

El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas

Patricia Saavedra Barrera¹ y Víctor Hugo Ibarra Mercado ²

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, psb@xanum.uam.mx

²Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac. ESFM-IPN, vibarra@anahuac.mx

Índice general

1. Integración numérica por Monte-Carlo	5
1.1. Introducción	5
1.2. Integración Numérica	6
1.3. El método Monte-Carlo	7
1.4. Integración Múltiple	10
2. Valuación de opciones por Monte-Carlo	15
2.1. Introducción a las Opciones	15
2.2. Valuación de una opción europea.	17
2.3. Valuación de opciones asiáticas	19
2.4. Esquemas numéricos	22
2.5. Resultados de la simulación Monte Carlo	24
3. Métodos de reducción de varianza	27
3.1. Variable de control	27
3.2. Resultados numéricos con reducción de varianza	31
A. Anexo I	35
A.1. Generadores de números aleatorios	35
A.2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios	37
A.3. Generación de números aleatorios con otras distribuciones	39

Capítulo 1

Integración numérica por Monte-Carlo

1.1. Introducción

En finanzas matemáticas un problema frecuente es el valorar instrumentos financieros cuyos rendimientos son aleatorios. Por ejemplo los instrumentos de renta variable, las inversiones en la bolsa o los derivados, cuyos rendimientos dependen del comportamiento de una acción o de un bien como el oro o el petróleo.

La valuación de estos instrumentos se reduce, al cálculo de una esperanza de una función continua de una variable aleatoria.

Recordemos algunos conceptos de probabilidad. Sea x una variable aleatoria continua, si su función de densidad es $f(x)$, en un intervalo $[\alpha, \beta]$, la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor $a \in [\alpha, \beta]$ está dado por

$$P[X \leq a] = \int_{\alpha}^a f(x) dx.$$

La probabilidad es el área bajo la curva $y = f(x)$ del punto α al punto a .

El cálculo de la esperanza y de la varianza de una variable aleatoria x continua con función de densidad $f(x)$ se definen por

$$E(x) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx, \quad Var(x) = E[x^2] - E[x]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - E[x]^2.$$

De igual forma se puede definir la esperanza de un función continua de una variable aleatoria. Sea $g : \Re \rightarrow \Re$ continua en el intervalo $[\alpha, \beta]$ entonces

$$E[g(x)] = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)f(x) dx.$$

Con frecuencia no es posible aplicar un método de integración para calcular en forma exacta la integral. En ese caso hay que aproximar la integral por medio de un método de integración numérica como el método del trapecio o de Simpson.

1.2. Integración Numérica

Supongamos que nos interesa calcular $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$. Esta integral no puede calcularse por medio de un método de integración por lo que hay que aproximarla por medio de la integral de un polinomio que aproxime a $e^{-s^2/2}$ en el intervalo $[0, x]$.

Sea $f(x) : [a, b] \rightarrow \Re$ una función acotada en $[a, b]$ entonces la integral de f se puede aproximar integrando un polinomio constante, lineal o cuadrático que interpola a f en $[a, b]$.

1. La fórmula el rectángulo se obtiene al interpolar a $f(x)$ por medio del polinomio constante $p_0(x) = f(\frac{a+b}{2})$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = R(f).$$

2. La fórmula del trapecio se obtiene al interpolar a f por medio de un polinomio lineal $p_1(x) = \alpha x + \beta$ que satisfaga $f(a) = p_1(a)$, y $f(b) = p_1(b)$. Determinar el polinomio lineal es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales para α y β cuya solución es

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \beta = \frac{f(b)a - f(a)b}{b-a}.$$

Al integrar $p_1(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se obtiene la regla del trapecio con $h = b - a$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = T(f).$$

El error está dado por

$$\int_a^b f(x) dx - T(f) = -\frac{h^3}{12}(f''(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

3. Por último al integrar el polinomio cuadrático que interpola a f en $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$, y $x = b$ se obtiene la regla de Simpson con $h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(b)) = S(f).$$

El error que se comete al usar Simpson es

$$\int_a^b f(x) dx - S(f) = \frac{h^5}{90}(f^{(4)}(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^3$, $\int_0^1 x^3 dx = 0.25$; $R(f) = 0.125$, $T(f) = 0.5$, y $S(f) = 0.25$. En este caso Simpson es exacta ya que integra en forma exacta a polinomios de grado menor o igual a 3.

2. Sea $f(x) = e^{-x^2/2}$ estimar $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$. $R(f) = 0.8824969$, $T(f) = 0.803265$ y $S(f) = 0.856086267$.

Otro método numérico que nos permite aproximar el valor de una integral es el método de Monte-Carlo cuyo fundamento matemático es probabilístico.

