal que $a_n \to x$.

Recuérdese que hemos definido el concepto de punto de acumulación de una sucesión. Resulta que se puede formalizar la misma idea de acumularse alrededor de un punto no sólo para sucesiones sino también para conjuntos arbitrarios.

4.16. Definición. *Dado cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a \neq x$ y $|a - x| < \varepsilon$. El conjunto de los puntos de acumulación de A se denota por A^d. Un punto $a \in A$ se llama aislado (o aislado en A) si a no es punto de acumulación de A, es decir, $a \in A \setminus A^d$.*

Obsérvese que un punto de acumulación de A no necesariamente pertenece a A mientras un punto aislado de A es obligatoriamente un elemento de A.

4.17. Ejemplos. (a) Dados cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, si $A = (a, b)$, entonces $A^d = [a, b]$. En particular, ningún $a \in A$ es un punto aislado de A.
(b) El conjunto $\mathbb{N}$ no tiene puntos de acumulación y por lo tanto cada $n \in \mathbb{N}$ es un punto aislado de $\mathbb{N}$.
(c) Todo $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales; en particular, $\mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados.
(d) Si $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $A^d = \{0\}$; de modo que A tiene un punto de acumulación mientras todos los puntos de A son aislados en A.

A continuación probaremos un criterio útil para que un conjunto sea cerrado; dicho criterio se formulará en términos de sucesiones convergentes y puntos de acumulación.

4.18. Teorema (Criterio para que un conjunto sea cerrado). *Las siguientes condiciones son equivalentes para todo $A \subset \mathbb{R}$.*
(a) el conjunto A es cerrado;
(b) cada punto de acumulación de A pertenece a A, es decir, $A^d \subset A$;
(c) si (a_n) es una sucesión con $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to x$, entonces $x \in A$;
(d) si (a_n) es una sucesión tal que $a_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión (a_n) pertenecen a A.

Ya estamos en posición de definir el concepto de conjunto compacto. Esta noción es una de las más importantes en las matemáticas. En este curso veremos cómo se aplica para analizar funciones continuas.

4.19. Definición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se llama compacto si toda sucesión (a_n) tal que $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tiene un punto de acumulación que pertenece a A.*

Como siempre, vamos a ilustrar la nueva noción proporcionando algunos ejemplos de conjuntos compactos y no compactos.

4.20. Ejemplos. (a) El conjunto $\mathbb{N}$ no es compacto.
(b) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los número racionales no es compacto.
(c) El conjunto $\mathbb{R}$ no es compacto.
(d) El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los irracionales tampoco es compacto.
(e) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leqslant b$, entonces el conjunto $[a, b]$ es compacto.
(f) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ el intervalo (a, b) no es compacto.

(g) El conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.
(h) Si $A \subset \mathbb{R}$ es finito, entonces el conjunto A es compacto.

Nuestro siguiente paso es demostrar una caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que incluye los famosos theoremas de Heine–Borel y de Bolzano–Weierstrass. Necesitamos primero un concepto técnico que hace más legible el teorema de Bolzano–Weierstrass.

4.21. Definición. *Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llama cubierta de un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ si $K \subset \bigcup \mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una cubierta de K, entonces una familia $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ se llama subcubierta de K si $\mathcal{E}$ también es cubierta de K, es decir, $K \subset \bigcup \mathcal{E}$. Una cubierta $\mathcal{C}$ de un conjunto K se llama abierta si todos los elementos de $\mathcal{C}$ son conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.*

Ahora sí, vamos a formular el prometido criterio de compacidad.

4.22. Teorema (Tres caracterizaciones de la compacidad). *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier $K \subset \mathbb{R}$:*

(a) el conjunto K es compacto;
(b) el conjunto K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$;
(c) si un conjunto A es infinitio y $A \subset K$, entonces A tiene un punto de acumulación que pertence a K;
(d) Cada cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.

La equivalencia de los incisos (a) y (d) es un famoso teorema de Heine–Borel; el enunciado que dice que (a) y (c) son equivalentes es un teorema (que es igual de famoso) de Bolzano–Weierstrass.

En el resto de este capítulo estudiaremos otro concepto clásico de topología considerado sólo para los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Sus aplicaciones se verán en el siguiente capítulo.

4.23. Definición. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es disconexo si existen conjuntos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}$ tales que:*

(a) $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$;
(b) $A \subset U \cup V$;
(c) $U \cap V \cap A = \emptyset$.

Si A no es disconexo, entonces se llama conexo.

Como sucede con frecuencia, la definición formal no da una idea inmediata del significado intuitivo y geométrico de la conexidad. Sin embargo, este concepto es muy fácil de visulizar. Un conjunto conexo debe percibirse como algo que no se deja representar como unión de dos partes alejadas una de la otra. En otras palabras, un conjunto conexo se tiene que pensar como algo “sólido” o “macizo”.

El siguiente grupo de ejemplos nos ayudará a entender mejor cómo son subconjuntos conexos y disconexos de $\mathbb{R}$.

4.24. Ejemplos. (a) El conjunto $\{x\}$ es conexo para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $[a, b]$ es conexo.
(c) El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es disconexo.
(d) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es disconexo.
(e) El conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es disconexo.
(f) $A = [1, 2] \cup [3, 4]$ es disconexo.

Cabe mencionar, que todas las nociones de topología (conjuntos abiertos, cerrados, compactos, conexos etc.) también se pueden definir en el plano $\mathbb{R}^2$ y, en general, en los espacios $\mathbb{R}^n$. Resulta que es practicamente imposible dar una descripción de todos los subconjuntos conexos del plano $\mathbb{R}^2$, pero la situación se simplifíca mucho en el caso de $\mathbb{R}$.

4.25. Definición. *Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama intervalo si el intervalo cerrado $[x, y]$ está contenido en I para cualesquiera $x, y \in I$. Recuerde que sólo hay nueve tipos de intervalos en $\mathbb{R}$ mismos que se separan en dos grupos. El primer grupo consiste de intervalos infinitos; un intervalo I es infinito si $I = \mathbb{R}$ o bien existe $a \in \mathbb{R}$ tal que I es uno de los conjuntos de la lista $\{(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty)\}$. El segundo grupo consiste de intervalos finitos; un intervalo I es finito si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leqslant b$ e I pertenece a la lista $\{(a, b], [a, b], [a, b), (a, b)\}$.*

Para terminar este capítulo presentamos el siguiente teorema que nos brinda una clasificación completa de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

4.26. Teorema. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y solo si A es un intervalo.*

Ejercicios del Capítulo 4.

