Problemario de
Cálculo Diferencial de Varias Variables

María José Arroyo

Shirley Bromberg

Patricia Saavedra

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

ÍNDICE

Presentación

El propósito de este problemario es poner a disposición de los profesores y alumnos de la uea “Cálculo Diferencial de Varias Variables” una colección de problemas, unos rutinarios y otros de carácter más amplio, que las autoras han recolectado a lo largo de varios años de impartir el curso. Concentra problemas tipo que aparecen en varios libros de texto, sin embargo, un estudiante puede encontrar la teoría necesaria para resolverlos con ayuda de un solo libro.

El material incluye problemas con diverso grado de dificultad, presentados en el orden que consideramos adecuado para impartir los temas del plan de estudios.

Como todo libro de esta naturaleza, no pretende sustituir al profesor ni a las sesiones de taller y ejercicios, donde la discusión sobre algunos de los problemas enriquece y favorece el aprendizaje.

A pesar de que el proceso de enseñanza aprendizaje de esta uea puede apoyarse en el uso de las nuevas tecnologías, algunos problemas muestran que, sin un razonamiento guiado por la teoría, puede llegarse a respuestas incorrectas.

Se han incluído además las respuestas y las soluciones de algunos problemas.

María José Arroyo Paniagua
Shirley Bromberg
Patricia Saavedra Barrera

Capítulo 1

Introducción a la Geometría Vectorial

1.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- ubicar un vector en el plano cartesiano, manejar las operaciones de suma de un número finito de vectores y multiplicación por escalares; en particular, reconocer y construir combinaciones lineales en el plano y en el espacio;
- conocer el concepto de magnitud de un vector como la distancia entre sus extremos y utilizarlo para construir un vector con magnitud dada en la dirección de otro vector tanto en el plano como en el espacio;
- comprender y operar el producto escalar en el plano y en el espacio y su significado geométrico para determinar la proyección de un vector en otro; el producto cruz y el triple producto escalar en el espacio y su representación geométrica; aplicar estas operaciones en cálculos de áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas;
- determinar o construir vectores con propiedades como: *ser paralelo a* y *ser perpendicular a*; comprender los conceptos de componente y proyección y aplicarlos en distintas situaciones como por ejemplo, calcular la distancia de un punto a una recta dada;
- reconocer, construir y transformar las formas de determinar una recta en el plano y en el espacio a partir de ciertos datos, por ejemplo: pasa por P y es paralela a, ortogonal a, etc.;

- reconocer, construir y transformar las expresiones que determinan un plano en el espacio a partir de ciertos datos, por ejemplo: pasa por los puntos, cuya normal es, que contiene a las rectas, etc.;
- determinar el ángulo entre una recta y un plano y entre dos planos;
- determinar la intersección entre rectas, entre planos, entre rectas y planos;
- calcular distancias: entre un punto y una recta; entre un punto y un plano; entre dos planos; entre una recta y un plano; entre dos rectas paralelas y entre dos rectas oblicuas.

1.2 Ejercicios y problemas de geometría vectorial

Represente en el plano $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}-\vec{v}$, $\frac{1}{3}\vec{v}$, $4\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$ en los casos siguientes:

1. $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\vec{w} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;
2. $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, $\vec{w} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$;
3. $\vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$;
4. $\vec{v} = 5(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) - 2(5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})$, $\vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) - \frac{2}{3}(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.

Represente en el espacio $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{w}-\vec{v}$, $\dfrac{1}{3}\vec{v}$, $4\vec{w}-\dfrac{1}{2}\vec{w}$ en los casos siguientes:

5. $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$;
6. $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$;
7. $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{k}$;
8. $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{w} = \vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

9. Para cada uno de los incisos del primer ejercicio encuentre $\|\vec{v}\|$, $2\vec{v}-3\vec{w}$, $\|\vec{v}-\vec{w}\|$, el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ y el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
10. Para cada uno de los incisos del segundo ejercicio, halle $2\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\|-\vec{v}-\vec{w}\|$, el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ y halle el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

En cada uno de los incisos que siguen, dé un vector en el plano en la dirección del vector $\vec{v} = 7\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ que satisfaga la condición pedida:

11. Cuya magnitud sea el doble de la de $\vec{v}$.

12. Cuya magnitud sea la mitad de la de $\vec{v}$.

13. Cuya magnitud sea 3.

En cada uno de los incisos que siguen, dé todos los vectores en el plano que se describen:

14. Forma un ángulo de 30^o con el eje de las x y tiene longitud 3.

15. Es perpendicular al vector $-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ y tiene magnitud 2.

16. Está en la dirección SO (SurOeste) y tiene magnitud 1.

17. Encuentre el vector fijo que es equivalente al vector $\overrightarrow{PQ}$ donde $P(3,2)$ y $Q(3,-2)$.

18. ¿Cuáles son las coordenadas del extremo del vector en la dirección del vector $-3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ de longitud 2?

19. Halle los cosenos directores de los vectores $\vec{u} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

20. ¿Es posible hallar un vector unitario tal que sus cosenos directores sean iguales?

21. Sea $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, con $\vec{u} \neq 0$. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ se puede inferir que $\vec{v} = \vec{w}$?

En los incisos que siguen, encuentre los valores de a y b para que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

22. $\vec{u}$ es un vector en la dirección positiva del eje de las abscisas, de magnitud 3, $\vec{v}$ es un vector que forma un ángulo de 60^o con $\vec{u}$ y tiene magnitud 2. Finalmente, $\vec{w}$ forma un ángulo de 30^o con $\vec{u}$ y tiene magnitud 6.

23. $\vec{u}$ forma un ángulo de 180^o con el vector $\vec{\imath}$ y tiene magnitud 2, $\vec{v}$ es un vector que forma un ángulo de -135^o con $\vec{u}$ y tiene magnitud 4. Finalmente, $\vec{w}$ forma un ángulo de 120^o con $\vec{u}$ y tiene magnitud 3.

24. Halle el vector en la dirección del vector $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ que debe sumarse al vector $2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ para que el vector resultante esté en la dirección del vector $\vec{\imath}$.

25. Utilizando argumentos vectoriales, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento con extremos $A(-1, 7)$ y $B(3, 1)$.

26. Muestre que cualquier vector $\vec{v}$ en el plano puede expresarse de manera única como
$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2},$$
donde $\vec{v_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ y $\vec{v_2} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

27. Dados $A(-3, 2)$ y $B(5, 4)$, dibuje $\overrightarrow{AB}$, halle su longitud y dé un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$. ¿Cuál es el vector fijo asociado a $\overrightarrow{AB}$ y cuál el asociado a $\overrightarrow{BA}$? Halle las coordenadas del punto sobre AB que está tres veces más alejado de A que de B.

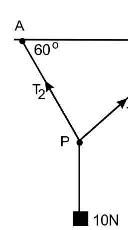
28. Considere el triángulo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ y $C(10, -1)$. Encuentre los vectores fijos asociados a $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$ y efectúe su suma. ¿Cómo explica este resultado?

29. Considere los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 1)$. Encuentre los puntos C tales que $OABC$ es un paralelogramo.

30. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Demuestre que
$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$
Es decir que la suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

31. Si $(4, 5)$ es el punto medio de un segmento con uno de sus extremos el punto $(-1, 2)$. Halle el otro extremo.

32. Encuentre las tensiones de las cuerdas indicadas en la figura siguiente



33. Un cuerpo se desliza sin rozamiento sobre un plano inclinado que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje de las abscisas. Descomponga la fuerza $\vec{F} = -mg\vec{\jmath}$ en dos fuerzas, una en la dirección perpendicular al plano inclinado y la otra en la dirección del plano.

34. Un piloto debe viajar en dirección este a 750km/h. Si el viento sopla en dirección NO con una velocidad de 50 km/h, ¿a qué velocidad y en qué dirección debe partir el piloto?

35. Un barco parte en dirección del Este hacia el Norte haciendo un ángulo de 30^o (los navegantes la denotan por E30^oN) a una velocidad de 60 km/h pero, por efectos de la corriente, viaja a 72 km/h en dirección norte, ¿cuál es la dirección y la velocidad de la corriente?

36. El viento se mueve a una velocidad de 35 km/h con dirección SO. ¿A qué velocidad y con qué dirección debe volar un avión si quiere ir en dirección S a un velocidad de 600 km/h?

37. Dos amigos salen en helicóptero de una isla. Viajan primero en dirección norte a 90 km/h durante 25 minutos, luego en dirección NE a la mitad de la velocidad, durante 15 minutos. Finalmente en dirección SE a 4/3 de la velocidad original durante 10 minutos. Encuentre la dirección y distancia de la isla al lugar donde llegaron.

38. Considere los vectores $\vec{u} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$. Hallar:
$$\begin{array}{cc} \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) & (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \\ |\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})| & |(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}| \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{w}) & (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \end{array}$$

39. ¿Son los siguientes vectores coplanares: $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ y $\vec{w} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$?

40. Halle el área del triángulo con vértices $O(0,0)$, $A(2,5)$ y $B(7,-1)$.

41. Halle el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

42. Usando vectores determine el volumen del tetraedro con vértices $(1,1,1)$, $(0,0,2)$, $(0,3,0)$ y $(4,0,0)$.

43. Verifique que para vectores arbitrarios $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se cumple: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

En cada uno de los tres ejercicios que siguen, decida si los vectores dados son paralelos o no. NOTA: los vectores del los ejercicios 44 y 45 están en el plano, los del ejercicio 46 están en el espacio.

44. $\overrightarrow{u} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath},, \quad \overrightarrow{w} = 4\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}.$

45. $\overrightarrow{u} = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{w} = 4\vec{\imath} - 12\vec{\jmath}.$

46. $\overrightarrow{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}, \quad \overrightarrow{v} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}.$

47. ¿Existe un escalar c tal que $3\vec{\imath} + c\vec{\jmath}$ sea paralelo a $-5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$? Explique su respuesta.

48. Muestre que el vector que se obtiene al hacer girar el vector $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ 90^o en el sentido contrario a las manecillas del reloj es el vector $-b\vec{\imath}+a\vec{\jmath}$.

49. Considere el triángulo con vertices $A(-1, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(2, -2)$. Sean L y M los puntos medios de BC y AC respectivamente. Interprete y demuestre que
$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

50. En forma más general, use vectores para comprobar que dado un triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

51. ¿Para qué valores de a son perpendiculares los vectores $\vec{v} = a\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{w} = 2a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} - 4\vec{k}$?

52. Determine la componente del vector $\overrightarrow{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{u}$ (se denota por $comp_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$) y la proyección del vector $\overrightarrow{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{u}$ (se denota por $pr_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$) para los vectores $\overrightarrow{u} = (2, 5, -3)$ y $\overrightarrow{v} = (1, -2, -8)$. Haga un dibujo que las represente. ¿Cuál es la altura del parelogramo formado por estos vectores?

53. Dados los puntos $P(2, -1, 1), Q(-3, 2, 0)$ y $R(4, -5, 3)$, encuentre la proyección y la componente de $\overrightarrow{QP}$ en $\overrightarrow{QR}$.

54. Para los vectores: $\overrightarrow{u} = \vec{\imath} - \vec{k}$ y $\overrightarrow{v} = 3\vec{\imath} + -2\vec{\jmath} + \vec{k}$, calcule la $comp_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$ y $pr_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$, y la $comp_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ y $pr_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$. ¿Qué concluye de sus cálculos?

55. Los vértices de un triángulo son: el origen, $P(3, 6, -2)$ y $Q(4, -1, 3)$. Halle las longitudes de los lados del triángulo y sus ángulos. Calcule de dos maneras distintas su área, use la proyección en una de ellas.

56. Complete el siguiente argumento para encontrar la distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $\ell : \ ax + by + c = 0$.

    Primero supongamos que la recta contiene al origen, es decir que $c = 0$. Muestre que el vector $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ es un vector perpendicular a la recta, es decir, es perpendicular a cualquier vector cuyo extremo se encuentra sobre la recta.

    Muestre que cualquier vector $\vec{v}$ se descompone como

    $$\vec{v} = pr_\ell(\vec{v}) + d\vec{n}.$$

    Utilice lo anterior para mostrar que la distancia del punto a la recta es $|d|\|\vec{n}\|$. De lo anterior deduzca que

    $$\vec{v} \cdot \vec{n} = pr_\ell(\vec{v}) \cdot \vec{n} + d\vec{n} \cdot \vec{n}.$$

    Teniendo en cuenta que

    $$pr_\ell(\vec{v}) \cdot \vec{n} = 0$$

    obtenga la fórmula que da la distancia:

    $$|d|\|\vec{n}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

    Para tratar el caso general, escoja un punto arbitrario en la recta, tómelo como origen, y repita el argumento. Debe encontrar que la distancia de P a ℓ está dada por

    $$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

57. ¿Cuáles definiciones y propiedades ha utilizado en la solución de los problemas hasta este momento? Haga una lista de ellas.

En las preguntas 58, 59 y 60 halle una ecuación que describa la recta dada:

58. Pasa por los puntos $P(1, 0, 3)$ y $Q(2, -1, 4)$.

59. Pasa por el punto $P(2, -2, 3)$ y es perpendicular al plano xz.

60. Pasa por el punto $P(-1, 2, -3)$ y es paralela a la recta $(2, -3, 0) + t(\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k})$.

61. Considere la recta en el plano que tiene ecuaciones paramétricas $x = 5 - t$ y $y = 7 + 2t$.

    (a) Encuentre el vector de dirección de la recta,

    (b) Halle el punto de la recta cuya abscisa es 1.