1.3. El método Monte-Carlo

Se sabe por la Ley de los Grandes Números que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua X con distribución F es el valor promedio de una muestra finita de variables aleatorias, independientes con distribución F . Es decir

$$E(X) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i.$$

Como la esperanza de una variable aleatoria continua es una integral, la media muestral se puede usar para estimar el valor de una integral. Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo.

Esta idea se puede generalizar para estimar el valor esperado de una función G continua cuyo argumento es una variable aleatoria con distribución F . Si se tiene una muestra de variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas con distribución F , entonces

$$E(G(x)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(X_i).$$

Aplicación al cálculo de integrales

En el caso que nos ocupa, se desea estimar la integral de una función G continua, esta integral puede verse como el cálculo del valor esperado de la función G cuando se aplica a una variable aleatoria con distribución uniforme. Supongamos que el intervalo de integración es $[0, 1]$ y sea x_1, x_2 hasta x_M una muestra de variables aleatorias, independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ entonces

$$\int_0^1 G(x) dx = E(G(x))$$

con x una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.

De esta forma, con base en la Ley de los Grandes Números, esta integral se puede aproximar por

$$\int_0^1 G(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(X_i).$$

Todo el problema se reduce a generar la muestra. Por otro lado, observemos que cualquier integral sobre el intervalo $[a, b]$ se puede transformar a una integral sobre el

intervalo $[0, 1]$ con el siguiente cambio de variable $x = a + (b - a)u$ con $dx = (b - a)du$ entonces

$$\int_a^b G(x) dx = (b - a) \int_0^1 G(a + (b - a)u) du \approx \frac{(b - a)}{M} \sum_{i=1}^M G(a + (b - a)u_i),$$

con u_i variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$.

La mayoría de los programas generan variables pseudo-aleatorias con distribución uniforme con la instrucción *rand*.

Ejemplo

Usemos lo anterior para aproximar el valor de

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.5}^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Transformemos primero la integral al intervalo $[0, 1]$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{(2.5u)^2}{2}} du \approx \frac{5}{M\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^M e^{-\frac{(2.5u_i)^2}{2}}, \\ &= 1.0066 \quad \text{para } M = 100. \end{aligned}$$

El resultado no es bueno si comparamos con el valor que se obtiene al usar las tablas de la normal acumulada que es igual a 0.987580. Con trapecio, que requiere únicamente de dos evaluaciones de la función se obtiene el valor de 1.041 y con Simpson 0.955889. ¿Cómo se relaciona el error que cometemos con el tamaño de M de la muestra?

Estimación del error

El Teorema del Límite Central nos permite estimar el error que se comete al usar Monte-Carlo para estimar una integral. Sean $I = E(g(x))$ e $\tilde{I}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i)$ entonces si σ es la desviación estándar de $g(X)$, se tiene que $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ es la desviación estándar de \tilde{I}_M , por lo que

$$P(|I - \tilde{I}_M| < \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}) \approx P(|Z_M| < c) = 2\Phi(c),$$

con $Z_M = \frac{I - \tilde{I}_M}{\sigma/\sqrt{M}}$, $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2}$ y c se selecciona dependiendo de la probabilidad que se dese obtener. Por ejemplo si se quiere que la probabilidad sea .95 se selecciona a c como 1.96.

Por lo tanto el error que se comete al usar el método de Monte-Carlo es aproximadamente $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$. Como observamos, si $\sigma \approx 1$, se requiere de $M = 10^4$ para tener al menos dos cifras significativas.

Este resultado nos permite estimar un intervalo de confianza de $\alpha\%$. Para ello se selecciona c de tal forma que $\Phi(c) = \frac{\alpha}{2}$. De esta forma, con probabilidad α podemos asegurar que el valor exacto de la integral I está en el intervalo

$$\left[\tilde{I} - \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}, \tilde{I} + \frac{c\sigma}{\sqrt{M}} \right].$$

El problema para usar el resultado anterior es que hay que conocer el valor de la desviación estándar de $g(x)$. Lo que se hace en la práctica es estimarla por la varianza muestral $\tilde{\sigma}^2$, ver [12], que se calcula por

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (g(X_i) - \tilde{I}_M)^2.$$

Con ese estimador podemos determinar el tamaño que se requiere que tenga M para tener la precisión deseada. Por ejemplo, si se desea tener un intervalo de confianza del 95 % de longitud 10^{-2} se debe escoger $M > (1.96)^2 \tilde{\sigma}^2 10^4$.

El algoritmo de Monte-Carlo para estimar un intervalo de confianza del 95 % de la esperanza de una función $F(x)$, con x una variable aleatoria uniforme estándar es el siguiente:

1. Denotemos por Var_i e I_i a la varianza acumulada y al promedio acumulado hasta la iteración i , respectivamente.
2. Sea $Var_1 = 0$; $\tilde{I}_0 = 0$; Sea U_1 una uniforme en $(0, 1)$ y $\tilde{I}_1 = F(U_1)$.
3. Para $i = 2, \dots, M$ generar números aleatorios U_i uniformes.
4. $\tilde{I}_{i+1} = \tilde{I}_i + \frac{F(U_{i+1}) - \tilde{I}_i}{i+1}$; $Var_{i+1} = (1 - \frac{1}{i})Var_i + (i+1)(\tilde{I}_{i+1} - \tilde{I}_i)^2$.
5. $I \in [\tilde{I}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{I}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}]$.