4.A. Ejercicio. *Demostrar que cualquier conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ es no numerable.*

4.B. Ejercicio. *Dado un punto $x \in \mathbb{R}$ y un conjunto abierto $U \ni x$ demostrar que existe un abierto $V \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

4.C. Ejercicio. *Hagamos $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b \text{ y } a, b \in \mathbb{Q}\}$. Demostrar que para cualquier conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ existe una familia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{B}'$.*

4.D. Ejercicio. *Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto $U + A = \{x + a : x \in U, \ a \in A\}$ es abierto para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$.*

4.E. Ejercicio. *Dado cualquier conjunto abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}$ demostrar que $\mathbb{Q} + U = \{q + x : q \in \mathbb{Q}, \ x \in U\} = \mathbb{R}$.*

4.F. Ejercicio. *Supongamos que U_n es abierto y $\mathbb{N} \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{N} \subset U$ y $U_n \setminus U \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

4.G. Ejercicio. *Supongamos que $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos no vacíos de $\mathbb{R}$ tal que $U \cap V = \emptyset$ en cuanto U y V sean elementos distintos de $\mathcal{U}$. Probar que $\mathcal{U}$ es una familia numerable.*

4.H. Ejercicio. *Supongamos que $U \subset \mathbb{R}$ es abierto y $A \subset \mathbb{R}\backslash U$. Demostrar que $\overline{A} \cap U = \emptyset$.*

4.I. Ejercicio. *Dado cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ probar que $\overline{A} = \mathbb{R}$ si y sólo si $A \cap U \neq \emptyset$ para todo conjunto abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}$.*

4.J. Ejercicio. *Un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ se llama abierto regular si $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$. Dados abiertos regulares $U, V \subset \mathbb{R}$ demostrar que $U \subset V$ si y sólo si $\overline{U} \subset \overline{V}$.*

4.K. Ejercicio. *Un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ se llama abierto regular si $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$. Para cualesquiera abiertos regulares $U, V \subset \mathbb{R}$ demostrar que $U \cap V$ es un abierto regular.*

4.L. Ejercicio. *Un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ se llama abierto regular si $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$. Dar un ejemplo de conjuntos abiertos regulares U y V tales que $U \cup V$ no sea abierto regular.*

4.M. Ejercicio. *Dado cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$ demostrar que existe un conjunto numerable $B \subset A$ tal que $\overline{A} = \overline{B}$.*

4.N. Ejercicio. *Supongamos que A_n es un subconjunto de $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que* $\overline{\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}} = \bigcup\{\overline{A_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcap\left\{\overline{\bigcup\{A_n : n \geqslant m\}} : m \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

4.O. Ejercicio. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ demostrar que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ si y sólo si $\overline{\mathbb{R}\backslash A} = \mathbb{R}$.*

4.P. Ejercicio. *Sea F un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Demostrar que se cumple la igualdad $\mathrm{Int}(F \cup A) = \mathrm{Int}(F \cup \mathrm{Int}(A))$ para todo $A \subset \mathbb{R}$.*

4.Q. Ejercicio. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ demostrar que $a \in A$ es un punto aislado de A si y sólo si existe un abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $U \cap A = \{a\}$.*

4.R. Ejercicio. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y cada $a \in A$ es un punto aislado de A. Demostrar que A es numerable.*

4.S. Ejercicio. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que todo $a \in A$ es aislado en A. Demostrar que $\overline{A}\backslash A$ es un conjunto cerrado.*

4.T. Ejercicio. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y cada $a \in A$ es un punto aislado de A. Demostrar que para cualquier abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}$ existe un abierto no vacío $V \subset U\backslash A$.*

4.U. Ejercicio. *Supongamos que N es un conjunto tal que cada punto de N es aislado en N. Demostrar que si K es compacto y $K \subset N$ entonces K es finito.*

4.V. Ejercicio. *Supongamos que $K \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto no vacío numerable. Probar que K tiene por lo menos un punto aislado.*

4.W. Ejercicio. *Sea $K \neq \emptyset$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Demostrar que el supremo de K existe y pertenece a K.*

4.X. Ejercicio. *Dados conjuntos compactos $K, L \subset \mathbb{R}$ demostrar que el conjunto $K + L = \{x + y : x \in K,\ y \in L\}$ es compacto.*

4.Y. Ejercicio. *Demostrar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si $A \cap [-n, n]$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$.*

4.Z. Ejercicio. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de condensación de A si $U \cap A$ es no numerable para cualquier abierto $U \ni x$; denotemos por A^0 el conjunto de los puntos de condensación de A. Probar que el conjunto $A \backslash A^0$ es numerable para cualquier $A \subset \mathbb{R}$.*

5. Funciones Reales Continuas

Ya es tiempo de dar inicio al estudio de funciones reales, es decir, las funciones cuyo dominio y contradominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$. La mayoría de los procesos de la naturaleza se pueden describir por medio de funciones; aunque esas funciones no necesariamente son reales, casi todas ellas se pueden modelar o son equivalentes de alguna manera a funciones reales. De modo que el estudio de funciones reales es una parte fundamental del Análisis. En este capítulo introduciremos el concepto del límite de una función y demostraremos las propiedades más importantes de las funciones reales continuas.

5.1. Definición. *Una función $f : A \to B$ se llama real si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$.*

En la mayoría de los casos, una función real f se da por una fórmula $f(x)$ compuesta de las operaciones que se tienen que efectuar sobre x para obtener $f(x)$. En este caso se utiliza la expresión $y = f(x)$ para definir la función f dada por la fórmula $f(x)$. Es una tradición en el Análisis considerar que el dominio $\mathrm{dom}(f)$ de una función $y = f(x)$ consiste de los punto x de $\mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ tiene sentido. De modo que una fórmula $f(x)$ para una función real f determina unívocamente el conjunto $\mathrm{dom}(f)$.

Es usual representar una función con su gráfica misma que ayuda mucho a visualizar el comportamiento de la función. Para definir la gráfica de una función necesitamos primero una definición rigurosa del plano que estabamos acostumbrados a percibir de manera intuitiva.

5.2. Definición. *El conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se llama el plano Cartesiano. Dado un punto $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ los números x y y se llaman las coordenadas del punto A.*

La gráfica de una función f es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Ya que tenemos la descripción exacta del plano, podemos introducir el concepto de la gráfica.

5.3. Definición. *Si f es una función real entonces el conjunto $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{dom}(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se llama la gráfica de f.*

A continuación veremos algunas funciones sencillas y sus gráficas.

5.4. Ejemplos. (a) Consideremos la función $f(x)$ tal que $f(x) = 11$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es claro que $f(x)$ tiene sentido para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo que $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. En la Figura 5.1 está la gráfica de la función $y = f(x) = 11$.

(b) Si hacemos $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces también $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. El lector seguramente ya vio esta función con frecuencia. Figura 5.2 nos muestra la gráfica de la función $y = f(x)$.

(c) La fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$ define $f(x)$ para todo x distinto de cero por lo cual $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La gráfica de la función $f(x)$ está dada en la Figura 5.3.

(d) La función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida sólo para los x no negativos de modo que $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$. El lector encontrará la gráfica de la función $y = f(x)$ en la Figura 5.4.