    (c) Halle el punto de la recta cuya ordenada es 8.

    (d) Encuentre la pendiente de la recta.

    (e) Dé la ecuación cartesiana de ella.

62. Decida si las rectas en el plano $\ell_1(t) = \vec{\imath} + t\vec{\jmath}$ y $\ell_2(t) = \vec{\jmath} + t(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ se intersectan y, en caso de hacerlo, determine el ángulo entre ellas.

63. Encuentre la ecuación de la recta en el espacio que es perpendicular al plano $2x - 7y + 15z = 0$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 8)$.

64. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta en el plano que pasa por $(5, -1)$ y es perpendicular a la recta descrita por las ecuaciones paramétricas $x = 4 - 2t$ y $y = 7 + t$.

65. Encuentre una representación paramétrica de la recta en el plano dada por $y = 3x - \frac{1}{4}$.

66. Considere la recta en el espacio con ecuaciones paramétricas $x = t + 1$ y $y = 1 - t$ y $z = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{2}$. Encuentre ecuaciones simétricas que la describan.

67. Considere la recta en el espacio con ecuaciones simétricas
$$\frac{x-2}{5} = -2(y+4) = \frac{z+2}{3}.$$
Encuentre una representación paramétrica.

68. Muestre que las ecuaciones paramétricas siguientes describen la misma recta:
$$\ell_1(t) = (1-t)\vec{\imath} + (1+3t)\vec{\jmath} + (1-2t)\vec{k}$$
y
$$\ell_2(t) = (2-t)\vec{\imath} + (3t-2)\vec{\jmath} + (3-2t)\vec{k}.$$

69. Una partícula parte del punto $P(-2, 3)$ y se dirige hacia el punto $Q(1, -1)$ a velocidad constante $2m/s$. Halle la ecuación del movimiento, suponiendo que las mediciones sobre los ejes coordenados se hacen en

metros y que el tiempo se mide en segundos. ¿Cuánto tiempo se tarda en llegar a Q?

En cada uno de los incisos que sigue, halle la ecuación del plano que satisface las condiciones dadas:

70. Pasa por $P(2,3,4)$ y es ortogonal a $\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+3\vec{k}$.

71. Pasa por $P(2,1,1)$ y es paralelo al plano $3x-2y+5z=2$.

72. Pasa por $P(1,3,1)$ y contiene a la recta $x=t$, $y=t$ y $z=-2+t$.

73. Pasa por los puntos $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,-3,-1)$.

74. Una partícula comienza a moverse en el punto $(15,-22,10)$, se mueve con vector velocidad constante $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$. ¿Cuánto tarda la partícula en alcanzar el plano $x+10y+4z+15=0$?

75. Encuentre la ecuación del plano que contiene a las rectas
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+2}{-2} \qquad \text{y} \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-5}.$$

76. Use el ejercicio 56 para encontrar la distancia entre la recta $3x-4y=1$ y el punto $P(-1,-1)$.

77. Use argumentos vectoriales para hallar la distancia entre el punto $P(2,-1,1)$ y el plano $x+y+z=1$

78. Deduzca la fórmula para determinar la distancia de un punto a un plano.

79. Encuentre la distancia del punto $P(-8,4,-1)$ al plano que contiene a los vectores $\vec{u}=\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+\vec{k}$ y $\vec{v}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.

80. Halle la ecución de los planos paralelos al plano $2x+y-z=1$ y que distan 2 de él.

81. Halle la intersección entre el plano $2x-11y-7z=1$ y la recta ℓ_1 que tiene por ecuaciones simétricas
$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-7}{-8}=\frac{z-16}{-14}.$$

En los problemas 82, 83 y 84 muestre que los planos dados son paralelos y halle la distancia entre ellos:

82. $x - 2y - 2z = 1$ y $-2x + 4y + 4z = 10$.

83. $3x - 2y - 4z = 1$ y $-6x + 4y + 8z = 0$.

84. $6x - 9y + 3z = 1$ y $4x - 6y + 2z = -1$.

En los problemas 85, 86 y 87 muestre que las rectas dadas no se intersectan y halle la distancia entre ellas:

85. $\ell_1(t) = (1-2t)\vec{\imath} + (1+t)\vec{\jmath} - (1+2t)\vec{k}$, $\ell_2(t) = (-1+4t)\vec{\imath} + (1+t)\vec{\jmath} + (1+t)\vec{k}$.

86. $\ell_1(t) = (2,-1,0) + t(1,1,1)$, $\ell_2(t) = (1,1,1) + t(2,-2,2)$.

87. ℓ_1 pasa por los puntos $A(2,1,3)$ y $B(1,2,1)$ y ℓ_2 pasa por los puntos $C(-1,-2,-2)$ y $D(1,-4,0)$.

Halle la intersección entre los planos

88. $x + y + z = 0$ y $2x + y + 2z = 0$.

89. $x + y + z = 1$ y $2x + y + 2z = -1$.

90. $x + y + z = a$ y $2x + y + 2z = b$.

91. ¿Se intersectan en un único punto los planos $x - y + 2z = 4$ y $3x + y + z = 1$?

Para cada uno de los problemas 92, 93 y 94 determine si los tres planos se intersectan en un único punto.

92. $x - y + 2z = 4$, $3x + y + z = 1$ y $5x + 3y = 2$.

93. $x - y + 2z = 4$, $3x + y + z = 1$ y $-3x + 5y + 4z = 2$.

94. $x - y + 2z = 4$, $3x + y + z = 1$ y $5x + 3y = -2$.

95. Determine para qué valores de θ los siguientes planos se intersectan en un punto

$$\begin{aligned} \theta x - y &= 1 \\ x + (1-\theta)y + z &= 0 \\ 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

1.3 Ejercicios complementarios

¿Qué representa cada una de las ecuaciones siguientes? Estudie la situación tanto en el plano como en el espacio.

96. $y = 0$.

97. $x = 7$.

98. $xz = 0$.

99. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.

Escriba para cada uno de los siguientes ejercicios la ecuación de la esfera indicada.

100. Centro en $P(1, 2, 4)$ y radio 3.

101. Un diámetro es $\overrightarrow{PQ}$ para $P(2, 4, -2)$ y $Q(3, 7, 1)$.

Determine el centro y el radio de cada una de las esferas indicadas.

102. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

103. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 23 = 0$.

104. Encuentre la ecuación de la esfera cuyo centro es $C(1, 1, 0)$ y es tangente al plano yz.

Dé la ecuación que describe los siguientes lugares geométricos:

105. El lugar geométrico de todos los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $P(-1, -3, -5)$ y $Q(-5, -7, 1)$.

106. El lugar geométrico de todos los puntos $X(x, y, z)$ tales que el vector $\overrightarrow{AX}$ es perpendicular al vector $\vec{n}$, donde $A(-3, 2, -4)$ y $\vec{n} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1.4 Respuestas de algunos problemas

9.1 $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$, $2\vec{v} - 3\vec{w} = 11\vec{\imath} - 10\vec{\jmath}$, $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 4\sqrt{2}$.

Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}\vec{\imath} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\vec{\jmath}$.

Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\arccos(\dfrac{-7}{\sqrt{65}})$.

9.3 $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, $2\vec{v} - 3\vec{w} = -11\vec{\imath} - 17\vec{\jmath}$, $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 2\sqrt{13}$.

Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$: $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$.

Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\arccos(\dfrac{-4}{\sqrt{17}})$.

10.5 $2\vec{v} - \vec{w} = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 46$, $\| - \vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{187}$.

Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$: $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\vec{\jmath} - \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\vec{k}$.

Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\arccos(\dfrac{23\sqrt{2}}{15\sqrt{5}})$.

10.7 $2\vec{v} - \vec{w} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, $\| - \vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{5}$.

Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{\jmath} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$.

Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\dfrac{\pi}{2}$.

11. $14\vec{\imath} - 10\vec{\jmath}$.

13. $\dfrac{21}{74}\vec{\imath} - \dfrac{15}{74}\vec{\jmath}$.

15. $\dfrac{6}{\sqrt{13}}\vec{\imath} + \dfrac{4}{\sqrt{13}}\vec{\jmath}$.

17. $\overrightarrow{PQ} = -4\vec{\jmath}$.

19. $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$:

$\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$.

21. No, por ejemplo, $\vec{u} = \vec{\imath}$, $\vec{v} = \vec{\jmath}$, $\vec{w} = 2\vec{\jmath}$.

23. $a = \dfrac{3}{4}$, $b = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

25. $(1, 4)$.

27. Longitud: $2\sqrt{27}$.

    Vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AB}$: $\dfrac{4}{\sqrt{27}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{27}}\vec{\jmath}$.

    Vector fijo asociado a $\overrightarrow{AB}$: $8\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$.

    Vector fijo asociado a $\overrightarrow{BA}$: $-8\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$.

    Punto sobre AB que está tres veces más alejado de A que de B: $(3, \dfrac{7}{2})$.

29. $C(-2, 1)$.

31. $(9, 8)$.

33. $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{2}mg\vec{\imath} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg\vec{\jmath}$.

35. Velocidad: $(-30\sqrt{3}\vec{\imath} - 42\vec{\jmath})$ km/h.

    Dirección: $-\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{31}}\vec{\imath} + \dfrac{7}{2\sqrt{31}}\vec{\jmath}$.

37. Dirección: $\dfrac{2}{\sqrt{55 + 10\sqrt{2}}}\vec{\imath} + \sqrt{\dfrac{521 + 8\sqrt{2}}{565}}\vec{\jmath}$.

    Distancia: $\dfrac{15\sqrt{55 + 10\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$.

38.1 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = 13\vec{\imath} - 35\vec{\jmath} - 37\vec{k}$.

38.3 $|\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})| = 3\sqrt{307}$.

38.5 $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (u \times \vec{w}) = -201\vec{\imath} + 67\vec{\jmath} - 134\vec{k}$.

39. No.

40. $\dfrac{33}{2}$.

42. $Vol = 1$.

44. No son paralelos.

46. Sí son paralelos.

47. $-9/5$.

51. $a = -1$, $a = 2$.

54. $\text{comp}_{\vec{u}}\vec{v} = \sqrt{2}$, $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\text{comp}_{\vec{v}}\vec{u} = \sqrt{2/7}$, $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{3}{7}\vec{\imath} - \dfrac{2}{7}\vec{\jmath} + \dfrac{1}{7}\vec{k}$.

58. $\ell : (1, 0, 3) + t(-1, 1, -1)$.

60. $\ell : (-1, 2, 3) + t(1, 4, 1)$.

61.a $-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

61.c $(4.5, 8)$.

61.e $y = -2x + 17$.

62. Se intersectan en el punto $(1, 2)$ con un ángulo de $\pi/4$ radianes.

64. $x = 5 + t$, $y = -1 + 2t$.

66. $x = 2 - y = 2z - 2$.

67. $x = t$, $y = -\dfrac{t + 38}{10}$, $z = \dfrac{3t - 16}{5}$.

69. La ecuación del movimiento está dada por $\alpha(t) = (-2, 3) + (t/5)(3, -4)$.

71. $3x - 2y + 5z = 9$.

74. $t = 10$.

76. $d = 0$.

79. Distancia $= 7/\sqrt{2}$.

81. $(2, -1, 2)$.

83. Distancia $= \dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

86. Distancia $= \sqrt{2}$.

88. $x = -3t$, $y = 4t$, $z = t$.

90. $x = b - a - 3t$, $y = 4t + 2a - b$, $z = t$.

92. No se intersectan.

94. Se intersectan en una infinidad de puntos.

96. Plano: una recta, espacio: un plano.

98. Plano: dos rectas, espacio: dos planos.

100. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$.

102. Centro: $(2,-1,0)$, radio: 4.

104. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=1$.

105. $2x+2y-3z=-10$.

106. $x-y+2z=-13$.

Capítulo 2

Funciones vectoriales de variable real

2.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- generalizar e integrar los conceptos de función, límite, continuidad, derivada, regla de la cadena e integral en una variable para aplicarlos en funciones vectoriales de variable real;
- describir y parametrizar curvas: círculos, elipses, parábolas, hipérbolas, cicloide, triángulos, rectángulos, etc.;
- describir trayectorias que siguen partículas en movimiento; comprender los conceptos de velocidad, rapidez y aceleración en las trayectorias;
- aplicar lo anterior en la solución de algunos problemas de geometría y física.

2.2 Ejercicios y problemas

Determine el dominio máximo de definición de cada una de las siguientes funciones vectoriales de variable real:

1. $\vec{r}(t) = \dfrac{1}{t-3}\vec{\imath} + \sqrt{t}\vec{\jmath}$.

2. $\vec{r}(t) = \ln|\cos t|\vec{\imath} + \sqrt{4t^2-1}\vec{\jmath} + \dfrac{t}{t-1}\vec{k}$.