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para distintos valores de M .

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
10	0.93986596	1.158364144	1.376862327	0.436996367
100	0.939873981	1.006610869	1.073347758	0.133473777
1000	0.955515509	0.976122422	0.996729335	0.041213826
10000	0.981765121	0.988230900	0.994696679	0.012931558
100000	0.986738285	0.988788375	0.990838466	0.004100182

Figura 1.1: Aproximaciones mediante el método Monte-Carlo a la integral.

Por lo que con 100000 evaluaciones de la función se obtiene una aproximación con dos cifras significativas. Es un hecho que Monte-Carlo converge lentamente por lo que no puede competir con Simpson o Trapecio para el cálculo de integrales en una variable, pero para el cálculo de integrales múltiples se vuelve competitivo e inclusive mejor que cualquier otro método de integración numérica.

1.4. Integración Múltiple

En la sección anterior se analizó como evaluar integrales con dominio en un intervalo real. Ahora bien, si el dominio es una región de \mathfrak{R}^2 , en la que las fronteras izquierda y derecha sean segmentos de rectas verticales, ($x = a$ y $x = b$) y la frontera inferior y superior estén dadas por las curvas $y = l(x)$ y $y = s(x)$, respectivamente y $l(x) < s(x)$, $x \in (a, b)$. La integral doble en ese dominio es:

$$\int_a^b \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy dx \quad (1.1)$$

Si bien, los problemas de integrales dobles no siempre aparecen en la forma (1.1), se supondrá que el problema se pudo reescribir en la forma anterior, en donde quizá sea necesario intercambiar x y y .

El problema de calcular la integral se resolverá convirtiéndolo al cálculo de integrales unidimensionales. Para esto, se define

$$J(x) \equiv \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy, \quad (1.2)$$

así que (1.1) se puede escribir como

$$I(x) = \int_a^b J(x) dx. \quad (1.3)$$

Se puede obtener una aproximación numérica para (1.3) aplicando cualquiera de las fórmulas de integración numérica analizadas en la sección anterior, lo cual se puede expresar como

$$I(x) \approx \sum_{i=0}^n w_i J(x_i). \quad (1.4)$$

Aquí, las w_i son los pesos y las x_i los puntos de la fórmula de integración que se utilice. Ahora bien, para $x = x_i$ la ecuación (1.2) queda

$$J(x_i) \equiv \int_{l(x_i)}^{s(x_i)} f(x_i, y) dy. \quad (1.5)$$

El anterior es un problema unidimensional y se puede evaluar mediante alguna de las fórmulas de integración numérica.

Ejemplo Evalúe la siguiente integral,

$$I = \int_1^2 \int_{x-1}^{x^2} \sqrt{x+y} dy dx,$$

utilice la regla de Simpson.

Solución En este caso, $a = 1$, $b = 2$, $l(x) = x - 1$ y $s(x) = x^2$.

Aplicando el procedimiento descrito, y mediante la regla de Simpson, la integral anterior se puede aproximar por

$$I \approx \frac{h_x}{3} (H(x_0) + 4H(x_1) + H(x_2)),$$

en donde,

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2,$$

además, $h_x = \frac{b-a}{2} = 0.5$ y cada $H(x_i)$ está dada por

$$H(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i^2} \sqrt{x_i + y} dy.$$

Por lo que, la aproximación de I está dada por:

$$I \approx \frac{h_x}{3} \left[\int_{1-1}^{1^2} \sqrt{1+y} dy + 4 \int_{1.5-1}^{1.5^2} \sqrt{1.5+y} dy + \int_{2-1}^{2^2} \sqrt{2+y} dy \right],$$

Empleando la regla de Simpson para la primera integral se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+y} dy &\approx \frac{0.5}{3} [\sqrt{1+0} + 4\sqrt{1+0.5} + \sqrt{1+1}] \\ &\approx 1.218865508 \end{aligned}$$

De forma análoga, para las otras integrales se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{2.25} \sqrt{1+y} dy &\approx 2.955468605, \\ \int_1^4 \sqrt{1+y} dy &\approx 6.333410962. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación final de la integral es

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{0.5}{3} [1.218865508 + 4(2.955468605) + 6.333410962] \\ &= 3.229025149 \end{aligned}$$

De una forma similar se pueden calcular integrales múltiples. Pero, entre mayor sea la dimensión, mayor será el número de puntos en donde se debe evaluar la función. Así por ejemplo, considérese una región de integración rectangular, si en cada eje se subdivide el intervalo correspondiente en n subintervalos, entonces, para el caso de la fórmula extendida de Simpson se tendrán $(n+1)^2$ puntos de \mathfrak{R}^2 en donde se debe evaluar la función $f(x, y)$. De aquí, es claro que si integramos una función $g : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$, cuyo dominio es un *rectángulo* de \mathfrak{R}^m y en cada dirección se toman n subintervalos, el número de puntos en donde se debe evaluar la función g es de orden n^m . Este valor crece rápidamente por lo

que una alternativa útil para aproximar integrales de dimensiones altas es el método de Monte Carlo.