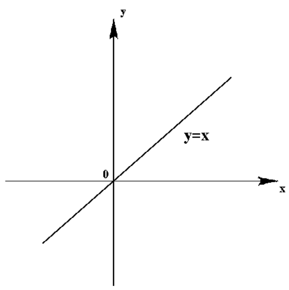

Figura 5.1

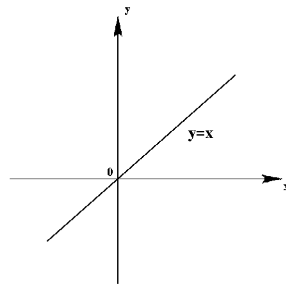

Figura 5.2

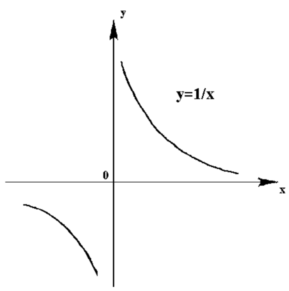

Figura 5.3

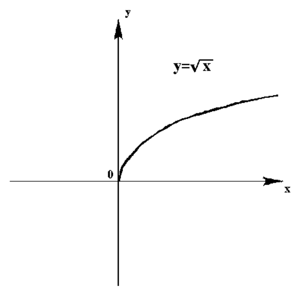

Figura 5.4

A continuación presentamos el concepto más importante de este capítulo.

5.5. Definición. *Supongamos que f una función real y a es un punto de acumulación de* $\mathrm{dom}(f)$. *Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es b si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$ con $0 < |x - a| < \delta$ tenemos que $|f(x) - b| < \varepsilon$. También se untilizará la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ para decir que el límite de $f(x)$ es b (ó $f(x)$ tiende a b) cuando x tiende a a.*

En términos intuitivos, una función $f(x)$ tiende a b cuando x tiende a a si sus valores se acercan a b cuando x se acerca a a. En otras palabras, tendremos todos los valores de $f(x)$ tan cerca de b como queramos si limitamos los valores de x a una suficientemente pequeña vecindad de a.

A veces es necesario considerar el límite de una función $f(x)$ en un punto a cuando x sólo se puede acercar a a por la derecha, es decir, cuando $x > a$.

5.6. Definición. *Supongamos que f es una función real y a es un punto de acumulación del conjunto* $\operatorname{dom}(f) \cap (a, +\infty)$. *Decimos que el límite de $f(x)$ es b cuando x tiende a a por la derecha (denotándolo por $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para cada $x \in \operatorname{dom}(f) \cap (a, a + \delta)$.*

La siguiente definición expresa formalmente la misma idea para el caso cuando x tiende a a por la izquierda.

5.7. Definición. *Supongamos que f es una función real y a es un punto de acumulación del conjunto* $\operatorname{dom}(f) \cap (-\infty, a)$. *Diremos que $f(x)$ tiende a b cuando x tiende a a por la izquierda (usando para ello la expresión $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para cada $x \in \operatorname{dom}(f) \cap (a - \delta, a)$.*

Una parte importante del análisis de una función es averiguar como se comporta "en el infinito". Aun cuando los puntos infinitos no existen, intuitivamente es claro que los valores de una función pueden acercarse idefinidamente a un número b cuando los valores de x so lo suficientemente grandes.

Para formalizar esta idea, primero tenemos que estar seguros de que el dominio de la función es apto para tener elementos "tan grandes como queramos".

5.8. Definición. *Se dice que $+\infty$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $A \cap (r, +\infty) \neq \emptyset$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Análogamente, $-\infty$ es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $(-\infty, r) \cap A \neq \emptyset$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$.*

El argumento x de una función $f(x)$ puede "ir al infinito" de dos maneras: cuando x se vuelve más grande, o respectivamente, más pequeño que cualquier número dado. En el primer caso se dice que x tiende a más infinito.

5.9. Definición. *Dada una función $f(x)$ tal que $+\infty$ es punto de acumulación de* $\operatorname{dom}(f)$, *se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es b (esto se escribe como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \operatorname{dom}(f) \cap [r, +\infty)$ se tiene que $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Si el argumento x de una función $f(x)$ se vuelve más pequeño que cualquier número dado, se dice que x tiende a menos infinito.

5.10. Definición. *Dada una función $f(x)$ tal que $-\infty$ es punto de acumulación de* $\operatorname{dom}(f)$, *diremos que el límite de $f(x)$ es b cuando x tiende a $-\infty$ (esto se escribe como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \operatorname{dom}(f) \cap (-\infty, r]$ se tiene que $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Ya es hora de ver algunos ejemplos de funciones y sus límites para asimilar y visualizar cuanto antes los conceptos introducidos.

5.11. Ejemplos. (a) Dada una función $f(x)$, si buscamos su límite en un punto a, una pregunta natural es si dicho límite es igual a $f(a)$. Resulta que este es el caso para $a = 1$ y la función $f(x) = 2x + 1$, es decir, tenemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$.

(b) Para la función $f(x) = x^2$ también es suficiente tomar su valor en el punto $a = 2$ para calcular su límite cuando x tiende a a. En otras palabras, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$.

(c) El límite de una función en un punto no necesariamente existe. Tal es el caso de la función $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$. Por ejemplo, el límite de $f(x)$ en el punto $a = 0$ no existe. Sin embargo, existen ambos límites laterales de $f(x)$ en el punto a; probaremos que $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

(d) Los valores de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se vuelven infinitesimales cuando x es muy grande. En términos rigurosos, tenemos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

(e) Para la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ no es tan claro qué pasa cuando x tiende a $-\infty$. Podemos observar que si $|x|$ es muy grande entonces $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ está muy cercano a 1. De modo que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

(f) El límite de una función $f(x)$ en el infinito no necesariamente existe aun cuando $f(x)$ sea una función muy simple. En particular, si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ no existe.

(g) Nuestro último ejemplo es una función tan rara (que, por cierto, se llama *la función de Dirichlet*) como para no tener límite en ningún punto de $\mathbb{R}$. Hagamos

$$\mathrm{Dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Entonces, para todo $a \in \mathbb{R}$, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

La definición del límite es bastante complicada así que no es tan evidente si cualquier límite de una función es único. Resulta que no tenemos problemas por este lado.

5.12. Teorema (de la unicidad del límite). *Supongamos que $f(x)$ es una función y a es un punto de acumulación de* $\mathrm{dom}(f)$. *Si $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y existen los límites $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$, entonces $b_1 = b_2$.*

5.13. Comentario. *También se cumple el teorema de la unicidad para los límites $\lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x)$ así como para $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Es un buen ejercicio formular explícitamente y demostrar los teoremas respectivos.*

A continuación nos toca verificar que la operación de paso al límite tiene buenas propiedades con respecto a operaciones artiméticas.

5.14. Teorema (Propiedades aritméticas del límite). *Dadas funciones reales f y g supongamos que a es un punto de acumulación del conjunto* $(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))$. *Si, además, existen los límites $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces*

(a) *existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$; en otras palabras, tenemos la fórmula $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$;*

(b) *existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B$; y por lo tanto tenemos la fórmula $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$;*

(c) *existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$; como una consecuencia inmediata, tenemos que $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;*

(d) *si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathrm{dom}(g)$ y $B \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. En particular, tenemos que $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.*

5.15. Comentario. *También se cumple el teorema de las propiedades aritméticas para los límites $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a+} g(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x)$, $\lim_{x\to a-} g(x)$. De igual manera, se tiene el mismo teorema para los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ así como para $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. Es un buen ejercicio formular explícitamente y demostrar los teoremas respectivos.*

Resulta que la existencia del límite de una función se puede caracterizar por medio de convergencia de sucesiones.