Dibuje la imagen de las siguientes funciones:

3. $\vec{r}(t) = (3+2t)\vec{\imath} + (1-t)\vec{\jmath}, \quad -1 \leq t \leq 1.$
4. $\vec{r}(t) = \mathrm{e}^t\vec{\imath} + 2\mathrm{e}^{-t}\vec{\jmath}, \quad 0 \leq t \leq 2.$
5. $\vec{r}(t) = (2-t^2)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}, \quad -2 \leq t \leq 2.$
6. $\vec{r}(t) = 2\sqrt{t}\;\vec{\imath} + (t+1)\vec{\jmath}, \quad 0 \leq t \leq 2.$
7. $\vec{r}(t) = 2\cos t\;\vec{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\,t\vec{\jmath}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
8. $\vec{r}(t) = t\cos t\;\vec{\imath} + t\,\mathrm{sen}\,t\vec{\jmath} + \dfrac{t}{2\pi}\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
9. $\vec{r}(t) = 2\cos t\;\vec{\imath} + 2\,\mathrm{sen}\,t\vec{\jmath} + 3t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Calcule cada uno de los siguientes límites:

10. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\cos t\vec{\imath} + \frac{1-\cos t}{t}\vec{\jmath}\right).$
11. $\displaystyle\lim_{t\to 4}\left(\frac{t^2-16}{t-4}\vec{\imath} + \frac{e^{1-t}}{1-t}\vec{k}\right).$
12. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\,t}{t}\vec{\imath} + \frac{\cos t - 1}{t}\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\vec{k}\right).$
13. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{t}}{1-t}\vec{\imath} + \frac{t}{1+t}\vec{\jmath} + \vec{k}\right).$
14. Diga si la curva parametrizada

$$\alpha(t) = \begin{cases} (1-t, t) & 0 \leq t \leq 1 \\ (2-2t, 2-t) & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

es continua y dibújela.

En los problemas siguientes, obtenga los vectores velocidad y aceleración, el ángulo entre ellos, así como la rapidez en el punto que se indica.

15. $\vec{r}(t) = 3t\vec{\imath} + (4t - t^2)\vec{\jmath}$, en $t = \frac{\pi}{2}$.

16. $\vec{s}(t) = 2e^t\,\vec{\imath} + 3e^{-t}\,\vec{\jmath} + 3t\,\vec{k}$, en $t = \dfrac{1}{2}$.

17. $\alpha(t) = \cos(\cos t)\vec{\imath} + \operatorname{sen}(\cos t)\vec{\jmath}$, en $t = \dfrac{\pi}{2}$.

18. $\vec{r}(t) = (3t+1)\vec{\imath} + (\sqrt{3}t)\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$, en $t = 0$.

19. $\overrightarrow{r}(t) = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}t)\,\vec{\imath} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2)\vec{\jmath}$, en $t = 0$.

En los problemas que siguen encuentre los vectores velocidad, aceleración y la rapidez de las curvas dadas en los puntos que se indican. Cuando sea posible, dé la ecuación paramétrica de la recta tangente:

20. $\alpha(t) = \cos(\cos t)\vec{\imath} + \operatorname{sen}(\cos t)\vec{\jmath} \quad t = 0,\ t = \pi/2$.

21. $\alpha(\theta) = \tan\theta\vec{\imath} + \csc\theta\vec{\jmath} \ \ \theta = 0,\ \theta = \pi/4$.

22. $x(t) = \ln(2t+1), \quad y(t) = 3\mathrm{e}^{-2t}, \quad z(t) = 8t; \quad t = 0$.

23. Trace la curva $C(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 3t)$ y encuentre todos los puntos en que el vector tangente a la curva es paralelo a uno de los planos coordenados.

24. Halle los puntos donde la rapidez de la cicloide

$$\alpha(t) = (2(t - \operatorname{sen} t), 2(1 - \cos t))$$

se anula.

25. La posición de una partícula está dada por $\vec{r}(t) = t^3\vec{\imath} + 5t\vec{\jmath} - 16t\vec{k}$. ¿Cuándo es mínima su rapidez?

En los siguientes ejercicios, $\vec{r}(t)$ es la posición de una partícula en el instante t. Encuentre el valor de t en el intervalo dado para el cual los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

26. $\vec{r}(t) = (t + \operatorname{sen} t)\vec{\imath} + (1 - \cos t)\vec{\jmath}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

27. $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\vec{\imath} + t\vec{\jmath} + (\cos t)\vec{k}$, $t \geq 0$.

28. Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva con ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1}{1+t}, \quad y(t) = \frac{10}{1-t},$$

en $P_0(\frac{2}{3}, 2)$.

29. Halle los puntos donde el vector tangente a la hipocicloide:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$$

se anula. ¿Se puede hablar de la "recta tangente" a la hipocicloide en estos puntos?

30. Si $f(t) = (t^2, t^3)$ y $g(t) = (t^3, t^3, |t^3|)$, con $t \in [-1, 1]$ trace las curvas y determine los puntos en los cuales la derivada es el vector cero y determine si alguno de los puntos es cuspidal.

Dibuje las gráficas de las siguientes funciones, tomando en consideración la información que da el vector tangente.

31. $C(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

32. $C(t) = (\frac{t^2}{t+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$, $t \in (-\infty, \infty)$.

33. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que, en $t = 1$, se desprende súbitamente sobre una tangente. ¿Dónde estará la partícula en $t = 2$?

34. Una partícula parte del punto $P(4, -3, 1)$ hacia el punto $Q(-1, 2, 1)$ en el instante t_0, con vector aceleración cero y con rapidez de $4m/s$. Cinco segundos después, parte otra partícula de Q hacia P. Esta partícula se mueve a $3m/s$. Escriba las ecuaciones paramétricas que describen estos movimientos y diga cuándo las partículas colisionan.

35. Una partícula se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con una velocidad angular constante de 2 radianes/segundo. En el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $P_0(0, 1)$. Encuentre el vector posición de la partícula, como función de t.

36. Un punto P en el primer cuadrante del plano se mueve de tal forma que su distancia al origen es igual a la pendiente t de la recta que va del origen a P. Dé una representación paramétrica de la curva descrita por P usando a t como parámetro y dibújela.

Calcule las integrales que se proponen a continuación

37. $\displaystyle\int_1^2 \left[(6-6t)\vec{\imath} + 3\sqrt{t}\vec{\jmath} + \frac{4}{t^2}\vec{k}\right] dt.$

38. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(\operatorname{sen} t)\vec{\imath} + (1+\cos t)\vec{\jmath} + \sec^2 t\vec{k}\right] dt.$

39. Obtenga la trayectoria $\vec{r}(t)$ de la partícula cuyo vector velocidad es $\vec{v}(t) = e^{2t}\vec{\imath} + e^{-t}\vec{\jmath}$ si $r(0) = 2\vec{i} - j$. Determine la rapidez de la curva.

40. Una partícula se encuentra en el instante $t = 1$ en el punto $P_0(1, -1, 1)$ y su vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = (6-6t)\vec{\imath} + 3\sqrt{t}\vec{\jmath} + \frac{4}{t^2}\vec{k}.$$

Encuentre el vector posición de la partícula.

41. Obtenga la trayectoria de la partícula que tiene como vector aceleración $\vec{a}(t) = t^2\vec{\imath} - \frac{1}{t^2}\vec{\jmath}$, con $\vec{v}(1) = \vec{\jmath}$ y $\vec{r}(1) = \frac{1}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$.

42. Resuelva para $\vec{r}$ como un vector en función de t, sabiendo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -t\vec{\imath} - t\vec{\jmath} - t\vec{k},$$

y que $\vec{r}(0) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

43. En $t = 0$, una partícula está en el punto$(1, 2, 3)$, si viaja en línea recta al punto $(4, 1, 4)$, tiene velocidad 2 en $(1, 2, 3)$ y aceleración constante $3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. Encuentre la ecuación para el vector de posición de la partícula en el tiempo t.

En los ejercicios que siguen, encuentre las ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro que describe el movimiento de una partícula a partir del punto $(a, 0)$ y:

44. Recorre el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y da una vuelta en el sentido de las manecillas del reloj.

45. Recorre el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y da dos vueltas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

46. Recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y da una vuelta en el sentido de las manecillas del reloj.

47. Recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y da dos vueltas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

En los ejercicios que siguen, dibuje la curva que está descrita en forma polar.

48. $r = \cos\theta$.

49. $r = 1 + \cos\theta$.

50. $r = \theta$.

51. Muestre que las curvas descritas por la parametrización polar

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

y por la parametrización

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(1 - t^2)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}$$

tienen el mismo recorrido.

52. Sea $r(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$. Encuentre una reparametrización de la curva que tenga rapidez unitaria.

53. Considere la hélice con ecuaciones paramétricas:

$x = \cos t$, $y =$ sen t, $z = t$; $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Muestre que el vector velocidad y el vector aceleración son ortogonales para todo $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Dé una parametrización que recorra la curva en sentido inverso y a la mitad de la velocidad.

54. Un proyectil es disparado con una rapidez inicial de 487.5 m/s y con un ángulo de elevación de 30°. Encuentre la altura máxima que alcanza el proyectil, su alcance y la rapidez con la que choca con el suelo.

55. Una pelota de golf es lanzada con un ángulo de 45^0 y la pelota aterriza a 10 metros de distancia.

    ¿Cuál fue la velocidad inicial a la que fue lanzada la pelota?

56. Una cuerda que gira hace que una partícula de masa m se desplace según la trayectoria descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = 3\cos 2t \quad y(t) = 3\,\mathrm{sen}\,2t.$$

    En el instante $t = \pi/4$ la cuerda se rompe y la partícula queda sujeta a la acción de la gravedad. ¿Cuál es la posición de la partícula en el instante $t = \pi$?

57. Se suelta una bomba (rapidez inicial cero) desde un helicóptero suspendido a una altura de 800 metros. Se dispara un proyectil de un cañón situado en el suelo a 800 metros al oeste del punto directamente debajo del helicóptero. Se supone que el proyectil debe interceptar a la bomba a una altura precisa de 400 metros. Si el proyectil se dispara al mismo tiempo que se suelta la bomba, ¿cuáles deben ser su velocidad y ángulo de inclinación iniciales?

2.3 Ejercicios complementarios

58. Verifique que las siguientes propiedades de la derivación vectorial se satisfacen:

$$\begin{array}{cc} (\sigma+\rho)' = \sigma' + \rho' & (\rho\cdot\sigma)' = \rho'\cdot\sigma + \rho\cdot\sigma' \\ (a\sigma)' = a\sigma' & (\rho\times\sigma)' = \rho'\times\sigma + \rho\times\sigma' \end{array}$$

    donde a es un número real, $\rho, \sigma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ y son derivables.

59. Sean $\alpha : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ y $h : [s_1, s_2] \to [t_1, t_2]$ derivables. Definimos $\beta : [s_1, s_2] \to \mathbb{R}^3$ por

$$\beta(s) := \alpha(h(s)).$$

    Demuestre que

$$\beta'(s) := h'(s)\alpha'(h(s)).$$

Vea que lo anterior implica que los vectores velocidad de α en $h(s)$ y de β en s son colineales. ¿se puede decir lo mismo de los vectores aceleración? ¿por qué?

60. Muestre que si la fuerza que actúa sobre una partícula es central, entonces la partícula se mueve sobre un plano.

61. Si una partícula con masa m se mueve de acuerdo con un vector posición $\vec{r}$, su momento angular se define como $\vec{L}(t) = m\vec{r} \times \vec{v}$ y su par de torsión como $\vec{\tau}(t) = m\vec{r} \times \vec{a}(t)$. Compruebe, usando el ejercicio 1 de la sección 2, que $\vec{L}' = \vec{\tau}$. Deduzca que si $\vec{\tau}(t) = 0$ para toda t, entonces $\vec{L}(t)$ es constante. (Esta es la ley de conservación del momento angular.)

62. ¿Cuándo es cierto que el vector aceleración y velocidad de una partícula son paralelos?

63. Suponga que una curva está parametrizada polarmente por $r = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva cuando $\theta = \theta_0$. Diga bajo qué condiciones lo anterior es posible.

2.4 Respuestas de algunos problemas

1. Dom $= [0, 3) \cup (3, \infty)$.

3. Figura 2.1

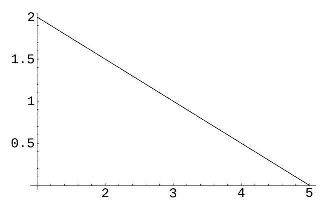


Figura 2.1: $r(t) = (3 + 2t)\vec{\imath} + (1 - t)\vec{\jmath}$.

5. Figura 2.2

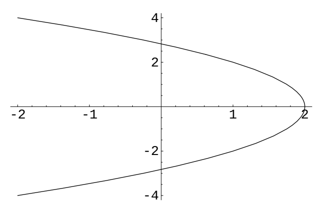


Figura 2.2: $r(t) = (2 - t^2)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$.

7. Figura 2.3

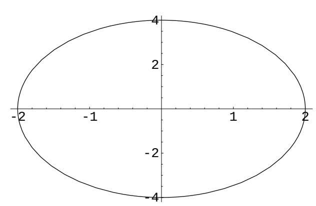


Figura 2.3: $r(t) = 2\cos(t)\vec{\imath} + 4\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{\jmath}$.

9. Figura 2.4

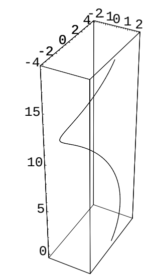


Figura 2.4: $r(t) = 2\cos(t)\vec{\imath} + 2\,\mathrm{sen}\,(t)\vec{\jmath} + 3t\vec{k}$.

11. $8\vec{\imath} - \dfrac{1}{3e^3}\vec{k}$.

13. $\vec{\imath} + \vec{k}$.

15. vel $= 3\vec{\imath} + (4-\pi)\vec{\jmath}$, $a = -2\vec{\jmath}$, $\theta = \arccos\left(-\dfrac{4-\pi}{\sqrt{9+(4-\pi)^2}}\right)$, $r = \sqrt{9+(4-\pi)^2}$.