Al igual que en el caso de una dimensión, supóngase que se está interesado en calcular

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

Como se comentó en la sección (1.1), I se puede expresar mediante la esperanza siguiente:

$$I = E[g(U_1, U_2, \dots, U_m)],$$

en donde U_1, U_2, \dots, U_m son variables aleatorias independientes, que se distribuyen de manera uniforme en $(0, 1)$.

Ahora, si se toman n conjuntos independientes, cada uno de ellos con m variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0, 1)$, se tiene

$$(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), i = 1, \dots, n$$

entonces, ya que las variables aleatorias

$$g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), i = 1, \dots, n,$$

son independientes e idénticamente distribuidas con media I , podemos utilizar nuevamente la ley fuerte de los grandes números para estimar I mediante la media aritmética $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i)$.

Con base en lo anterior, se debe observar que el algoritmo para aproximar la integral y determinar los intervalos de confianza, es el mismo al que se dio en el caso unidimensional. Nótese que, si σ es la desviación estándar de $g(U_1, U_2, \dots, U_m)$ entonces se tiene que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar de \hat{I}_n , por lo que

$$P\left(\left|I - \hat{I}_n\right| < \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx P(|Z_n| < c) = 2\Phi(c),$$

con $Z_n = \frac{I - \hat{I}_n}{\sigma/\sqrt{n}}$, $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2}$ y c se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo si se quiere que la probabilidad sea 0.95 se selecciona a c como 1.96.

Ejemplo Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dy dx$$

Empleando el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95 %.

El valor verdadero con 5 decimales de precisión es 4.89916.

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	3.72101	4.73637	5.75174	2.03072
1000	4.03326	4.33065	4.62804	0.59478
10000	4.68907	4.80356	4.91804	0.22897
100000	4.86826	4.90544	4.94262	0.07436
1000000	4.88963	4.90131	4.91299	0.02336
10000000	4.89526	4.89895	4.90264	0.00738
100000000	4.89794	4.89911	4.90028	0.00233

Figura 1.2: Aproximaciones mediante Monte-Carlo a la integral doble.

Ejemplo Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 2^{-7} \left(\sum_{i=1}^8 x_i \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_8$$

Empleando el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95% y los resultados están redondeados a 6 decimales.

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	0.118581	0.128523	0.138465	0.019884
1000	0.126927	0.130067	0.133207	0.006280
10000	0.129007	0.129999	0.130991	0.001984
100000	0.129975	0.130295	0.130616	0.000641
1000000	0.130027	0.130128	0.130229	0.000202
10000000	0.130173	0.130205	0.130237	0.000064

Figura 1.3: Aproximaciones mediante Monte-Carlo a una integral múltiple.

El valor verdadero es $\frac{25}{192}$, el cual con 6 decimales de precisión es 0.130208.

Capítulo 2

Valuación de opciones por Monte-Carlo

2.1. Introducción a las Opciones

Un derivado es un instrumento financiero cuyo rendimiento depende de otro bien o activo que se conoce como subyacente.

Una opción europea es un contrato entre dos personas para adquirir o vender un bien o un activo llamado subyacente a un precio y en una fecha fijados de antemano. A la fecha se le llama fecha de maduración y al precio se le conoce como precio de ejercicio. Si la opción es de compra se llama un call, si es de venta se llama un put.

1. En una opción siempre hay dos partes: por un lado, quien compra la opción y por otro quien la suscribe.
2. El primero adquiere el derecho, pero no la obligación, de ejercer la opción en la fecha de maduración.
3. En cambio, la contra-parte se obliga a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses.
4. Para compensar esta asimetría y que el contrato sea justo para ambas partes, quien compra la opción le paga a quien la suscribe una prima que le permita cubrirse contra futuras pérdidas, debidas al cambio de precio del subyacente durante la vigencia de la opción.

Una opción puede negociarse en el mercado secundario por lo que es importante determinar su valor V_t para cada tiempo $t \in [0, T]$. En particular, la prima que se paga al adquirir la opción es igual al valor de la opción en el tiempo $t = 0$. La ganancia que obtiene quien adquiere la opción se llama función de pago o pay-off y claramente depende del valor del subyacente. Denotemos a esta función como h . $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con regla de correspondencia igual a

$$h(S) = \text{máx}\{S(T) - K, 0\}$$

en caso de un call e igual a

$$h(S) = \text{máx}\{K - S(T), 0\}$$

en caso de un put.