5.16. Teorema (Criterio secuencial de existencia del límite). *Dada una función real f supongamos que a es un punto de acumulación del conjunto $\mathrm{dom}(f)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\lim_{x\to a} f(x) = b$;*

(b) *si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{dom}(f)\setminus\{a\}$ es una sucesión y $x_n \to a$ entonces la sucesión $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ converge a b.*

La mayor parte de lo que resta de este capítulo, se dedicará al estudio de funciones continuas y ya llegamos a la definición de la continuidad.

5.17. Definición. *Dada una función real f supongamos que $a \in \mathrm{dom}(f)$ es un punto de acumulación del conjunto $\mathrm{dom}(f)$. La función f se llama continua en el punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. La función f se llama continua en un conjunto*

$A \subset \mathrm{dom}(f)$ si f es continua en todo punto $a \in A$. Se dice simplemente que f es continua si f es continua en $\mathrm{dom}(f)$.

A continuación describiremos algunas algunas clases de funciones reales continuas; veremos también que no cada función real es continua. Recuerde que una función $p(x)$ se llama polinomio si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ para algunos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

5.18. Ejemplos. (a) Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, entonces la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es continua en todos los puntos de su dominio.

(b) Si $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$, entonces $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ y discontinua en cada punto $a \in \mathbb{Z}$.

(c) Dado cualquier $a > 0,\ a \neq 1$, no es tan fácil demostrar la continuidad de la función $f(x) = a^x$ porque su definición rigurosa involucra una construcción muy técnica de sus valores para los $x \in \mathbb{Q}$ para luego realizar un paso al límite para definir a^x para todo x irracional. De modo que vamos a aceptar sin demostración que cualquier función exponencial es continua.

Recuerde que una función se llama *elemental* si ella se puede obtener de las funciones simples (es decir, polinomios, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) aplicando las operaciones aritméticas y composiciones. La demostración de continuidad de tales funciones se tiene que dar de manera muy individual de modo que el siguiente enunciado lo vamos a presentar sin demostración.

5.19. Teorema. *Cualquier función elemental es continua en todo punto de su dominio.*

Como era de esperarse, las funciones continuas se comportan muy bien con respecto a las operaciones aritméticas.

5.20. Teorema (Propiedades aritméticas de funciones continuas). *Dadas funciones reales f y g supongamos que $A \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ y las funciones f y g son continuas en A. Entonces,*

(a) la función $f + g$ es continua en A;

(b) la función αf es continua en A para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) la función fg es continua en A;

(d) la función $\frac{f}{g}$ es continua en A si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

En el capítulo anterior hemos definido los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, se puede definir un subconjunto abierto de cualquier $A \subset \mathbb{R}$. Este concepto nos será útil para caracterizar funciones continuas en subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

5.21. Definición. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que un conjunto $E \subset A$ es relativamente abierto en A si existe un abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $U \cap A = E$.*

El siguiente teorema caracteriza la continuidad de funciones definidas en subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$; es el instrumento principal para probar que la conexidad se conserva en las imágenes de funciones continuas.

5.22. Teorema. *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es continua en A;*

(b) *si $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ y la sucesión (a_n) converge a un punto $a \in A$, entonces $f(a_n) \to f(a)$;*

(c) *para todo $a \in A$, si $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para cualquier $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$;*

(d) *si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, entonces $f^{-1}(U) = \{x \in A : f(x) \in U\}$ es relativamente abierto en A.*

Como es de esperarse, la continuidad se comporta adecuadamente con respecto a la composición de funciones.

5.23. Teorema. *Supongamos que f y g son funciones reales continuas en sus respectivos dominios. Si $f(\mathrm{dom}(f)) \subset \mathrm{dom}(g)$ entonces la función $g \circ f$ es continua en $\mathrm{dom}(f)$.*

Resulta que la operación de tomar la imagen de una función continua conserva tanto la compacidad como la conexidad de subcojuntos de $\mathbb{R}$. Muchos teoremas clásicos del Análisis se basan sobre estos hechos topológicos.

5.24. Teorema. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua.*

(a) *Si A es compacto entonces $f(A)$ también es compacto.*

(b) *Si A es conexo entonces $f(A)$ también es conexo.*

Como ya sabemos, no todas las funciones son continuas, en particular, hay funciones importantes que tienen puntos de discontinuidad. La siguiente definición introduce las tres categorías de puntos de discontinuidad.

5.25. Definición. *Supongamos que f es una función real y $A = \mathrm{dom}(f)$.*

(a) *se dice que $a \in A$ es un punto de discontinuidad removible de f si existe el límite b de $f(x)$ cuando $x \to a$ y, además, $b \neq f(a)$;*

(b) *diremos que $a \in A$ es un punto de discontinuidad de f de primer tipo si existen los límites $p = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ y $q = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ mientras $p \neq q$;*

(c) *se dice que $a \in A$ es un punto de discontinuidad de segundo tipo de la función f si a no es removible ni de primer tipo.*

A continuación veremos unos ejemplos de puntos de discontinuidad de algunas funciones clásicas.

5.26. Ejemplos. (a) La función sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define de la siguiente manera: hacemos $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$ y $\operatorname{sgn}(x) = 1$ para todo $x > 0$; además $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Entonces $a = 0$ es el único punto de discontinuidad de la función $\operatorname{sgn}(x)$ y es una discontinuidad de primer tipo.

(b) Hagamos $f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$ para todo $x \neq 2$ y $f(2) = 0$. Entonces $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a = 2$ es un punto de dicontinuidad removible de la función $f(x)$.

(c) Si $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ entonces f es continua en $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ y cualquier $a \in \mathbb{Z}$ es un punto de discontinuidad de primer tipo.

(d) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Entonces $a = 0$ es el único punto de discontinuidad de $f(x)$ y es una discontinuidad de segundo tipo.

Acto seguido vamos a definir y estudiar funciones monótonas mismas que forman una clase muy importante en el Análisis.

5.27. Definición. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$;*

(a) se dice que f es creciente en A si $f(x) < f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$;

(b) se dice que f es no decreciente en A si $f(x) \leqslant f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$;

(c) se dice que f es decreciente en A si $f(x) > f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$;

(d) se dice que f es no creciente en A si $f(x) \geqslant f(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x < y$.

La función f se llama monótona si satisface alguna de las condiciones (a)–(d).

Una función puede ser creciente en un intervalo y decreciente en otro. Veamos algunos ejemplos de funciones y sus intervalos de creciemiento.

5.28. Ejemplos. (a) Si $r \in \mathbb{R}$ y $f(x) = r$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces la función f es no creciente y no decreciente en $\mathbb{R}$ al mismo tiempo.

(a) La función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ es no decreciente en $\mathbb{R}$.

(b) La función $f(x) = x^2$ es creciente en $[0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$.

(c) La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es creciente en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

(d) La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$, pero no en $\mathbb{R} \setminus 0$.

(e) La función de Dirichlet no es creciente ni decreciente en ningún intervalo.

Una función monótona puede ser discontinua; sin embargo, el siguinte teorema muestra que sus puntos de discontinuidad no pueden ser muy malos.