17. vel $= -\vec{\jmath}$, $a = -\vec{\imath}$, $\theta = \pi/2$, $r = 1$.

19. vel $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$, $a = -32\vec{\jmath}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, $r = 1$.

21. Para $t = \pi/4$: $vel = 2\vec{\imath} - \sqrt{2}\vec{\jmath}$, $a = 4\vec{\imath} + 3\sqrt{2}\vec{\jmath}$, $l(t) = \vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath} + t(2\vec{\imath} - \sqrt{2}\vec{\jmath})$.

23. Figura 2.5

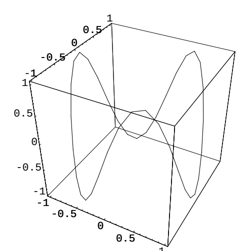


Figura 2.5: $r(t) = \mathrm{sen}\,(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath} + \mathrm{sen}\,(3t)\vec{k}$.

La recta tangente a la curva es paralela al plano xy cuando $t = \frac{n\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; es paralela al plano xz cuando $t = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ y es paralela al plano yz cuando $t = \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

25. La rapidez es mínima cuando $t = 0$.

27. Son ortogonales para cualquier $t \geq 0$.

29. $\tau(t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t)(-3\cos(t)\ \vec{\imath} + 3\operatorname{sen}(t)\ \vec{\jmath})$ se anula cuando $t = n\pi$ y $t = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$. La curva no tiene recta tangente en estos puntos.

31. Figura 2.6

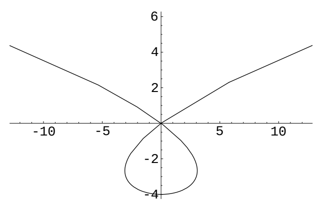


Figura 2.6: $r(t) = (t^3 - 4t)\vec{\imath} + (t^2 - 4)\vec{\jmath}$, para $-3 \leq t \leq 3$.

33. Está en el punto $(2e, 0, \cos(1) - \operatorname{sen}(1))$.

35. $r(t) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{90})\vec{\imath} + \cos(\frac{\pi t}{90})\vec{\jmath}$.

37. $-3\vec{\imath} + (-2 + 4\sqrt{2})\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

39. $r(t) = \dfrac{3 + e^{2t}}{2}\vec{\imath} - e^{-t}\vec{\jmath}$; $|v(t)| = \sqrt{e^{-2t} + e^{4t}}$.

41. $r(t) = (1/2 - t/3 + t^4/12)\vec{\imath} + (1/2 + \ln(t))\vec{\jmath}$.

43. $r(t) = (1+6t/\sqrt{11}+3t^2/2)\vec{\imath}+(2-2t/\sqrt{11}-t^2/2)\vec{\jmath}+(3+2t/\sqrt{11}+t^2/2)\vec{k}$.

45. $r(t) = a\cos t\vec{\imath} + a\operatorname{sen} t\vec{\jmath}$; $\quad 0 \leq t < 4\pi$.

47. $r(t) = a\cos t\vec{\imath} + b\operatorname{sen} t\vec{\jmath}$; $\quad 0 \leq t < 4\pi$.

49. Figura 2.7

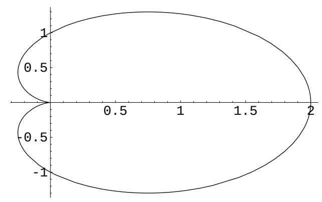


Figura 2.7: $r(\theta) = 1 + \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

53.b $C_2(t) = \cos(\frac{t}{2})\vec{\imath} - \operatorname{sen}(\frac{t}{2})\vec{\jmath} + (2\pi - \frac{t}{2})\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$

55. $|v_0| = \sqrt{10g}$.

57. Se requiere que $|v_0| = 40\sqrt{g}$ y $\theta = \pi/4$ para que se intersecten la bomba y la bala a 400 mt de altura al tiempo $t = \sqrt{\frac{800}{g}}$.

Capítulo 3

Gráficas, curvas y superficies de nivel

3.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- identificar secciones cónicas elementales;
- iniciar el estudio de la ecuación general de segundo grado en dos variables;
- encontrar la formulación matemática de problemas que involucran dos o más variables;
- determinar de manera analítica y geométrica el dominio de definición de una función de dos y tres variables definida mediante una fórmula;
- graficar curvas y superficies de nivel;
- utilizar las curvas y superficies de nivel para estudiar el comportamiento de las funciones.

3.2 Ejercicios y problemas

Dadas las ecuaciones de las parábolas, encuentre el foco y la directriz. Dibuje la parábola, su foco y su directriz.

1. $y^2 = 12x$.

2. $x = -3y^2$.
3. La parábola $y^2 = 8x$ se mueve 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha. Dé la ecuación de la parábola, encuentre el nuevo vértice, foco y directriz.

Escriba la ecuación de cada una de las elipses en forma estándar, dibuje cada una e incluya los focos.

4. $16x^2 + 25y^2 = 400$.
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$.
6. Dé la ecuación de la circunferencia con centro en $(1, 0)$ y que es tangente al eje de las ordenadas.
7. La elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ es movida 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Encuentre los focos, centro y vértices de la nueva elipse. Dibuje ambas elipses.
8. La hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ es trasladada 2 unidades a la derecha para generar la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Encuentre el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y dibújela.

Encuentre el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y radio, cuando sea apropiado, de las siguientes secciones cónicas y dibújelas.

9. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$.
10. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$.
11. $x^2 + 4x + y^2 = 12$.
12. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$.

13. La temperatura de una placa plana en la región del plano $x - y \leq -1$ es inversamente proporcional a la distancia del punto en el plano al origen. Describa la función que la representa.

Encuentre el dominio de definición de las siguientes funciones y dibújelo en el plano; dibuje sus curvas de nivel, diga cuál es el rango.

14. $f(x, y) = x - y - 2$.

15. $g(x, y) = x/y$.
16. $z(x, y) = y^2$.
17. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.
18. $u(x, y) = 4xy$.
19. $f(x, y) = (x - 4)(y + 2)$.
20. $v(x, y) = x^2 + y^2$.
21. $f(x, y) = 16x^2 + 25y^2$.
22. $z(x, y) = x^2 + 4x + y^2$.
23. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4$.
24. $u(x, y) = \dfrac{1}{-x - y}$.
25. $f(x, y) = \exp(\dfrac{2x}{x^2 + y^2})$.
26. $z(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + 5y^2 + 4x}$.
27. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - 10x - y^2 + 6y - 12}$.
28. $z(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.
29. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$.
30. $f(x, y) = (x^2 - y^2)^{1/2}$.
31. $f(x, y) = \sqrt{(x - 4)(y + 2)}$.
32. $f(x, y) = |x| + |y|$.
33. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{y + x^2}$.
34. $z(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.

Describa los valores de las siguientes funciones de dos formas:

a) dibujando la gráfica;

b) dibujando algunas curvas de nivel (al menos tres distintas).

35. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$.

36. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

37. $g(x, y) = y - \cos x$.

Determine las superficies de nivel para cada valor c indicado en cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$.

38. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, para $c = 0, -1, 1$.

39. $f(x, y, z) = 4x^2 + 3z^2$, para $c = 1, 2$.

40. $f(x, y, z) = z^2 + xy$, para $c = 0, 1$.

41. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, para $c = 0, -1, 1$.

42. $f(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$, para $c = 0, -1, 1$.

Grafique las siguientes superficies en $\mathbb{R}^3$.

43. $3x + 2y + 10z = 20$.

44. $z = 4 - x^2 - y^2$.

45. $y^2 - 9x^2 - 4z^2 = 36$.

3.3 Respuestas de algunos problemas

1. Foco: $(3,0)$; directriz: $x=-3$.

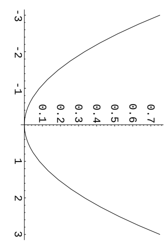


Figura 3.1: $y^2 = 12x$.

3. Foco: $(3,-2)$; directriz: $x=-1$.

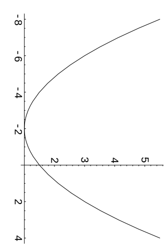


Figura 3.2: $(y+2)^2 = 8(x-1)$.

5. Focos: $(0,-1)$, $(0,1)$.

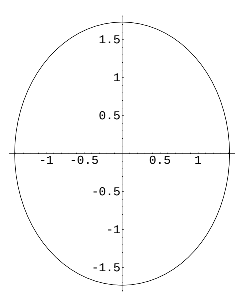


Figura 3.3: $3x^2 + 2y^2 = 6$.

7. Focos: $(-\sqrt{7}+4,3)$, $(\sqrt{7}+4,3)$. Centro: $(4,3)$.
   Vértices: $(0,3),(8,3),(4,0),(4,6)$.

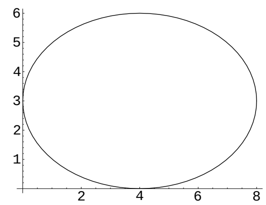


Figura 3.4: $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$.

9. Focos: $(-4,0)$, $(0,0)$. Centro: $(-2,0)$.
   Vértices: $(\sqrt{5}-2,0),(-\sqrt{5}-2,0),(-2,1),(-2,-1)$.

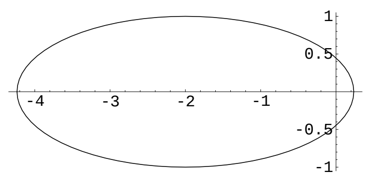


Figura 3.5: $x^2+5y^2+4x=1$.

11. Centro: $(-2,0)$; radio: 4.

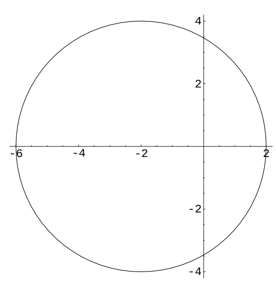


Figura 3.6: $x^2+4x+y^2=12$.

13. T =Temperatura; $T=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

15. Dom $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\}$. Rango $=\mathbb{R}$.

    Las curvas de nivel para $c\neq 0$, $g(x,y)=c$, son rectas que pasan por el origen.

Si $c = 0$, es el eje y sin el origen.

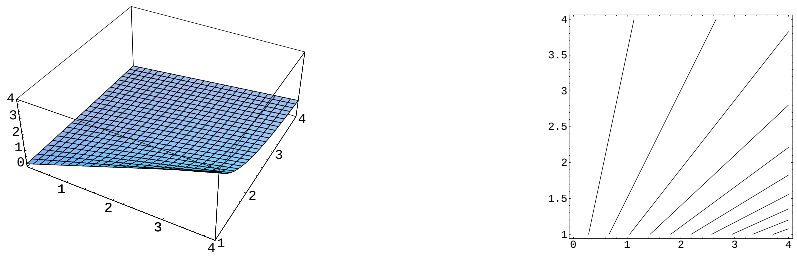


Figura 3.7: $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

17. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= [0, \infty)$.

    Las curvas de nivel son elipses con eje mayor el eje x.

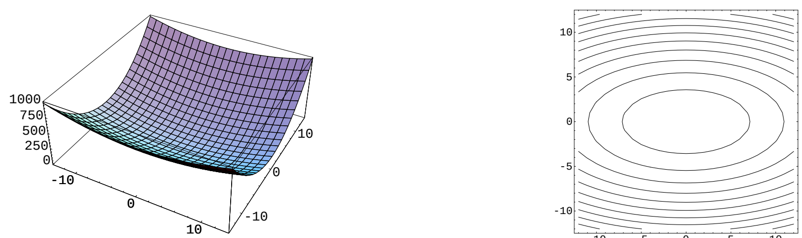


Figura 3.8: $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

19. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= \mathbb{R}$. Las curvas de nivel son hipérbolas y las rectas $x = 4$, $y = -2$.

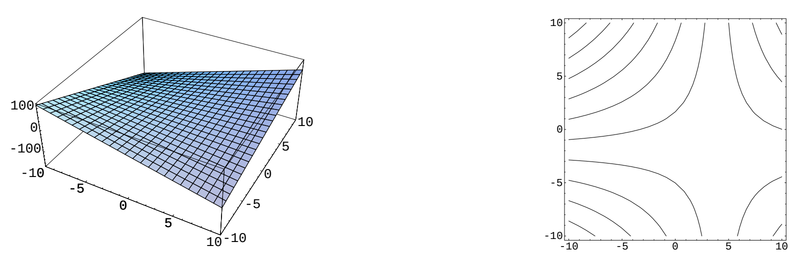


Figura 3.9: $f(x, y) = (x - 4)(y + 2)$.

21. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= [0, \infty)$. Las curvas de nivel son elipses con centro en el origen con eje mayor el eje x.

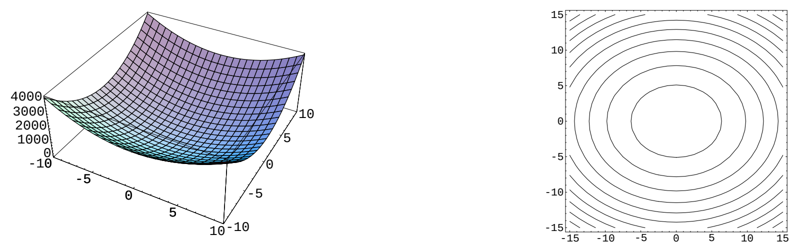


Figura 3.10: $f(x, y) = 16x^2 + 25y^2$.

23. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= [-1, \infty)$. Las curvas de nivel son hipérbolas.