Hay una gran variedad de opciones en el mercado y éstas se clasifican según su función de pago y la forma en que pueden ejercerse. Las opciones que tienen como función de pago a h , la función antes definida, se llaman opciones vainilla. Hay otras opciones llamadas exóticas cuya función de pago depende de la trayectoria que siga el precio del subyacente. Por ejemplo, entre las exóticas está la opción asiática cuya función de pago tiene como variable dependiente al promedio del subyacente a lo largo del tiempo de maduración.

O sea para un call se tiene que

$$h(S) = \text{máx} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S(x) dx - K, 0 \right\}.$$

Otras opciones se distinguen por la forma en que se ejercen. Ya vimos que las europeas se ejercen únicamente en el tiempo de maduración. Las americanas pueden ejercerse en cualquier tiempo $t \in [0, T]$, mientras que la opción Bermuda sólo tiene un número finito de tiempos de ejercicio. El problema matemático a resolver para estas opciones es un poco distinto al de las europeas, pues al mismo tiempo que hay que valuarlas también hay que determinar el momento óptimo de ejercerlas.

Marco teórico

1. Se tienen un espacio de probabilidad (Ω, F, P) .
2. No hay arbitraje: no se puede obtener una ganancia sin invertir algo y el mercado es completo.
3. El precio del subyacente S_t es un proceso estocástico continuo en el intervalo $[0, T]$ que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

en donde μ es la tendencia y $\sigma > 0$ la volatilidad del subyacente, W_t es un browniano estándar.

4. Existe un activo libre de riesgo $S_t^0 = e^{rt}$ para el periodo T .
5. Se pueden comprar o vender fracciones de activos.
6. No hay pago de dividendos ni costos de transacción.

Observaciones:

1. El browniano es el límite de una caminata aleatoria cuando hacemos tender Δt a cero. Satisface que $W_t(0) = 0$ y que los incrementos $W_t - W_s$ son independientes y se distribuyen como una normal con media cero y varianza $t - s$ para $s \leq t$.
2. La tendencia y la volatilidad dependen del subyacente y pueden ser estimados a partir de datos históricos a través de la media y la desviación estándar muestral:

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right),$$

y

$$\sigma = \left(\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \left(\ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right) - \mu \right)^2 \right)^{1/2}.$$

2.2. Valuación de una opción europea.

Supongamos que se tienen una opción put con duración de 6 meses sobre una acción de Telmex a un precio $S_0 = 50$. Supongamos que el precio de ejercicio $K = 52$ y que la volatilidad del subyacente es igual al 12% anual y que la tasa de interés libre de riesgo es del 6% anual. ¿Cuál debe ser el valor de la prima del put para que la opción sea un contrato justo para ambas partes?

La ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

tienen como solución exacta a

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

El hecho que el mercado sea viable y completo nos permite asegurar que existe una única probabilidad P^* , llamada probabilidad de riesgo neutro, para la cual el precio del subyacente es de la forma

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right),$$

con B_t , $t \in T$, un movimiento browniano estándar dado por

$$B_t = W_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma} t.$$

Bajo la probabilidad P^* , $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{e^{rt}}$ es una martingala. Es decir,

$$E^*(\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \tilde{S}_t.$$

Este resultado nos permite concluir que el valor de una opción europea también es una martingala y su valor está dado por

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid \mathcal{F}_t),$$

con $h(S_T)$ la función de pago de la opción. Por lo que el valor de la opción europea vainilla V_t puede obtenerse por

$$\begin{aligned} V_t &= F(t, x) = E^*(e^{-r(T-t)} h(S_t e^{r(T-t) + \sigma(B_T - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) \mid \mathcal{F}_t). \\ V_t &= E^*(e^{-r(T-t)} h(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}})), \\ V_t &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}) e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

Por lo que si $h(S) = (S_T - K)_+$ entonces

$$F(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{r(t-t)} N(d_2), \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

A la expresión (2.1) se le llama la fórmula de Black-Scholes.

Aplicación de Monte-Carlo a la valuación de opciones europeas

En el caso de la valuación de opciones europeas, el método Monte-Carlo se usa para calcular la siguiente integral

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} h(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}})).$$

Algoritmo Monte-Carlo para valuar opciones europeas

Para valuar una opción al tiempo cero o sea V_0 , denotemos por $I = V_t$ y a Var_i por la varianza acumulada hasta la iteración i .

1. Se toma a r como la tasa anual de CETES correspondiente al período T y se estima la volatilidad anual σ , con información histórica de los precios del subyacente.