5.29. Teorema. *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y una función $f : I \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces f sólo puede tener puntos de discontinuidad de primer tipo.*

Recuerde que la inversa para una función $f : A \to B$ se define como una función $g : B \to A$ tal que $g(f(a)) = a$ para todo $a \in A$ y $f(g(b)) = b$ para todo $b \in B$. Una función f tiene inversa si y sólo si f es biyectiva; su inversa también es biyectiva y se denota por f^{-1}. Veamos algunas funciones elementales y sus inversas.

5.30. Ejemplos. (1) Si $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es biyectiva y sus inversa coincide con f.

(2) Si $f(x) = x^2$ para todo $x \geqslant 0$ entonces $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es una biyección; su inversa es la función $g(x) = \sqrt{x}$. Nótese que si consideramos que $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ entonces f no es inyectiva y por lo tanto no tiene inversa.

(3) Haciendo $f(x) = \frac{1}{x}$ obtenemos una función biyectiva $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$; observe que también en este caso la inversa de f coincide con f.

(4) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, vista en toda la recta $\mathbb{R}$ no es inyectiva y por lo tanto no tiene inversa. Sin embargo, si consideramos que $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ entonces f es una biyección y su inversa es la función $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

(5) Si hacemos $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una biyección por lo cual existe su inversa $g(x) = \ln x$.

Si una función real f es creciente o decreciente, es fácil ver que f es inyectiva y por lo tanto tiene inversa definida en el conjunto $f(\operatorname{dom}(f))$. Resulta que en muchos casos podemos deducir la continuidad de f^{-1} de la continuidad de f.

5.31. Teorema (de la función inversa de una función monótona). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no trivial y supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente (decreciente). Si f es continua en I entonces $J = f(I)$ es un intervalo y existe la función inversa $g : J \to I$ para f; además, g también es continua y creciente (o decreciente respectivamente).*

Ya podemos presentar unos clásicos teoremas del Análisis. El primer Teorema de Weiestrass presenta una importante consecuencia de la compacidad de cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

5.32. Teorema (El Primer Teorema de Weierstrass). *Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f es acotada.*

El segundo Teorema de Weierstrass que presentamos a continuación garantiza que se alcanzan los valores extremos de cualquier función continua en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

5.33. Teorema (El Segundo Teorema de Weierstrass). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Entonces* *existen puntos* $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ *tales que* $f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ *y* $f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

El siguiente teorema también es clásico y expresa una consecuencia de la conexidad de cualquier intervalo de la recta real.

5.34. Teorema (del valor medio). *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*; dada una función continua* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, para cualquier punto* $c \in [f(a), f(b)]$ *existe* $y \in [a,b]$ *tal que* $f(y) = c$.

Ya en el próximo capítulo vamos a necesitar una propiedad adicional de funciones continuas en intervalos cerrados. Esta propiedad se llama continuidad uniforme y se da en todas las funciones continuas definidas en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

5.35. Definición. *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$*, una función real* f *se llama uniformemente continua en* A *si* $A \subset \operatorname{dom}(f)$ *y para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ *para cualesquiera* $x_1, x_2 \in A$ *con* $|x_1 - x_2| < \delta$.

La manera de definir la continuidad uniforme sugiere que es un concepto más fuerte que la continuidad. En seguieda veremos que esto es cierto.

5.36. Proposición. *Si una función real* f *es uniformemente continua en un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$*, entonces* f *es continua en* A.

Resulta que hay funciones continuas muy sencillas que no son uniformememnte continuas.

5.37. Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces f es continua pero no uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

A continuación presentamos otro teorema clásico que nos muestra una consecuencia más de la compacidad de un subconjunto de $\mathbb{R}$.

5.38. Teorema (de la continuidad uniforme y conjuntos compactos). *Si un conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *es compacto y* $f : A \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces* f *es uniformemente continua en* A.

Ya vimos que cualquier intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es compacto de modo que en este caso el teorema anterior también es aplicable.

5.39. Corolario. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces* f *es uniformemente continua en* $[a,b]$.

Terminaremos este capítulo verificando que unas funciones relacionadas con el número e y con la función $\operatorname{sen} x$ tienen límites en ciertas circunstancias no triviales. Los hechos que demostraremos serán imprescindibles para el desarrollo del cálculo diferencial.

5.40. Teorema (Dos límites famosos). *(a) La función* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tiende a* e *cuando* $x \to +\infty$*, es decir,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

(b) El límite de la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *existe y es igual a* 1 *cuando* $x \to 0$*. En otras palabras,* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$.

Ejercicios del Capítulo 5.

5.A. Ejercicio. *Dada una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *demostrar que* f *es continua en un punto* $a \in \mathbb{R}$ *si y sólo si existen los límites* $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ *y tenemos que* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

5.B. Ejercicio. *Probar que una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si tenemos la contención* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}$.

5.C. Ejercicio. *Probar que una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si tenemos la contención* $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}(f(B))$ *para todo* $B \subset \mathbb{R}$.

5.D. Ejercicio. *Probar que una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si el conjunto* $f^{-1}(F)$ *es cerrado para cualquier cerrado* $F \subset \mathbb{R}$.

5.E. Ejercicio. *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*; sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Hagamos* $g(x) = \inf\{f(\xi) : a \leqslant \xi \leqslant x\}$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Demostrar que la función* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *está bien definida y es continua en* $[a, b]$.

5.F. Ejercicio. *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*; sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Hagamos* $g(x) = \sup\{f(\xi) : a \leqslant \xi \leqslant x\}$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Demostrar que la función* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *está bien definida y es continua en* $[a, b]$.

5.G. Ejercicio. *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*. Dadas funciones continuas* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *hagamos* $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Demostrar que la función* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *también es continua.*

5.H. Ejercicio. *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*. Dadas funciones continuas* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *hagamos* $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Demostrar que la función* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *también es continua.*

5.I. Ejercicio. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Hagamos* $g(x) = 1$ *si* $f(x) > 1$ *y* $g(x) = -1$ *cuando* $f(x) < -1$*; si tenemos que* $|f(x)| \leqslant 1$ *entonces hacemos* $g(x) = f(x)$*. Demostrar que la función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *también es continua.*

5.J. Ejercicio. *Supongamos que una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua e inyectiva. Demostrar que* f *es monótona.*

5.K. Ejercicio. *Hagamos* $f(x) = \frac{x^3-7x+6}{x-1}$ *para todo* $x \neq 1$ *y sea* $f(1) = 0$. *Probar que la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es discontinua en el punto* $a = 1$ *y determinar el tipo de dicontinuidad en* a.

5.L. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ *existe y calcular su valor.*

5.M. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ *existe y calcular su valor.*

5.N. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)}$ *existe y calcular su valor.*

5.O. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ *existe y calcular su valor.*

5.P. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$ *existe y calcular su valor.*

5.Q. Ejercicio. *Probar que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$.

5.R. Ejercicio. *Probar que el límite* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ *existe y calcular su valor.*

5.S. Ejercicio. *Supongamos que* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$. *Demostrar que si una función* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua en* (a,b) *entonces* f *es acotada en* (a,b).

5.T. Ejercicio. *Demostrar que la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *es uniformemente continua en* $[1, +\infty)$.

5.U. Ejercicio. *Demostrar que la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *no es uniformemente continua en* $[0, +\infty)$.