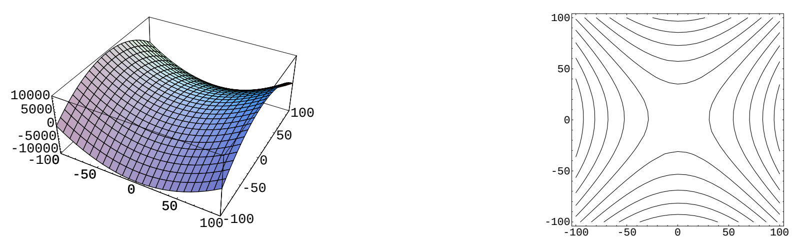


Figura 3.11: $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4$.

25. Dom $= \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Rango $= (0, \infty)$. Las curvas de nivel son círculos.

27. Dom $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 10x - y^2 + 6y - 12 \neq 0\}$.

Rango $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Las curvas de nivel son hipérbolas.

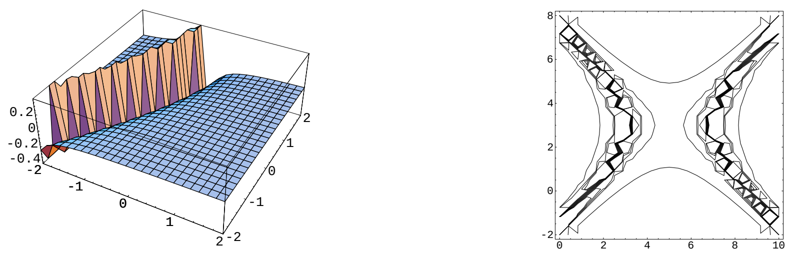


Figura 3.12: $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 10x - y^2 + 6y - 12}$.

29. Dom $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 10\}$. Rango $= [0,10]$. Las curvas de nivel son círculos.

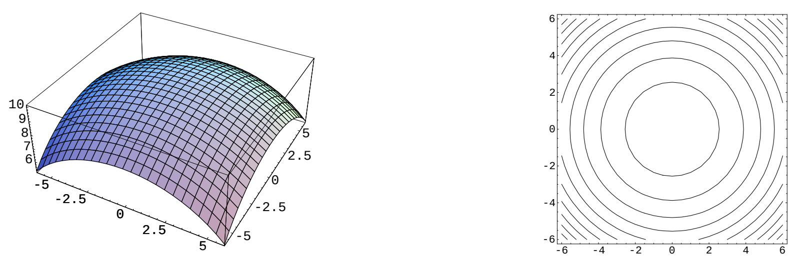


Figura 3.13: $f(x,y) = (100 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$.

31. Dom $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 4, y \geq -2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 4, y \leq -2\}$. Rango $= [0,\infty)$. Las curvas de nivel son hipérbolas.

33. Dom $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x^2\}$. Rango $= \mathbb{R}$. Para $c > 0$, las curvas de nivel son hipérbolas,mientras que para $c < 0$, son elipses. Cuando $c = 0$ es el eje x sin el origen. Las primeras dos gráficas están definidas para $(x,y) \in [-5,5] \times [1,5]$ mientras que las otras dos son para $(x,y) \in [-5,5] \times [-5,5]$.

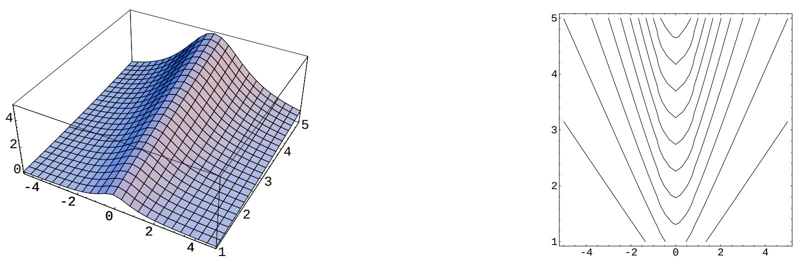


Figura 3.14: $f(x,y) = \frac{y^2}{y+x^2}$.

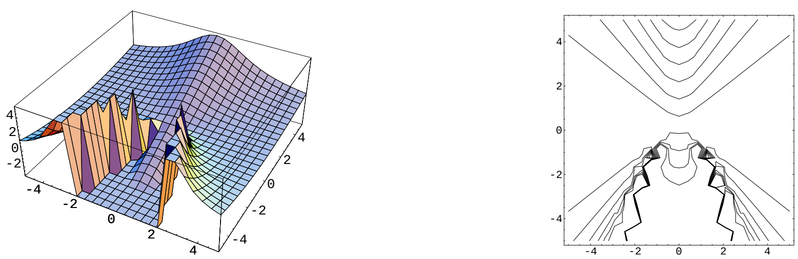


Figura 3.15: $f(x,y) = \frac{y^2}{y+x^2}$.

35. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= (-\infty, 0)$. Las curvas de nivel son círculos.

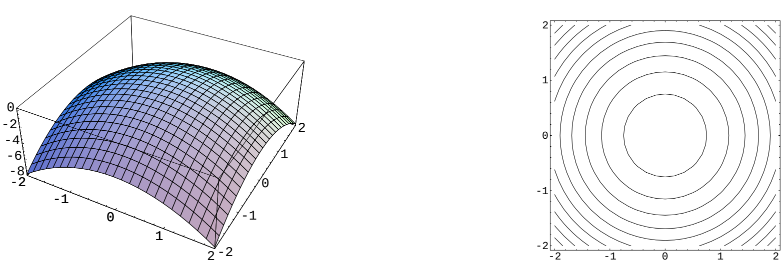


Figura 3.16: $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$.

37. Dom $= \mathbb{R}^2$. Rango $= \mathbb{R}$. Las curvas de nivel son las curvas $y = cos(x) + c$.

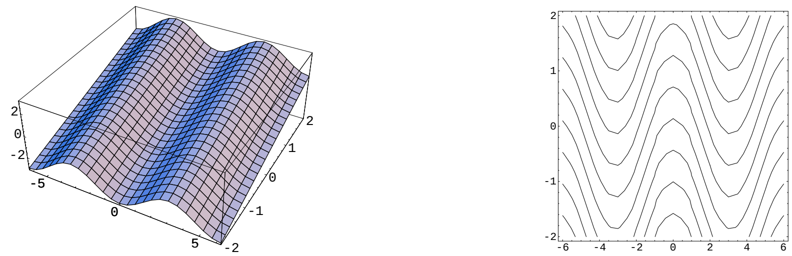


Figura 3.17: $g(x, y) = y - \cos x$.

39. Para $c = 1$, es un cilindro elíptico corriendo a lo largo del eje y. Para $c = 2$, es similar.

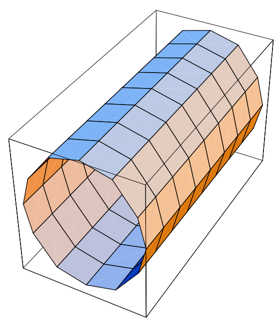


Figura 3.18: $F(x, y, z) = 4x^2 + 3z^2;\ c = 1$.

41. Para $c = 0$, es un cono. Para $c = 1$, es un hiperboloide de una hoja. Para $c = -1$, es un hiperboloide de dos hojas.

43. Es un plano cuya normal es $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 10\vec{k}$ y que pasa por el punto $P(0, 10, 0)$

45. Es un hiperboloide de dos hojas que se abre a lo largo del eje y.

Capítulo 4

Límites y continuidad

4.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- generalizar los conceptos de límite y de continuidad de funciones de una variable a funciones de dos y tres variables;
- identificar subconjuntos del plano y del espacio cuyas características le ayuden a construir argumentos que conduzcan a la solución de un problema.

4.2 Ejercicios y problemas

Calcule, de existir, el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ de las siguientes funciones. Cuando el límite no exista determine la razón de ello.

1. $f(x, y) = xy - 3x^2$;
2. $g(x, y) = e^{xy} \operatorname{sen} \dfrac{\pi y}{4} + xy \ln \sqrt{y + 1}$;
3. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$;
4. $g(x, y) = \dfrac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$;
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

6. $g(x,y) = \dfrac{1-\cos xy}{xy}$;

7. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$;

8. $g(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

9. $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$;

10. $g(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$;

11. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

12. $g(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2-1}{2x-x^2-y^2}}$.

13. Investigue el comportamiento de las curvas de nivel de la función
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$
cerca del origen. Utilice la información anterior para determinar si existe el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Determine los siguientes límites:

14. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xy(z+1)}{z^2-1}$;

15. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$;

16. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2}} + \sqrt{1-y^2-z^2}$;

17. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2+y^2+z^2}}$.

Determine el dominio y encuentre los puntos de éste en donde son continuas cada una de las funciones siguientes:

18. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
19. $f(x,y) = \tan(y/x)$;
20. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;
21. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

¿Son continuas en $(0,0)$ las siguientes funciones? Explique su respuesta.

22.
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

23.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

24.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

25. Calcule el límite de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
cuando
i) $y = ax$, y $x \to 0$.
ii)$x = 0$ y $y \to 0$.
¿De estos resultados puede inferir que f es continua en $(0,0)$?

Determine en qué puntos (x,y,z) del espacio son continuas las siguientes funciones:

26. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{3 - z^2}$;

27. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

28. $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + z^2 - 1}$.

Determine las derivadas parciales de las siguientes funciones:

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

30. $g(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(x + y)$;

31. $g(x, y) = \ln(x + y)$;

32. $f(x, y) = x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4$;

33. $f(x, y) = e^x(\cos xy - \operatorname{sen} y)$;

34. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$;

35. $f(v, w) = \arctan \dfrac{v + w}{v - w}$;

36. $f(x, y, z) = e^{xyz}$;

37. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.3 Respuestas de algunos problemas

1. El límite es igual a 0.

3. El límite es igual a 0.

5. El límite es igual a 0.

7. Al utilizar coordenadas polares se obtiene que el límite es igual a 0.

9. El límite no existe.

11. El límite no existe.

13. La curva de nivel para $c > 0$ es un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{c}}$. De esta manera, un círculo de radio pequeño corresponde a un valor de c grande. El límite no existe.

15. El límite es igual a 0.

17. El límite es igual a $\dfrac{-1}{e^2}$.

19. $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\dfrac{y}{x} \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}\}$. Se concluye que es continua en todo su dominio.

21. $\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y) \neq (0, 0)\}$. Se concluye que es continua en todo su dominio.

23. Es una función continua.

25. Los límites indicados son igual a cero, sin embargo, si se calcula el límite por una trayectoria diferente a las dadas, por ejemplo $y = x^2$ se observa que el límite no existe.

27. $\text{Dom}f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x^2 + z^2 \geq 1\}$. Se concluye que es continua en todo su dominio.

29. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

    $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

31. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{1}{x + y}$.

33. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos(xy) - \operatorname{sen}(y) - y\operatorname{sen}(xy)).$

    $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x(-\cos y - x\operatorname{sen}(xy)).$

35. $\dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{2v}{(v-w)^2 + (v+w)^2}.$

    $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{-2w}{(v-w)^2 + (v+w)^2}.$

37. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{yz(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

    $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{xz(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

    $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{xy(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$

Capítulo 5

Derivabilidad y aplicaciones

5.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- entender el concepto de derivada parcial de funciones de dos y tres variables;
- entender el concepto del gradiente de una función de varias variables y su aplicación a la determinación del plano tangente de la gráfica de funciones de dos variables y de superficies en $\mathbb{R}^3$.
- entender el concepto de diferenciabilidad para funciones de dos y tres variables;
- determinar si una función de dos o tres variables es diferenciable;
- interpretar geométricamente el concepto de derivada direccional de una función de dos o tres variables y aplicarlo a la solución de problemas;
- entender y aplicar la regla de la cadena;
- aplicar la regla de la cadena en el cambio de coordenadas de algunas ecuaciones de la física;
- entender y usar el polinomio de Taylor de primer y segundo orden para aproximar el valor de una función de dos o tres variables;
- utilizar el Teorema de la Función Implícita para calcular las derivadas de funciones definidas de forma implícita.

5.2 Ejercicios y problemas

¿Existen las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones? ¿Son continuas?

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;
3. $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden de las funciones que siguen:

4. $f(x, y) = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$;
5. $f(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$;
6. $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + x - y + z - 15$;
7. $f(x, y, z) = xyz$;
8. $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$;
9. $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(xyz)$;
10. $f(x, y, z) = yz \ln(xy)$.

Halle los gradientes de las siguientes funciones:

11. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
12. $f(x, y) = x^y$;
13. $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} \cos y$;
14. $f(x, y) = \arctan(y/x)$;
15. $f(x, y) = (x^2 - y^2)^{(x^2+y^2)}$;

16. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

17. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

18. $f(x,y) = \arctan(y/x) + \arctan(x/y)$;

19. $h(u,v,w) = \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w$;

20. $f(x,y,z) = xe^{(-x^2-y^2-z^2)}$.

21. Muestre que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3,1,10)$ es $z = 6x + 3y - 11$.

Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de las funciones dadas en el punto indicado:

22. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ P(2,2,4)$;

23. $f(x,y) = x^y,\ P(1,2,1)$;

24. $f(x,y) = 2x - 3y,\ P(1,1,-1)$.

25. Encuentre los puntos de $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $(-2,4,3)$ y $(5,-1,2)$.

    Determine si las siguientes funciones son diferenciables en P_0.

26. $g(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}, \quad P_0 = (3,3)$.