2. Se inicializan las variables: $Var_1 = 0$; $\tilde{I}_0 = 0$; y $\tilde{I}_1 = h(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_1 \sqrt{T}})$, con y_1 una normal con media cero y varianza uno.
3. Para cada trayectoria i , con $i = 2, \dots, M$ se genera una variable aleatoria y_i normal con media cero y varianza uno y se calcula

$$h_i = h\left(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}}\right).$$

4. Se calculan $\tilde{I}_{i+1} = \tilde{I}_i + \frac{h_i - \tilde{I}_i}{i+1}$, $Var_{i+1} = (1 - \frac{1}{i})Var_i + (i+1)(\tilde{I}_{i+1} - \tilde{I}_i)^2$.
5. Se determina el intervalo de confianza del 95%

$$I \in \left[\tilde{I}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{I}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para el caso de un put con datos: $K = 52$, $S_0 = 50$, $T = 6$ meses, $r = 0.06$ y $\sigma = 0.12$. El valor exacto del put es 1.9415. La siguiente tabla muestra los valores que se obtienen con Monte-Carlo para distintos valores de M .

M	Put	Lím. Sup.	Lím. Inf.	Long. Inter.
100	2.0498	1.5401	2.5595	1.0194
1000	2.0213	1.8604	2.1823	0.3219
10000	1.9509	1.9019	2	0.0981
100000	1.9386	1.923	1.9541	0.0311
1000000	1.9447	1.9398	1.9496	0.0098

Figura 2.1: Estimaciones del valor de la opción europea Put.

2.3. Valuación de opciones asiáticas

Las opciones que se comentaron en la sección anterior, europeas y americanas, dependen sólo del valor que tiene el subyacente, S_t , en el instante que se ejerce. Por ejemplo, para el caso de una opción europea, si al final del tiempo de maduración el precio sufre un cambio fuerte, la opción cambiaría bruscamente de estar *in the money* a estar *out the money*. Una forma de evitar estos cambios repentinos en el precio de la opción, es suscribir un contrato sobre el valor promedio del precio del subyacente. Por otro lado, el hecho de que una opción esté basada en una media, reduce cualquier distorsión posible en los precios debida a la carencia de un mercado suficientemente amplio del subyacente. Quizá lo anterior sean las dos principales razones por las que la utilización de este tipo de opciones ha tenido un gran auge en el ámbito financiero en los últimos años.

El hecho de que el pago en el momento de ejercicio dependa de una media, posibilita muchos usos para este tipo de opciones. Por otro lado, debido a que fue el Banco Trust de Tokio la primera institución financiera que ofreció este tipo de opciones, se les denomina opciones asiáticas. Además como el precio no depende del precio spot sino del precio medio, son opciones dependientes de la trayectoria del precio del subyacente.

Existen diversos tipos de opciones asiáticas y se clasifican de acuerdo con lo siguiente.

1. La media que se utiliza puede ser aritmética o geométrica. La que más se utiliza en la actualidad es la media aritmética. Por otro lado, si la media utilizada es la geométrica el cálculo del precio de la opción es relativamente fácil de calcular.
2. Si la media se calcula para el precio del subyacente, entonces la opción se dice que tiene precio de ejercicio fijo. O bien, si la media se utiliza para el precio de ejercicio, entonces se dice que la opción tiene precio de ejercicio flotante.
3. Si la opción sólo se puede ejercer al final del tiempo del contrato se dice que es asiática de tipo europeo o *euroasiática*, y si puede ejercer en cualquier instante, durante la vigencia del contrato se denomina asiática de tipo americano.

Por lo anterior, básicamente los tipos de opciones euroasiáticas son:

- Call con precio de ejercicio fijo, con función de pago: $(A - K)_+$.
- Put con precio de ejercicio fijo, con función de pago: $(K - A)_+$.
- Call con precio de ejercicio flotante, con función de pago: $(S - A)_+$.
- Put con precio de ejercicio flotante, con función de pago: $(A - S)_+$.

En donde, A es el promedio del precio del subyacente. En caso de que el promedio sea aritmético, se tiene que:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt,$$

mientras que si el promedio es geométrico, entonces,

$$A = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt \right).$$

Como se comentó antes, la valuación de opciones con media geométrica es relativamente sencilla, pero el hecho de que la media sea aritmética, plantea ciertas dificultades. La primera es que el valor de la opción depende de la trayectoria, por lo que si se utiliza un modelo de árbol binario, se deben tomar en cuenta todas las posibles trayectorias. Si se tienen n nodos, el número de trayectorias posibles es 2^n , lo cual, para valores altos de n se vuelve computacionalmente difícil de calcular.

La segunda es, en el marco de valuación de precios de Black y Scholes, que si el proceso de los precios del subyacente sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, la media arimética no se distribuye lognormal. De hecho, su distribución es muy complicada de caracterizar, (véase Linetsky [11]).