5.V. Ejercicio. *Considérese la función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$. *Dado cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *hagamos* $f_n(x) = (n+1)x$ *si* $x \in [0, \frac{1}{n+1}]$; *sea* $f_n(x) = 2 - (n+1)x$ *para todo* $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}]$ *y, finalmente,* $f_n(x) = 0$ *cuando* $x \in [\frac{2}{n+1}, 1]$. *Demostrar que la función* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es continua para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la sucesión* $(f_n(x))$ *converge a* $f(x)$ *para cualquier* $x \in [0,1]$ *mientras la sucesión* (f_n) *no converge uniformemente a* f.

5.W. Ejercicio. *En este ejercicio todas las funciones son reales y su dominio es* $\mathbb{R}$. *La expresión* $h_n \rightrightarrows h$ *significa que la sucesión* (h_n) *converge uniformemente a* h *en* $\mathbb{R}$. *Sabiendo que* $f_n \rightrightarrows f$ *y* $g_n \rightrightarrows g$ *demostrar que* $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ *y* $f_n - g_n \rightrightarrows f - g$.

5.X. Ejercicio. *En este ejercicio todas las funciones son reales y su dominio es* $\mathbb{R}$. *La expresión* $h_n \rightrightarrows h$ *significa que la sucesión* (h_n) *converge uniformemente a* h

en $\mathbb{R}$. Dar un ejemplo de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para las cuales existen sucesiones (f_n) y (g_n) de funciones continuas tales que $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ mientras $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$ pero la sucesión $(f_n \cdot g_n)$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f \cdot g$.

5.Y. Ejercicio. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$; en este ejercicio todas las funciones son reales y su dominio es el intervalo $[a, b]$. La expresión $h_n \rightrightarrows h$ significa que la sucesión (h_n) converge uniformemente a h en $[a, b]$. Supongamos que $f_n, g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas para cada $n \in \mathbb{N}$ y tenemos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$. Demostrar que $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$.*

5.Z. Ejercicio. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Supongamos que $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una funcion continua y $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ para todos $x \in [a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$. Se sabe, además, que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y la sucesión $(f_n(x))$ converge a $f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en $[a, b]$.*

6. La Integral de Riemann

La integral de Riemann es un método muy poderoso de resolver problemas de aplicación. Utilizando esta integral se puede calcular el area de cualquier figura en el plano, el volumen de un cuerpo en el espacio o bien hallar la longitud del camino recorrido por un punto con velocidad variable.

Una función a la cual es aplicable la integral de Riemann se llama integrable. Las funciones integrables en un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ son acotadas pero no necesariamente continuas; en este capítulo estudiaremos sus propiedades. En los cursos posteriores se verá que la integración tiene un vínculo inherente con la diferenciación y en muchos aspectos se puede considerar como una operación inversa a la derivación.

La definición de la integral de Riemann se dará en un intervalo cerrado $[a,b]$. Esta definición no es fácil y requiere varios pasos. Primero tenemos que aprender a manejar particiones de $[a,b]$ en intervalos tan pequeños que queramos.

6.1. Definición. *Supongamos que $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Se dice que T es una partición del intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si T es un conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Los puntos x_i se llaman elementos de la partición T; sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. El diámetro de la partición T es el número diam $(T) = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$.*

Una vez que tengamos el concepto de partición, podemos definir las sumas integrales, mismas que son aproximaciones de la futura integral. En todos los enunciados que vienen, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado tal que $a < b$.

6.2. Definición. *Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función y $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$. Dado un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i = 1, \ldots, n$, el número $I(f, T, \xi_i) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$ se llama la suma integral que corresponde a T y a la elección de los puntos ξ_i.*

Ahora ya estamos listos para definir las funciones integrables y sus integrales.

6.3. Definición. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, un número I se llama el límite de las sumas integrales de f en el intervalo $[a,b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ con $\operatorname{diam}(T) < \delta$ tenemos que $|I(f, T, \xi_i) - I| < \varepsilon$ para cualquier elección de puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. La función f se llama integrable en $[a,b]$ si existe el límite I de sus sumas integrales en $[a,b]$. En este caso se escribe que $I = \int_a^b f(x)dx$.*

Un concepto tan técnico como la integral de Riemann necesita apoyarse con ejemplos e interpretaciones en seguida.

6.4. Interpretación geométrica de la integral. Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función positiva en todos los puntos de $[a,b]$ y consideremos la figura $aABb$ limitada por su gráfica, el eje Ox y las rectas perpendiculares a Ox que pasan por loc puntos a y b (vea la figura 6.1). Si nuestra partición T consiste de los puntos $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ y se eligieron los puntos $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, $\xi_2 \in [x_1, x_2]$ junto con los puntos $\xi_3 \in [x_2, x_3]$ y $\xi_4 \in [x_3, b]$ entonces la suma integral $I(f, T, \xi_i)$ coincide con la suma de las áreas de los rectángulos R_1, R_2, R_2, R_4 donde la base del rectángulo R_i es el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ y su altura es $f(\xi_i)$ donde $i = 1, 2, 3, 4$. (véase la fugura 6.2)

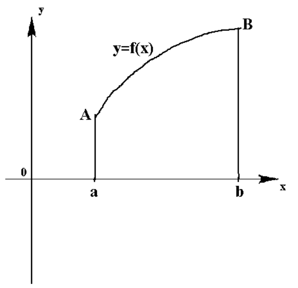

Figura 6.1

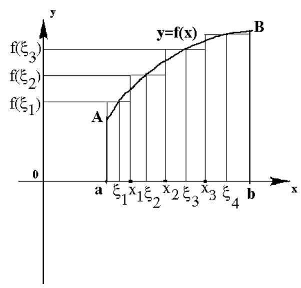

Figura 6.2

Como podemos observar en la figura 6.2, la suma S_T de las áreas de los rectángulos es una aproximación del área S de la figura $aABb$. Si el diámetro de la partición T es muy pequeño entonces es muy chico cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ y por lo tanto la suma $S_T = I(f, T, \xi_i)$ va a aproximar el número S con un error muy pequeño. De modo que cuando pasamos al límite I de las sumas integrales, el número $I = \int_a^b f(x)dx$ es precisamente el área de la figura $aABb$.

6.5. Interpretación física de la integral. Supongamos que un punto se mueve a lo largo de una recta. Su movimiento empieza en el momento $t = a$ del tiempo y termina cuando $t = b$. Su velocidad en cada momento $t \in [a, b]$ es igual a $v(t)$ donde $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función. Si queremos calcular el desplazamiento total D del punto en el lapso temporal $[a, b]$, podríamos construir una aproximación de D de la siguiente manera. Si tomamos una partición $T = t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ del segmento $[a, b]$, tal que su diámetro es lo suficientemente chico, podemos considerar que la velocidad del punto en el lapso $[t_{i-1}, t_i]$ es constante e igual a $v(\xi_i)$ donde $\xi_i \in [t_{i-1} t_i]$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Consecuentemente, el recorrido del punto en el lapso $[t_{i-1}, t_i]$ sería $v(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$.

De modo que una aproximación D_T del recorrido total D del punto sería igual al número $\sum_{i=1}^n v(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ mismo que coincide con la respectiva suma integral $I(v, T, \xi_i)$ de la función v. Ahora es claro que si pasamos al límite I de las sumas integrales entonces obtenemos el valor exacto del recorrido total del punto y por lo tanto $D = \int_a^b v(t)dt$.