27. $f(x,y) = |xy|, \quad P_0 = (0,0)$.

28. $h(x,y) = \sqrt{|xy|}, \quad P_0 = (0,0)$.

29. ¿Tiene la gráfica de la función
$$h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
    plano tangente en el punto $P(0,0,0)$?

Determine si las siguientes funciones son continuas y tienen derivadas parciales en $(0,0)$. ¿Son diferenciables en ese punto?

30. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

31. $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

32. $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Use el criterio de la continuidad de las derivadas parciales para determinar si las siguientes funciones son diferenciables en (x_0, y_0). En caso de no cumplirse, usar la definición.

33. $f(x,y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.

34. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{2x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

35. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

36. Si $f(x,y) = x^2y\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0,y) = 0$. Calcule las derivadas parciales cruzadas (mixtas) de segundo orden de f, ¿es continua $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $(0,0)$?

Sea $F : [a,b] \to \mathrm{I\!R}$ con $F(t) = f(r(t))$. Encuentre $\dfrac{dF}{dt}$.

37. $f(x,y) = x^2 + xy, \quad r(t) = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath};$

38. $f(x,y,z) = xyz, \quad r(t) = (t^2+1, \ln t, \tan t);$

39. $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}, \quad r(t) = a\cos^2 t\vec{\imath} + b\operatorname{sen}^2 t\vec{\jmath};$

40. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad r(t) = t^2\vec{\imath} + e^t\vec{\jmath};$

41. $f(x,y,z) = xy\tan z, \quad r(t) = a\cos t\vec{\imath} + a\operatorname{sen} t\vec{\jmath} + t\vec{k}.$

Encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ para cada una de las siguientes funciones.

42. $f(x,y) = x^2 + xy$, cuando $x(u,v) = 4uv$ y $y(u,v) = uv$;

43. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ cuando $x(u,v) = e^{-(u+v)}$ y $y(u,v) = e^{uv}$.

Calcule las derivadas parciales que se indican:

44. $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$, para $z = x^2y - y^2x$ cuando $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$;

45. $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ y $\partial^2 z/\partial u\partial v$ para $z = f(x,y)$ cuando $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$;

46. dz/dt para $z = \mathrm{e}^{3x^2-2y^3}$ cuando $x = \cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$;

47. $\partial^2 z/\partial r^2$, $\partial^2 z/\partial r\partial\theta$, $\partial^2 z/\partial\theta^2$ para $z = f(x,y)$ cuando $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

Use la regla de la cadena para encontrar las derivadas parciales de segundo orden de F si $F = f\circ g$ para cada uno de los siguientes incisos.

48. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t));$

49. $f(x,y) = x^2+y^2, \quad g(u,v) = (uv^2, v-3u^2);$

50. $w = f(x,y,z), \quad g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z);$

51. $w = f(x,y,z), \quad g(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi).$

Calcule la derivada de las funciones dadas en el punto P y en la dirección del vector $\vec{v}$:

52. $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad P(1,1), \quad \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath};$

53. $f(x,y) = x^y, \quad P(1,2), \quad \vec{v} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath};$

54. $f(x,y) = 2x - 3y, \quad P(1,1), \quad \vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}.$

55. Calcule la derivada direccional de $u(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ en el punto $P(2,2,1)$ en la dirección del vector normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en dicho punto.

Para cada una de las siguientes funciones encuentre la dirección en la que f tiene máximo incremento en el punto P_0 y determine la derivada direccional en ese punto respecto al vector $\vec{u}$.

56. $f(x,y) = x^2 + xy, \quad P(1,-2)$ y $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}.$

57. $g(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad P(1,-1)$ y $\vec{u} = 3\cos\frac{\pi}{4}\vec{\imath} + 3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\vec{\jmath};$

58. Sea $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

    a) Determine $D_{\overrightarrow{u}} f$ en el punto $(1,-2)$ en la dirección que forma un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ con el eje de las abscisas.

    b) Determine las direcciones en la que la derivada direccional se anula en el punto $(1,-2)$.

59. Sean $\overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}, \quad$ y $\quad \overrightarrow{u_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}.$

    Sea f una función derivable en $P(3,5)$ y tal que la derivada de f en la dirección de $\overrightarrow{u_1}$ en el punto P es $3\sqrt{2}$ y que la derivada de f en la dirección de $\overrightarrow{u_2}$ en el punto P es $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

    (a) Encuentre el gradiente de la función en P.

    (b) Determine la dirección en que la función crece más rápidamente en P.

60. Encontrar la dirección en la que la función $w = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1,1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

61. Sea T la función que mide la temperatura en cada punto de una bola metálica. Sabiendo que T es inversamente proporcional a la distancia del punto al origen y que $T(1,2,2) = 120°$, calcule la razón de cambio máxima de la temperatura en $P_0 = (1,2,2)$.

Demuestre que la dirección de más rápido crecimiento en cualquier punto es cuando ésta apunta hacia el origen.

62. Sea $H(x, y)$ la altura de una montaña en la posición (x, y), ¿En qué dirección, a partir de $(1, 0)$, debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?

Dibuje sobre la curva de nivel c en $\mathbb{R}^2$, el vector tangente y el gradiente a la curva en el punto que se indica.

63. $f(x, y) = x^2 - y$, $P(-3, 5)$;
64. $g(x, y) = xy$, $P(3, 2)$.

65. Sea c la curva de intersección del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 1$. Encuentre la ecuación de la recta tangente T a la curva en el punto $(1, 2, 4)$. Dibuje c y T.

Dé la ecuación del plano tangente de las siguientes superficies en el punto indicado:

66. $x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $P_0(1, 0, 1)$;
67. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z = 16$, $P_0(-4, 3, 1)$;
68. $z - \operatorname{sen}(x + y) = 0$, $P_0(0, \pi/6)$.

Encuentre ecuaciones para el plano tangente y la recta normal en el punto dado de la superficie:

69. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; $\quad (1, 1, 1)$;
70. $4x^2 - y^2 + z^2 = 0$; $\quad (2, 3, \sqrt{3})$.

71. ¿Tiene la superficie del ejercicio 70 plano tangente en $(0, 0, 0)$?
72. ¿Existe el plano tangente en el punto $(0, 0, 0)$ en el cono elíptico $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$?
73. Pruebe que el plano tangente en cualquier punto del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ pasa por el origen.

74. Encuentre los puntos donde el plano tangente a la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$$

es paralelo al plano $x + 2y + 4z = -3$.

75. Dé la ecuación de la recta tangente a la curva que se obtiene la intersectar el elipsoide

$$x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 9$$

con el cilindro

$$y^2 + z^2 = 2$$

en el punto $P(1, 1, 1)$.

76. Muestre que las funciones $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$ y $f(x, y) = \arctan(y/x)$ satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

77. Muestre que la función $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ satisface la ecuación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

78. Si $z = x + f(u)$, con $u = xy$, muestre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

79. Sea $w = f(r, s, t)$ con $r = x - y$, $s = y - z$ y $t = z - x$. Muestre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

80. Sea $w = f(r, \theta)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$. Halle $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ y exprese las respuestas en términos de r y θ.

81. Sea $z = f(x, y)$ donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Muestre que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Halle una expresión de la misma naturaleza para $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Compare el resultado con lo encontrado en el ejercicio 80.

82. Si $u = f(x,t)$ y $r = x + at$ y $s = x - at$ pruebe que la ecuación de onda
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
se transforma en términos de r y s en
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r} = 0.$$

83. Pruebe que la ecuación
$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
toma la forma
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0$$
cuando se hace el cambio de variable $x = e^r$ y $y = e^s$.

84. Halle dz/dx si se sabe que $z = x^2 + y^2$ y que $y = y(x)$ es solución de la ecuación
$$x^2 + 3xy + y^2 = 1.$$

Determine el polinomio de Taylor de grado uno y dos para las siguientes funciones en los puntos indicados.

85. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad P_0(1,2);$

86. $g(x,y) = \operatorname{sen}(xy), \quad P_0(0,0);$

87. $h(x,y,z) = e^x \operatorname{sen}(y+z), \quad P_0(0,0,0);$

88. $f(x,y) = e^x \ln(1+y), \quad P_0(0,0);$

89. $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y}, \quad P_0(0,0);$

90. $f(x,y) = (x+y)^2, \quad P_0(0,0);$

91. $f(x,y) = \cos xy + \operatorname{sen} xy, \quad P_0(0,0).$

Aproxime linealmente las siguientes funciones y evalúe en el punto indicado.

92. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P_0(1.02, 1.97).$

93. $g(x,y) = \operatorname{sen} x \tan y, \quad P_0(29°, 46°)$.

Aproxime el valor de $f(P_0 + \vec{\Delta x})$ en P_0 usando diferenciales.

94. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(1,-1)$, $\quad \triangle x = 0.2$, $\triangle y = 0.1$;

95. $f(x,y,z) = xe^{yz}$, $P_0(1,-1,0)$, $\quad \triangle x = 0.2$, $\triangle y = 0.1$ y $\triangle z = -0.3$.

96. Halle la variación aproximada de la longitud de la diagonal de un rectángulo si uno de los lados mide 10cm, el otro 24cm cuando el primer lado se alarga 4mm y el segundo se acorta 1mm.

97. ¿Cuál es el orden de error que se comete al aproximar la función $f(x,y,z) = \operatorname{sen} xy + \cos xy + z$ en el punto $(1, \pi/2, 1)$ cuando los errores en x, y y z son del 1%.

98. Las medidas del diámetro y la altura de un cilindro son aproximadamente de 6 y 10, con un error del 1% respectivamente. ¿Cuál es el porcentaje de error que se comete al estimar el volumen? ¿y cuál es el error que se comete al estimar la superficie total?

99. Las longitudes a, b, y c de los lados de una caja rectangular cambian con el tiempo. Cuando $a = 1$m, $b = 2$m y $c = 3$m, $\dfrac{da}{dt} = 1$m/seg, $\dfrac{db}{dt} = 1$m/seg y $\dfrac{dc}{dt} = -3$m/seg.

    (a) ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y de la superficie de la caja en ese instante?

    (b) ¿Crecen o decrecen en magnitud las diagonales interiores de la caja?

100. Estime linealmente cuánto cambia $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si el punto $P(x,y,z)$ se mueve desde $P_0(3,4,12)$ una distancia $\delta s = 0.01$ unidades en la dirección de $3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 2\vec{k}$?

101. Sea $T = f(x,y)$ la temperatura en una región del plano donde se coloca un alambre cuya forma es la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Suponga que $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y$ y que $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 4x$. Encuentre los puntos sobre el alambre dónde se alcanzan las temperaturas máxima y mínima.

102. El periodo de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, donde ℓ es la longitud y g es la fuerza gravitacional. ¿Cuántas cifras decimales se deben tomar de π y g y qué tan grande puede ser el error en la longitud para que el péndulo pueda usarse para un reloj que deseamos que dé la hora con un error de un segundo por semana.

En los ejercicios 103 y 104, halle las diferenciales totales de las funciones en los puntos que se indican:

103. $z = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$ en el punto $(\pi/4, \pi/2)$;

104. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el punto $(1, 2, 2)$.

105. Halle la diferencial total de $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

Determine para las siguientes funciones las derivadas de segundo orden, construya el hessiano y evalúelo en el punto indicado.

106. $f(x, y) = xy^2 + e^{xy}, \quad P_0(-3, 2)$;

107. $h(x, y) = \arctan(\dfrac{y}{x}), \quad P_0(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;

108. $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P_0(1, -2, 3)$.

5.3 Respuestas de algunos problemas

1. No existen las derivadas parciales, pero sí es continua.

3. Las derivadas parciales en cero existen y son iguales a cero, pero no es continua.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2},$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy,$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x.$

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{xy^3z^3}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^3yz^3}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}},$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{x^3y^3z}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{z}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}},$

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{y}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2y^2z^2)^3}}.$

11. $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2).$

13. $\nabla f(x,y) = (2e^{x^2+y^2} x \cos y, e^{x^2+y^2}(2y \cos y - \operatorname{sen} y)).$

15.
$$\nabla f(x,y) =$$
$$= 2(x^2-y^2)^{x^2+y^2} \ln(x^2-y^2)(x,y) + 2(x^2-y^2)^{x^2+y^2} \frac{(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)}(x,-y).$$

17. $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}, \dfrac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right)$.

19. $\nabla h(u,v,w) = -2(\cos u \ \operatorname{sen} u, \cos v \ \operatorname{sen} v, \cos w \ \operatorname{sen} w)$.

21. Si $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$, la superficie son los puntos (x,y,z) que satisfacen $f(x,y,z)=0$. $\nabla f(3,1,10) = (6,3,-1)$ es el vector normal al plano tangente en $(3,1,10)$ por lo que la ecuación del plano tangente es: $6(x-3)+3(y-1)-1(z-10)=0$ que es igual a $z=6x+3y-11$.

23. $z = 2x-1$.

25. $(t, \dfrac{1}{90}+\dfrac{28t}{45}, 4t^2+9\left(\dfrac{1}{90}+\dfrac{28}{45}t\right)^2)$.

    $(t, \dfrac{1}{90}(1+56t), \dfrac{1+112t+6736t^2}{900})$.

27. Las parciales en cero existen y son iguales a cero, pero no es diferenciable en $(0,0)$ porque el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ no existe.