En esta parte, se abordará el caso de la opción euroasiática, que de aquí en adelante sólo se denominará opción asiática, y en particular se analizará el call asiático con precio de ejercicio fijo.

Se supondrá un solo activo con riesgo, cuyo proceso de precios

$$\{S_t | t \in [0, T]\}$$

es un movimiento browniano geométrico, en un mercado que satisface las suposiciones del modelo de Black y Scholes [1]. Bajo estos supuestos, existe una medida de probabilidad, P^* , denominada *de riesgo neutro*, bajo la cual el precio del activo, S_t , satisface la ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

en donde, $S_0 > 0$, r la tasa libre de riesgo, σ la volatilidad, T el tiempo de maduración y $\{W_t | t \in [0, T]\}$ es un movimiento browniano estándar.

Se sabe que la solución de (2.2) está dada por

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + (W_{t_2} - W_{t_1})\sigma} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad (2.3)$$

Por otro lado, la función de pago para un call asiático de promedio aritmético y con precio de ejercicios fijo, está dado por

$$\max\{A(T) - K, 0\} = (A(T) - K)_+$$

En donde,

$$A(x) = \frac{1}{x} \int_0^x S_u du$$

Por medio de argumentos de arbitraje se puede ver que el valor en el tiempo t de la opción call asiática está dado por:

$$V_t(K) = e^{-r(T-t)} E^* [(A(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t],$$

en donde, como ya se había dicho, P^* es la probabilidad de riesgo neutro. Y como se demuestra en la proposición 1, lo anterior se reduce a calcular:

$$e^{-r(T-t)} E [(A(T) - K)_+]$$

Proposición 1.

$$V_t(K) = e^{-r(T-t)} E [(A(T) - K)_+]. \quad (2.4)$$

Demostración 1. Véase Wilmot [13].

□

Obsérvese que calcular el call en un tiempo posterior que se inicia el cálculo del promedio, equivale a valorar una opción call como si se acabase de emitir, pero con un precio de ejercicio modificado.

Para el caso en que $t_0 = 0$ y $t = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} V_0(K) &= e^{-rT} E[(A(T) - K)_+], \\ V_0(K) &= e^{-rt} E\left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)_+\right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cuando no haya problema de ambigüedad, denotaremos a $V_0(K)$ simplemente con V_0 . La expresión (2.5) es la que se utilizará posteriormente para el cálculo del valor del call asiático con precio de ejercicio fijo.

Al igual que en el caso de las opciones estándar, no es restrictivo tratar sólo con el call, ya que el valor del put, con las mismas características, puede calcularse por medio de la paridad put-call para opciones asiáticas, véase [3], [11] o [2].

Paridad put-call para opciones asiáticas

$$\begin{aligned} e^{-rt} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)_+ - e^{-rt} E\left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt\right)_+ \\ = e^{-rt} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right). \end{aligned}$$

Los métodos para calcular el precio de la opción se pueden agrupar en tres tipos, aquéllos que utilizan un modelo binomial (árboles binarios), los que plantean la solución de una ecuación diferencial parcial y los que utilizan métodos Monte Carlo.

2.4. Esquemas numéricos

Con base en los resultados de la sección anterior, la expresión que se quiere calcular es:

$$V_0 = e^{-rT} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)_+, \quad (2.6)$$

la cual proporciona el valor de un call asiático con precio de ejercicio fijo.

Con el objeto de hacerlo mediante el método Monte Carlo, es necesario que se calcule el promedio de S_u , en el intervalo $[0, T]$, y por tanto el valor de la integral en el mismo

intervalo. Se debe notar que, como se está suponiendo que el precio del subyacente se rige por un movimiento browniano geométrico, entonces su valor se puede simular de manera exacta.

Se desarrollarán dos esquemas numéricos para aproximar el valor de

$$Y_T = \int_0^T S_u du. \quad (2.7)$$

Para los dos esquemas se dividirá el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de igual longitud, $h = \frac{T}{N}$, esto determina los tiempos $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N$, en donde $t_i = ih$ para $i = 0, 1, \dots, N$.

En el primer esquema numérico se tendrá como base las sumas de Riemann, ya que la aproximación se hará de acuerdo con:

$$\int_0^T S_u du \approx h \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \quad (2.8)$$

De este modo, si con el método de Monte Carlo se generan M trayectorias, entonces la aproximación estará dada por:

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{h}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+.$$

Si en la ecuación anterior se sustituye $h = \frac{T}{N}$ se obtiene

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+ \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es el esquema 1 del método Monte Carlo que se utilizará para aproximar V_0 .