Ahora pasamos a puras matemáticas para estudiar la clase las funciones integrables. Veremos que dicha clase tiene unas propiedades bastante buenas. En particular, las funciones intergrables en un segmento $[a, b]$ tienen que ser acotadas en $[a, b]$ pero no necesariamente continuas.

6.6. Teorema. *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonce f es acotada en el intervalo $[a, b]$.*

Ya es hora de calcular una integral simple y ver que no todas las funciones son integrables.

6.7. Ejemplos. (a) Si $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$ entonces la función constante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$;

(b) Para cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ la función de Dirichlet $\mathrm{Dir}(x)$ es acotada pero no integrable en $[a, b]$. Recuerde que $\mathrm{Dir}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\mathrm{Dir}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Para el estudio de funciones integrables es necesario trabajar con las sumas integrales inferiores y superiores mismas que introducimos a continuación.

6.8. Definición. *Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y tenemos una partición $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ hagamos $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$; como antes, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. El número $S(T, f) = M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n$ se llama la suma integral superior de f con respecto a la partición T. Analogamente, el número $s(T, f) = m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n$ se llama la suma integral inferior de f con respecto a la partición T.*

Las sumas integrales inferiores aproximan la integral por abajo y las sumas integrales superiores forman aproximaciones por arriba; dichas sumas se prestan a una ilustrativa interpretación geométrica.

6.9. Interpretación geométrica. Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función positiva y sea $\Gamma(f)$ su gráfica. Ya hemos visto que el área de la figura Φ limitada por el eje Ox, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el conjunto $\Gamma(f)$ coincide con el número $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ mientras cualquier suma integral de f es una aproximación de I. En la figura 6.3 podemos apreciar el hecho de que la suma integral inferior $s(T, f)$ también es una aproximación de I; como todos los rectángulos de esta aproximación están dentro de Φ, tenemos que $s(T, f) \leqslant I$ es decir, las sumas integrales inferiores aproximan a la integral I por abajo.

De manera análoga, podemos observar en la figura 6.4 que todo el conjunto Φ está contenido en la unión de los rectángulos de aproximación que representan la suma integral superior y por lo tanto $I \leqslant S(T, f)$. De modo que las sumas integrales superiores nos brindan aproximaciones de I por arriba. Es importante tener presente que los diagramas no pueden servir como una demostración rigurosa de modo que dos ejercicios para este capítulo invitan precisamente a demostrar las desigualdades $s(T,f) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant S(T,f)$ para cualquier partición T del intervalo $[a,b]$.

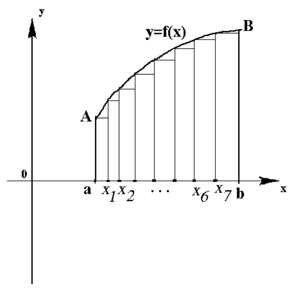

Figura 6.3

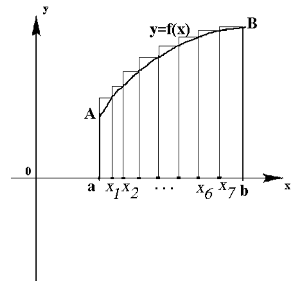

Figura 6.4

Nuestro siguiente paso es demostrar un criterio clásico de integrabilidad de una función acotada. Para ello tenemos que estudiar a fondo las propiedades de las sumas integrales superiores e inferiores.

6.10. Lema. *Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada. Si T y T' son particiones de $[a,b]$ y $T\subset T'$, entonces $S(T',f)\leqslant S(T,f)$ y $s(T',f)\geqslant s(T,f)$.*

De modo que las sumas integrales inferiores y superiores son monótonas con respecto a las particiones. Como consecuencia inmediata podemos concluir que cualquier suma integral inferior no excede a la cualquier suma integral superior.

6.11. Lema. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Si T y T' son particiones arbitrarias de $[a,b]$, entonces $s(T,f)\leqslant S(T',f)$.*

Y ahora sí, podemos formular y demostrar el Criterio de Darboux de integrabilidad. Sus múltiples aplicaciones se deben al hecho de que para verificar la integrabilidad de una función f, uno sólo tiene que analizar las sumas integrales superiores e inferiores de f y no hay necesidad de adivinar el número que podría ser el limite de las sumas integrales de la función f.

6.12. Teorema (Criterio de Darboux de integrabilidad). *Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada. Entonces la función f es untegrable en $[a,b]$ si y solo si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición T del intervalo $[a,b]$ tal que $S(T,f)-s(T,f)<\varepsilon$.*

La primera consecuencia del Criterio de Darboux es la integrabilidad en $[a,b]$ de toda función continua.

6.13. Teorema. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Pero también hay funciones integrables discontinuas; esto se puede desprender del siguiente teorema que también es una consecuencia fácil del Criterio de Darboux.

6.14. Teorema. *Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

A continuación veremos las propiedades aritméticas de la integral. Para formularlas con mayor generalidad necesitamos definir la integral también en los segmentos $[a,b]$ tales que $a > b$ ó $a = b$.

6.15. Definición. *Si f es una función real y $a \in \operatorname{dom}(f)$ entonces declaramos que $\int_a^a f(x)dx = 0$. Dados cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$, entonces se hace $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.*

Ya lo tenemos todo preparado para demostrar que la integral de Riemann tiene unas muy buenas propiedades aritméticas.

6.16. Teorema (Propiedades aritméticas de la integral). *Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.*

(a) Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[c,d]$ para cualquier intervalo $[c,d] \subset [a,b]$.

(b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en $[a,b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(c) Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces la función tf también es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b tf(x)dx = t\int_a^b f(x)dx$.

(d) Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y, además, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

(e) Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ para algún $c \in [a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

(f) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a,b]$ mientras $f([a,b]) \subset [c,d]$ y tenemos una función continua $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ entonces la función $g \circ f$ es integrable en $[a,b]$.

(g) Si tenemos funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables en $[a,b]$, entonces la función fg es integrable en $[a,b]$.

El siguiente teorema tiene múltiples consecuencias que se aplican en las situaciones donde uno tiene que comparar o estimar integrales.

6.17. Teorema. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.*

Como era de esperarse, la integración conserva las desigualdades entre funciones. El siguiente corolario expresa esta idea de manera rigurosa.

6.18. Corolario. *Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.*

Si se requieren cotas numéricas para una integral, es muy útil el enunciado que presentamos a continuación.

6.19. Corolario. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b - a)$.*

Resulta que la integración conserva también las desigualdades estrictas entre funciones continuas.

6.20. Teorema. *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$ y f no es identicamente cero en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. En particular, si tenemos funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.*

Con frecuencia, es necesario considerar el valor absoluto de una integral. Para ello puede ser útil la desigualdad que presentamos a continuación.

6.21. Teorema. *Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ también es integrable en $[a, b]$ y $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.*

Ya hemos visto que la integral $\displaystyle I = \int_a^b f(x)dx$ de una función f positiva se puede interpretar como el área de la figura acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, la gráfica de f y el segmento $[a, b]$. Si necesitamos un rectángulo con base $[a, b]$ cuya área sea igual a I, entonces su altura tiene las mismas cotas que la función f.