29. No tiene plano tangente porque las derivadas parciales en el origen no existen.

31. f no tiene límite en $(0,0)$ por lo que no es continua en ese punto y por tanto no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

33. No es diferenciable ya que las derivadas parciales no existen en el origen.

35. No es diferenciable. Las derivadas parciales existen y son iguales a cero en el origen, pero al no ser continuas en el origen se debe usar la definición de diferenciabilidad para probar que es diferenciable. No es diferenciable porque el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(2x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ no existe.

37. $\dfrac{dF}{dt} = 3t^2+2t$.

39. $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{-\cos(t)\operatorname{sen}(t)(a-2b^2\operatorname{sen}^2(t))}{\sqrt{a\cos^2(t)+b^2\operatorname{sen}^4(t)}}$.

41. $\dfrac{dF}{dt} = a^2\operatorname{sen}(2t)$.

43. $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{4e^{2uv}(1+v)}{(1-e^{2(u+v+uv)})^2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{4e^{2uv}(1+u)}{(1-e^{2(u+v+uv)})^2}$.

45. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2u\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial f}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = -2v\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -4uv\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4(u^2-v^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4uv\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

47. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \operatorname{sen}^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = r\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}) + r(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= r^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

49. $\dfrac{d^2 f}{du^2} = 108u^2 + 2v(-6+v^2)$, $\dfrac{d^2 f}{dv^2} = 2u^2+2$, $\dfrac{d^2 f}{du dv} = 4uv - 12u$.

51. $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \cos^2\varphi\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \operatorname{sen}^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &\quad + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &\quad + 2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} &= r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + r(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &\quad + r\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) \\ &\quad + \cos\varphi\ \left(\cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - \operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial f}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial r} = r\ \cos\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - r\operatorname{sen}\varphi\ \cos\varphi\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ + r(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\\ - 2\ r\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ + \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial z} - r\ \operatorname{sen}\varphi\left(\operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} &= r^2\ \cos^2\varphi\left(\ \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos^2\theta\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\\ &\quad -r\cos\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial\theta} = r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ + r^2(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\cos\varphi\ \operatorname{sen}\varphi\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ - r^2(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\ \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ - r\operatorname{sen}\varphi\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} = r^2\operatorname{sen}^2\varphi\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\ + r^2\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2r^2\ \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}^2\varphi\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ - 2r^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)\\ - r\cos\varphi\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right) - r\operatorname{sen}\varphi\ \frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}$$

53. $\sqrt{10}/5$.

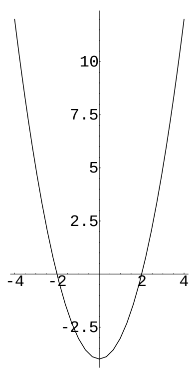
55. $D_{\vec{n}}u(2,2,1) = -2/3$.

57. La dirección de máximo crecimiento es $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ y $D_{\vec{u}}g(1,-1) = \frac{1}{2}$.

59. $\nabla f(3,5) = (7/2, 5/2)$. La función crece más rápido cuando la dirección es $\frac{7}{\sqrt{74}}\vec{\imath} + \frac{5}{\sqrt{74}}\vec{\jmath}$.

61. La función $T(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. El valor de C se determina al evaluar $T(1,2,2) = \frac{C}{3} = 120$ por lo que $C = 360$. La razón de cambio mínima es 40 que se obtiene en la dirección $-\dfrac{\nabla T(1,2,2)}{\|\nabla T(1,2,2)\|}$.

63. Se tiene que $f(-3,5) = 4$, en el plano, $f(x,y) = 4$ indica $x^2 - y = 4$. El gradiente es $-6\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ y en consecuencia el vector tangente es $-\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$.



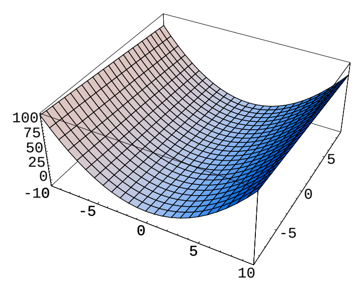


Figura 5.1: $f(x,y) = x^2 - y$, $P(-3.5)$.

65. La intersección del paraboloide con el plano es una parábola. La recta tangente a la parábola que se obtiene de intersectar el paraboloide con el plano, se encuentra como la intersección del plano tangente al paraboloide en $P(1,2,4)$ y del plano $x = 1$.

    Como la ecuación del plano tangente al paraboloide en P es $2x + 4y + z = 10$, cuando $x = 1$, se tiene que $z = 8 - 4y$.

    Una ecuación paramétrica de la recta tangente a la parábola es:

    $x = 1, y = t, z = 8 - 4t$ donde t es cualquier número real.

67. La ecuación del plano tangente en el punto señalado es: $-6x + 4y + z = 37$.

69. La ecuación del plano tangente en el punto es $x + y + z = 3$.

    Una ecuación paramétrica de la recta normal es:
    $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 2t$ donde t es cualquier número real.

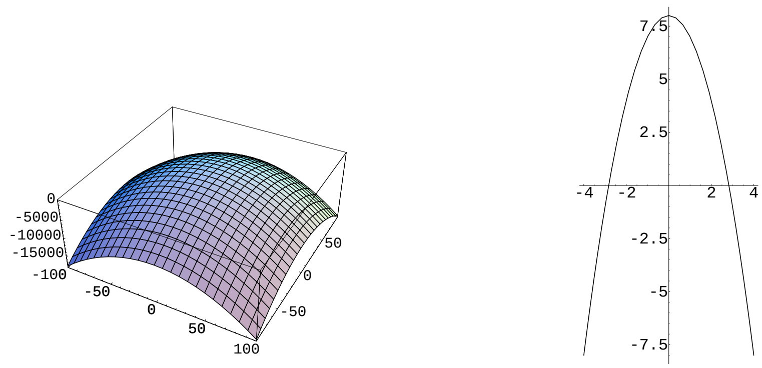


Figura 5.2: $z = 9 - x^2 - y^2$ y su intersección con el plano $x = 1$ en $P(1, 2.4)$.

71. Es un cono elíptico. No tiene plano tangente en el origen.

73. De la ecuación del cono se tiene que $z^2 = x^2 + y^2$. Si $P(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto del cono, la ecuación del plano tangente a la superficie en ese punto se convierte en $2x_0x + 2y_0y - 2z_0z = 0$, que es la ecuación de un plano que pasa por el origen.

75. Una ecuación paramétrica de la recta es:
$x = 1 - 8t$, $y = 1 - 4t$, $z = 1 + 4t$ para t real.

77. Se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= x\frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2} + y\frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} + \frac{xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} \\ &= 2\,\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2(1) = 2. \end{aligned}$$

79. Determine por la regla de la cadena cada una de las parciales y sustituya en la expresión dada.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t}.$$

81. Determine por la regla de la cadena cada una de las parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta.$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = r(-\frac{\partial z}{\partial x}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\,\theta).$$

83. Observe que u es función de las variables x e y y éstas son respectivamente variables de r y de s. Por la Regla de la Cadena se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}, \text{ y } \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Como $x = e^r$ y $y = e^s$, entonces $\frac{\partial x}{\partial r} = e^r = x$ y $\frac{\partial y}{\partial s} = e^s = y$.

Sustituyendo, $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\,x$ y $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial y}\,y$.

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x}\,x) = x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial y}\,y) = y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Por lo que,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ por hipótesis.}$$

85. Polinomio de Taylor de orden 1: $-7 + 4x + 5y$.

Polinomio de Taylor de orden 2: $x^2 + xy + y^2$.

87. Polinomio de Taylor de orden 1: $y+z$.

    Polinomio de Taylor de orden 2: $y+z+xy+xz$.

89. Polinomio de Taylor de orden 1: $-3+x+y$.

    Polinomio de Taylor de orden 2: $-7+5x+5y-x^2-2xy-y^2$.

91. Polinomio de Taylor de orden 1: 1.

    Polinomio de Taylor de orden 2: $1+xy$.

93. $\operatorname{sen}(\pi/6-\pi/180)\tan(\pi/4+\pi/180)$

    $\sim \operatorname{sen}(\pi/6)\tan(\pi/4)-\cos(\pi/6)\tan(\pi/4)(\pi/180)$

    $+\operatorname{sen}(\pi/6)\sec^2(\pi/4)(\pi/180)$

    $\sim \frac{1}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \sim \frac{1}{2} \pm .0013$

95. $\Delta f \sim df = \frac{\partial f}{\partial x}d + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \sim$

    $\sim \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)\Delta z \sim 1.6$

97. El error que se comete es de orden 1.5%.

99. (a) $\Delta V = 3\mathrm{m}^3$, $\Delta S = 0\mathrm{m}^2$.

101. La temperatura máxima se toma en $\pi/4$ o $3\pi/4$; la temperatura mínima se toma en $5\pi/4$ o $7\pi/4$.

103. $dz = 2\operatorname{sen} x\cos x dx - \operatorname{sen} y\cos y dy = dx$.

105. $du = (3x^2 = 6xy + 3y^2)dx + (-3x^2+6xy+3y^2)dy$.

107. El Hessiano en un punto genérico $(x,y)\neq(0,0)$ es $-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ y en el punto dado es igual a -1.

Capítulo 6

Máximos y mínimos

6.1 Objetivos

El estudiante será capaz de:

- plantear matemáticamente problemas de optimización con y sin restricciones;
- entender y aplicar las condiciones de primer orden para la existencia de puntos críticos de funciones de dos o tres variables;
- entender y aplicar las condiciones de segundo orden para clasificar los puntos críticos de una función de dos variables;
- entender y aplicar las condiciones de primer orden para la existencia de máximos y mínimos de una función con restricciones que da lugar al método de multiplicadores de Lagrange;
- determinar la solución de algunos sistemas de ecuaciones no lineales de varias variables.

6.2 Ejercicios y problemas

Localice y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$;
2. $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$;

3. $f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$;
4. $f(x, y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$;
5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
6. $g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
7. $f(x, y) = (1 + \mathrm{e}^y) \cos x - y\mathrm{e}^y$;
8. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + xy^2 + y^3$;
9. $f(x, y) = \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{3}x^3 - xy^2$;
10. $h(x, y) = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$;
11. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$;
12. $f(x, y) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^2y - y^2$;
13. $f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}y^2$;
14. $F(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$;
15. $F(x, y) = x^3 + 6xy + y^2 + 6x$;
16. $F(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2)$;
17. $F(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$;
18. $F(x, y) = 2x^4 - 12x^2 + y^2 + 8x$;
19. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
20. $F(x, y) = x^3 + y^3$;
21. $F(x, y) = xy(1 - x - y)$.

Clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

22. $f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + y^2 - z^2$;

23. $F(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y + 6z^2 + 3z$.

Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones sobre las curvas dadas:

24. $f(x, y) = xy$ cuando $x + y = 1$, $x, y \geq 0$;
25. $f(x, y) = x + y$ cuando $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geq 0$;
26. $f(x, y) = x + y$ cuando $x^2 + y^2 = 1$, con $x, y \geq 0$;
27. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ cuando $x^2 + y^2 = 1$, con $x, y \geq 0$;
28. $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ cuando $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geq 0$.

Determine los máximos y los mínimos absolutos de las funciones dadas en el dominio D indicado:

29. $f(x, y) = 1 + x + 2y, \quad D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
30. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x, \quad D = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$;
31. $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2 \quad D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$;
32. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la región plana acotada por $x = 0$, $y = 4$, y $y = x$;
33. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$;
34. $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen } (x + y), \quad D = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq \pi/2\}$.

35. Determine todos los valores extremos absolutos y relativos y los puntos silla de la función $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
36. Encuentre tres números cuya suma sea 9 y la suma de sus cuadrados es la más pequeña posible.
37. Un plato circular tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leq 1$. El plato, incluyendo la frontera $x^2 + y^2 = 1$, es calentado de manera que en el punto (x, y), la temperatura es $T(x, y) = x^2 + y^2 - x$. Encuentre los puntos del plato en donde se tienen las temperaturas más calientes y más frías.

38. En un plano se dan tres partículas ubicadas respectivamente en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ y con masas respectivas m_1, m_2 y m_3. ¿Cuál debe ser la ubicación del punto $P(x, y)$ para que el momento de inercia sea el menor posible? Es decir para que

$$m_1|PP_1|^2 + m_2|PP_2|^2 + m_3|PP_3|^2$$

sea lo más pequeño posible?

39. Dadas las parejas (x_i, y_i), determine la recta $f(x) = ax+b$ que satisface

$$Min \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

cuando los puntos son:

x_i	y_i
0	1
1/4	1.2840
1/2	1.6487
3/4	2.117
1	2.7183
5/4	3.4903
3/2	4.4817

Grafique los datos y la recta. Este se llama el *"método de mínimos cuadrados"*.

40. Sean $z_i, i = 1, \ldots, n$ puntos en $\mathbb{R}^3$. Para $x \in \mathbb{R}^3$ definimos

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - z_i\|^2.$$

Muestre que f tiene un mínimo en $a = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$. (centroide)

41. Se va a construir una bodega rectangular con un volumen de 10000m^3 y su interior se va a recubrir de material aislante. Los costos del material son de \$10.00 el metro cuadrado para el piso, de \$20.00 para las paredes y de \$40.00 para el techo. ¿Cuáles dimensiones minimizan su costo?

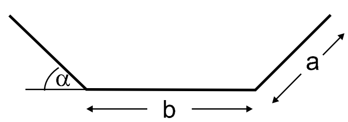
42. ¿Cuál es el volumen máximo posible de una caja rectangular inscrita en un hemisferio de radio R? (Puede suponer que una cara de la caja está en la base plana del hemisferio).