6.22. Teorema. *Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces existe $\mu \in [m, M]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$.*

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y queremos la altura del rectángulo cuya base es $[a,b]$ con el área igual a $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, el teorema que sigue nos muestra que dicha altura puede representarse como un valor de la función f.

6.23. Teorema (del valor medio). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continia en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.*

Seguimos con la definición del concepto de la integral indefinida misma que tendrá muchas aplicaciones en el cálculo diferencial.

6.24. Definición. *Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$, hagamos $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama la integral indefinida de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.*

Los métodos que hemos desarrollado ya permiten mostrar una buena propiedad de la integral indefinida.

6.25. Teorema. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in [a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en el intervalo $[a,b]$.*

En el cálculo diferencial se demostrará la fórmula de Newton–Leibnitz misma que nos permitirá calcular fácilmente la integral indefinida para la mayoría de las funciones elementales. Los métodos que tenemos en este momento se prestan sólo para unas funciones muy sencillas.

6.26. Ejemplos. (1) Sea $R(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{Q}$ entonces existe una única representación de x en forma de una fracción irreducible $\frac{m}{n}$ donde $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$; hagamos $R(x) = \frac{1}{n}$. Eesto completa la definición de la función $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misma que se llama la función de Riemann. La función $R(x)$ tiene un número infinito de puntos de discontinuidad en $[0,1]$ pero es integrable en $[0,1]$.

(2) Hagamos $f(x) = 1$ para cualquier $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Si $g(x)$ es la función de Riemann entonces ambas funciones f y g son integrables en $[0,1]$ pero $f \circ g$ no es integrable en $[0,1]$. De modo que la composición de dos funciones integrables no necesariamente es integrable.

(3) Hagamos $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ y sea $f(x) = -1$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Entonces la función f no es integrable en $[0,1]$ mientras la función $|f|$ sí lo es.

(4) Si $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt = c(x-a)$ para todo $x \in [a,b]$. De modo que la función $F(x) = c(x-a)$ es la integral indefinida de la función constante $f(x) \equiv c$.

(5) Hagamos $f(x) = x$ para cualquier $x \in [0,1]$. Entonces $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{2}$ para todo $x \in [0,1]$ y por lo tanto la función $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ es la integral indefinida de la función $f(x) = x$.

Ejercicios del Capítulo 6.

6.A. Ejercicio. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que para cada partición T del intervalo $[a,b]$ tenemos la desigualdad $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant S(T,f)$ donde $S(T,f)$ es la suma integral superior de f en $[a,b]$.*

6.B. Ejercicio. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que para cada partición T del intervalo $[a,b]$ tenemos la desigualdad $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant s(T,f)$ donde $s(T,f)$ es la suma integral inferior de f en $[a,b]$.*

6.C. Ejercicio. *Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición T del intervalo $[a,b]$ sea $s(T,f)$ ($S(T,f)$) la suma integral inferior (superior respectivamente) de la función f con respecto a T. Considere los números $\underline{I} = \sup\{s(T,f) : T$ es una partición de $[a,b]\}$ e $\overline{I} = \inf\{S(T,f) : T$ es una partición de $[a,b]\}$. Demuestre que siempre $\underline{I} \leqslant \overline{I}$ y la función f es integrable si y sólo si $\underline{I} = \overline{I}$.*

6.D. Ejercicio. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cualquier partición $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ sea $s(T,f)$ ($S(T,f)$) la suma integral inferior (superior respectivamente) de f. Probar que es posible elegir puntos $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ de tal manera que se cumplan las igualdades $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = s(T,f)$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = S(T,f)$.*

6.E. Ejercicio. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable. Para todo $n \in \mathbb{N}$ considérese la partición $T_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que $x_i^n = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ para cada $i = 0, \ldots, n$; entonces está bien definido el número $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)$. Demostrar que la sucesión (I_n) converge y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx$.*

6.F. Ejercicio. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función con un número finito de puntos de discontinuidad. Demostrar que f es integrable.*

6.G. Ejercicio. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *supongamos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función integrable y* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$. *¿Debe la función* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ *ser integrable en* $[a, b]$*?*

6.H. Ejercicio. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una función integrable tal que* $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [0, 1]$. *Demostrar que existe* $c \in [0, 1]$ *tal que* $\displaystyle\int_0^c f(x)dx = \int_c^1 f(x)dx$.

6.I. Ejercicio. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una función integrable. Demostrar la desigualdad* $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2 dx$.

6.J. Ejercicio. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una función integrable tal que* $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [0, 1]$. *Demostrar la desigualdad* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(x)dx}$.

6.K. Ejercicio. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Demostrar que para todos* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *tenemos que* $\displaystyle\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ *para cualquier* $c \in \mathbb{R}$.

6.L. Ejercicio. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Demostrar que para todos* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *tenemos que* $\displaystyle\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$ *para cualquier* $c > 0$.

6.M. Ejercicio. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Demostrar que para todos* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *tenemos que* $\displaystyle\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$.

6.N. Ejercicio. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Demostrar que se cumple la igualdad* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\mathrm{sen} x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

6.O. Ejercicio. *Supongamos que* $a > 0$ *y* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \in [-a, a]$ *(es decir, la función* f *es par). Demostrar que* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

6.P. Ejercicio. *Supongamos que* $a > 0$ *y* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in [-a, a]$ *(es decir, la función* f *es impar). Demostrar que* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

6.Q. Ejercicio. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *hagamos* $\displaystyle\varphi(t) = \int_a^b f(x+t)dx$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Demostrar que* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua.*

6.R. Ejercicio. *¿Qué signo tiene el número* $\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x dx$*?*

6.S. Ejercicio. *Calcular la integral* $\int_0^3 [x]dx$*; aquí,* $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$ *es la parte entera de* x*.*

6.T. Ejercicio. *Calcular la integral* $\int_0^2 |x-1|\, dx$*.*

6.U. Ejercicio. *Hagamos* $\varphi(t) = \int_2^t \frac{dx}{\ln x}$ *para todo* $t \geqslant 2$*. Demostrar que la función* $\varphi : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es creciente.*

6.V. Ejercicio. *Dada una función continua* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *considere el número* $a_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Demostrar que la sucesión* (a_n) *es convergente y* $\lim_{n\to\infty} a_n = f(0)$*.*

6.W. Ejercicio. *Hagamos* $\varphi(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *para todo* $x \in (0,1]$*. Demostrar que la función* $\varphi(x)$ *es acotada en* $(0,1]$*.*

6.X. Ejercicio. *Hagamos* $\varphi(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2}$ *para todo* $x \in (0,1]$*. Demostrar que la función* $\varphi(x)$ *no es acotada en* $(0,1]$*.*

6.Y. Ejercicio. *Una función* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es continua y* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$*. Hagamos* $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$ *para todo* $x \geqslant 0$*. Demostrar que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = A$*.*

6.Z. Ejercicio. *Supongamos que* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es una función no decreciente y por lo tanto integrable en* $[0,1]$*; sea* $I = \int_0^1 f(x)dx$*. Considérense los números* $I_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *y* $x_n = n(I - I_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Demostrar que la sucesión* (x_n) *es acotada.*