43. Se quiere diseñar una lata cilíndrica con una tapa que pueda contener un litro de agua, usando la mínima cantidad de metal.

44. Una compañía está contratada para diseñar un contenedor cilíndrico para petróleo, el contenedor está inscrito en una esfera y su capacidad es de 8000m^3. Si el director quiere usar el mínimo de material al construirlo, ¿qué radio y que altura recomendarían?

45. Un cable se corta en tres o menos piezas y cada pieza se dobla para formar un cuadrado. ¿Cómo debe hacerse esto para minimizar el área total de los cuadrados? ¿Para maximizarla?

46. Una pieza larga y plana de metal de 5cm de ancho se va a doblar para formar una canaleta de forma transversal trapezoidal (ver figura). Encuentre los valores de a, b y α que maximizan el área de la sección transversal.



47. Determine el punto (x, y) del plano, para el cual la suma de los cuadrados de su distancia a cada uno de los puntos $(0,1), (0,0)$ y $(2,0)$ sea mínima.

48. *Encuentre los números a y b con $a \leq b$, y $|a|, |b| \leq 1$, tales que $\int_a^b \operatorname{sen}(t^2 + t)\, dt$ tenga un valor máximo.

Encuentre los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones indicadas:

49. $F(x, y) = x^2 + y^2$, $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.

50. $F(x, y) = x^2 y$, $x + y = 3$.

51. $F(x, y, z) = x - 2y + 5z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

52. $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

53. Encuentre los valores extremos de $z = x^2+y^2$ que satisfacen $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$, cuando a, b son fijas. Dé una interpretación geométrica.

54. Determine los valores extremos de $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ sujetos a $x^2 + y^2 = 1$, cuando a, b son fijas. Dé una interpretación geométrica.

55. Halle los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en el elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{5} + z^2 = 1$.

56. Encuentre el punto del plano $x + 2y + 3z = 13$ más cercano a $(1, 1, 1)$.

57. Determine los puntos sobre la superficie $xyz = 1$ más cercanos al origen.

58. Encuentre los puntos de la curva $xy^2 = 54$ más cercanos al origen.

59. Encuentre el punto de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ más lejano de $(1, -1, 1)$

60. Encuentre los puntos P_0 sobre la recta $(t, -2t, t)$ y P_1 sobre la recta $(t, -t, 1)$ tales que la magnitud del segmento P_0P_1 sea mínima.

61. Encuentre el punto más cercano al origen de la línea de intersección de los planos $y + 2z = 12$ y $x + y = 6$.

62. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia del punto $(1, 1, 1)$ a la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - y - 2z = 0$.

63. Encuentre los puntos P_0 sobre la recta $x-y = 2$ y P_1 sobre la parábola $y = x^2$ tales que la longitud del segmento P_0P_1 sea mínima.

64. Use multiplicadores de Lagrange para hallar el paralelepípedo rectangular de mayor volumen con superficie S dada.

65. Halle los semi-ejes de la elipse

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1.$$

Note que los semi-ejes son los puntos de la elipse más cercanos y más alejados del centro.

66. Encuentre los puntos de la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$$

más cercano y más alejados del plano $x + 2y + 4z = -3$.

67. Encuentre el mínimo volumen para la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en un punto del primer octante.

68. Encuentre los extremos de $f(x, y, z) = x^2+y^2+(z-1)^2$ cuando (x, y, z) está sujeto a las restricciones:

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \quad \text{y} \quad x + y + z = 3.$$

Dé una interpretación geométrica del problema.

69. Encuentre los valores extremos de $f(x, y, z) = xy + z^2$ sobre el círculo en el cual el plano $y - x = 2$ intersecta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

70. Halle los puntos de la curva intersección de las dos superficies más próximos al origen.

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

71. Un inversionista desea integrar un portafolio con tres acciones cuyos rendimientos promedio semanal son 1, 2 y 3, respectivamente. Denotemos con r_i, el rendimiento del i-ésimo activo. Sea w_i el porcentaje de un monto M que se invertirá en cada acción. El riesgo del portafolio está dado por la varianza del mismo. Si suponemos que la varianza de los rendimientos de los activos seleccionados es igual a 1 y que éstos no están correlacionados, el riesgo del portafolio está dado por $R(w_1, w_2, w_3) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$. Determine el porcentaje que se debe invertir en cada acción si se desea que el riesgo del portafolio sea mínimo, su valor igual a M y el rendimiento del portafolio, que es igual a $r_1w_1 + r_2w_2 + r_3w_3$, sea r^*, con r^* un real positivo dado. Suponga que se permiten ventas en corto, es decir se puede pedir prestado al banco dinero para invertir lo que implica que las $w_i \in \mathbb{R}$.

72. Demuestre que si $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

¿Cuando se tiene la igualdad?

6.3 Ejercicios complementarios

73. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Pruebe que

(a) $(0,0)$ es un punto crítico de f.

(b) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ cuando se restringe a cualquier recta que pasa por el origen.

(c) $(0,0)$ no es un mínimo relativo de f.

74. Minimizar $f(x,y,z) = axy + byz + czx$ sujeto a $V(x,y,z) = xyz = d$, a, b, c, d parámetros.

75. Maximizar $V(x,y,z) = xyz$ sujeto a $f(x,y,z) = axy + byz + czx = d$, a, b, c, d parámetros. Comparar con el anterior.

76. Un triángulo con lados x, y y z tiene un perímetro fijo $2s = x+y+z$. Su área está dada por la fórmula de Herón: $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para mostrar que, entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el de mayor área.

77. La condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ no es una condición suficiente para encontrar soluciones al problema

$$\min f(x,y) \quad \text{sujeto a} \quad g(x,y) = 0.$$

Considere la función $f(x,y) = x^2 y$ y dibuje sus curvas de nivel, con restricción $x + y = 1$. El método de multiplicadores de Lagrange da como valores posibles $(0,1)$ y $(2/3, 1/3)$, verifíquelo. Dé razones para decidir que sobre la recta $x+y=1$, la función dada no alcanza valores máximo y mínimo.

78. Halle los puntos P_0 sobre la recta $X_0 + t\overrightarrow{v}$ y P_1 sobre la recta $Y_0 + t\overrightarrow{w}$ tales que $|P_0P_1|$ es mínima.

79. Encuentre el punto del plano $ax + by + cz = d$ más cercano al punto (x_0, y_0, z_0).

6.4 Respuestas de algunos problemas

1. $(0,1)$ es un punto silla.

3. $(0,0)$ es un punto de máximo local, $(-6,3)$ y $(6,3)$ son puntos silla.

5. $(1,0)$ es un punto de mínimo local.

7. $(2\pi n, 0)$ con $n \in \mathbb{Z}$ son puntos de máximo local, $(2\pi n + \pi, -2)$ con $n \in \mathbb{Z}$ son puntos silla.

9. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ es un punto de máximo local, $(0,0)$ es mínimo local, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\right)$ son puntos silla.

11. $(0,0)$ es un punto silla. $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son puntos de mínimo local.

13. $(0,0)$ es un punto silla.

15. $(3+\sqrt{7}, -9-3\sqrt{7})$ es un punto de mínimo local. $(3-\sqrt{7}, -9+3\sqrt{7})$ es un punto silla.

17. $(0,0)$ es un mínimo local, $(\pm\sqrt{2}, -1)$ son puntos silla.

19. $(0,0)$ es un punto silla, $(1,1)$ es un punto de mínimo local.

21. $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ son puntos silla, $(1/3.1/3)$ es punto de máximo local.

23. $(0,1,1/4)$ es un punto de mínimo local.

25. El máximo es $\sqrt{2}$ que se toma en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})/2)$ y el mínimo es -1 que se toma en $(-1,0)$.

27. El máximo es 2 que se toma en el punto $(1,0)$ y el mínimo es 1 que se toma en $(0,1)$.

29. El máximo es 3 que se toma en el punto $(0,1)$ y el mínimo es 1 que se toma en $(0,0)$.

31. El máximo es 2 que se toma en el punto $(1/2,1/2)$ y el mínimo es -32 que se toma en $(1,0)$.

33. El máximo es 13 que se toma en el punto $(2,-1)$ y el mínimo es -1 que se toma en los puntos $(0,-1)$ y $(1,1)$.

35. Puntos silla en $(0,0)$, $(\pm 1,0)$ y $(0,\pm 1)$. Puntos de máximo relativo $(1/2,1/2)$ y $(-1/2,-1/2)$. Puntos de mínimo relativo $(-1/2,1/2)$ y $(1/2,-1/2)$. Mínimo absoluto -1, que se toma en $(1,1)$ máximo absoluto $1/8$, que se toma en $(1/2,1/2)$ y $(-1/2,-1/2)$.

37. La temperatura menor es $-1/4$, que es un mínimo absoluto de la función y se toma en el interior de la región en el punto $(1/2,0)$; la temperatura máxima es 2 que se toma en el punto $(-1,0)$.

39. La función que se debe minimizar es
$$\begin{aligned} F(a,b) = (b-1)^2 + (\frac{a}{4} + b - 1.284)^2 + (\frac{a}{2} + b - 1.6487)^2 \\ + (\frac{3a}{4} + b - 2.117)^2 + (a + b - 2.7183)^2 \\ + (\frac{5a}{4} + b - 3.4903)^2 + (\frac{3a}{2} + b - 4.4817)^2 \end{aligned}$$
que tiene un mínimo en $a = 3.19714$, $b = -0.045$. Es decir, la recta buscada es $y = 3.19714x - 0.045$.

41. El piso debe ser cuadrado, con 20m de lado y la altura de 25m.

43. La lata debe tener la misma altura y radio iguales a $\pi^{-1/3}$.

45. La función que se debe optimizar es $f(a,b,c) = (a/4)^2 + (b/4)^2 + (c/4)^2$ sujeto a $a+b+c = L$. El mínimo se toma en $a = b = c = L/3$ y el máximo en $a = b = 0$ y $c = L$.

47. El punto que minimiza es $(2/3, 1/3)$.

48. Obs. Recuerde el Teorema Fundamental del Cálculo.

49. El mínimo es 0 cuando $x = y = 0$ y el máximo es 20 cuando $x = 2$ $y = 4$.

51. El mínimo es -30 que se toma en $(-1,2,-5)$, el máximo es 30 que se toma en $(1,-2,5)$.

52. Obs. Despejar directamente x^2 de la restricción no proporciona las mismas soluciones que usar multiplicadores de Lagrange. Explique la razón.

53. El mínimo es $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ que se toma en $\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\right)$.

55. El mínimo es -5 que se toma en $(-1/5, 2, -2/5)$, el máximo es 5 que se toma en $(1/5, -2, 2/5)$.

57. El punto más cercano es $(1, 1, 1)$.

59. El punto más lejano es $(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}})$.

61. El punto más cercano es $(2, 4, 4)$.

63. Sug. El punto sobre la recta es $(x, x-2)$ y el punto sobre la parábola es (y, y^2). Los puntos son $(11/8, -5/8)$ y $(1/2, 1.4)$.

65. Los puntos más alejados son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ los cuales distan 1 del origen (semi eje mayor). Los puntos más cercanos son $\left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}\right)$ que distan $1/3$ del origen (semi eje menor).

67. La función que se debe optimizar es $f(x, y, z) = \dfrac{a^2b^2c^2}{6xyx}$, sujeta a la condición dada. ¿Por qué? El volumen mínimo es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$, que se toma cuando $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ y $x = \pm\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

69. El máximo es 1 que se toma en $(-1, 1 \pm \sqrt{2})$, el mínimo es 0 que se toma en $(-2, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$.

71. Se quieren hallar máximos o mínimos de $R(w_1, w_2, w_3) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ sujeto a las restricciones $r^* = w_1 + 2w_2 + 3w_3$ y $1 = w_1 + w_2 + w_3$. Se obtiene $w_1 = \dfrac{8-3r^*}{6}$, $w_2 = \dfrac{1}{3}$, y $w_3 = \dfrac{3r^*-4}{6}$. Como ésta es la única posibilidad y R debe tomar un valor mínimo, entonces se obtiene que el riesgo es mínimo para estos valores de w_i.

Bibliografía

1 Apostol T. M. Calculus. Vol 2. Segunda edición. Editorial Reverté. 1992.

2 Bressoud D. M. Second year Calculus: From celestial Mechanics to Special relativity. Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in mathematics. SpringerVerlag New York Inc. 2001.

3 Courant R. y John F. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. 2. Limusa y Noriega Editores. 1993.

4 Edwards C. H. Jr. y Penney D. E. Cálculo con Geometría Analítica. 4a. Edición Ed. Prentice Hall 1996.

5 Fraleigh J. B. Cálculo con Geometría Analítica. Fondo Educativo Interamericano, 1980.

6 Hasser N. B., LaSalle J. P. y Sullivan J. A. Análisis matemático Vol. 2 Curso intermedio. Editorial Trillas. 1983.

7 Kaplan, W. Advanced calculus. Cuarta edición. Redwood City, Calif: Addison Wesley. Advanced Book Program. 1991.

8 Marsden J.E. y Tromba A. J. Cálculo Vectorial. Pearson Educación. Madrid 2004.

9 Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral. Tomo II. Sexta edición. Editorial Mir. 1983.

10 Swokowski E. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. 1989.

11 Steward J. Cálculo. Grupo Editorial Iberoamérica. 1994.

12 Thomas G. B. Jr y Finney R. L. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.