Para obtener un segundo esquema, se aproxima (2.7) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du, \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} [S_{t_i} + S_{t_{i+1}}], \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ S_{t_i} + S_{t_i} e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Se desarrolla en serie de Taylor y se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} \left(2 + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 h^2 + 2 \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \sigma^2 \right\} + \dots \right. \end{aligned}$$

Suponiendo que h es pequeña, sólo se conservan los términos de orden a lo más h y observando que debido a que la variación cuadrática de $\frac{1}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma$ se cancela con $-\frac{1}{2} \sigma^2 h$, se obtiene:

$$\int_0^T S_u du \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma).$$

Con base en lo anterior, se tiene:

$$\widehat{V}_0^{(2)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma) - K \right]_+. \quad (2.10)$$

La relación 2.10 es el segundo esquema, que se empleará para aproximar V_0 por el método Monte Carlo.

En la sección siguiente se muestran los resultados de las aproximaciones obtenidas con los esquemas dados en (2.9) y (2.10).

2.5. Resultados de la simulación Monte Carlo

Los esquemas desarrollados en la sección anterior se programaron utilizando el lenguaje VBA (Visual Basic for Applications), en una computadora PC con procesador Pentium IV de 2.0 GHz.

Como caso de prueba se seleccionó el de un call asiático con precio inicial, $S_0 = 100$, precio de ejercicio $K = 100$, tasa libre de riesgo $r = 0.10$, volatilidad $\sigma = 0.20$ y $T = 1$ año. Cuyo precio es ≈ 7.04 .

	S	K	r	σ	T	
	100	100	0.1	0.20	1	
Tray. Monte Carlo	Núm. pasos en el tiempo	Aproxi- mación	Linferior	Lsuperior	Longitud al 95 %	Tiempo (mm:ss)
1000	10	6.5899	6.0893	7.0906	1.0013	< 1 s
	50	6.5080	5.9911	7.0249	1.0338	< 1 s
	100	7.0716	6.5466	7.5966	1.0501	< 1 s
5000	10	6.4873	6.2693	6.7052	0.4359	< 1 s
	50	6.8459	6.6152	7.0765	0.4613	< 1 s
	100	7.0105	6.7755	7.2455	0.4700	0:01
10000	10	6.4025	6.2479	6.5571	0.3092	0:01
	50	7.0881	6.9203	7.2558	0.3355	0:01
	100	7.0960	6.9273	7.2647	0.3373	0:02
50000	10	6.4079	6.3391	6.4768	0.1377	0:02
	50	6.8592	6.7860	6.9323	0.1463	0:06
	100	6.9668	6.8923	7.0413	0.1491	0:11
100000	10	6.4427	6.3942	6.4913	0.0971	0:04
	50	6.8972	6.8452	6.9492	0.1040	0:12
	100	6.9903	6.9377	7.0429	0.1053	0:21
500000	10	6.4192	6.3975	6.4409	0.0434	0:21
	50	6.9212	6.8979	6.9445	0.0466	0:58
	100	6.9824	6.9589	7.0060	0.0471	0:45
1000000	10	6.4182	6.4028	6.4335	0.0307	0:42
	50	6.9190	6.9025	6.9355	0.0330	1:57
	100	6.9768	6.9602	6.9934	0.0332	3:34

Figura 2.2: Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann*.

	S	K	r	σ	T	
	100	100	0.1	0.20	1	
Tray. Monte Carlo	Núm. pasos en el tiempo	Aproxi- mación	Linferior	Lsuperior	Longitud al 95 %	Tiempo (mm:ss)
1000	10	6.4952	6.0186	6.9718	0.9532	< 1 s
	50	7.1938	6.6286	7.7590	1.1303	< 1 s
	100	7.5005	6.9466	8.0544	1.1078	< 1 s
5000	10	7.0340	6.7996	7.2684	0.4689	< 1 s
	50	6.8884	6.6488	7.1281	0.4793	00:01
	100	7.1410	6.9008	7.3812	0.4804	00:01
10000	10	7.0037	6.8366	7.1708	0.3342	00:01
	50	7.1240	6.9563	7.2918	0.3355	00:01
	100	7.1121	6.9426	7.2815	0.3389	00:02
50000	10	7.0649	6.9897	7.1401	0.1504	00:02
	50	7.0722	6.9972	7.1472	0.1500	00:07
	100	7.0176	6.9426	7.0927	0.1502	00:11
100000	10	7.0527	6.9997	7.1058	0.1061	00:04
	50	7.0234	6.9706	7.0762	0.1057	00:12
	100	7.0197	6.9668	7.0726	0.1058	00:23
500000	10	7.0298	7.0062	7.0534	0.0472	00:22
	50	7.0417	7.0180	7.0654	0.0474	01:02
	100	7.0494	7.0256	7.0731	0.0475	01:54
1000000	10	7.0330	7.0163	7.0497	0.0334	00:44
	50	7.0435	7.0268	7.0603	0.0335	02:05
	100	7.0423	7.0255	7.0590	0.0335	03:49

Figura 2.3: Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapecio*.

Si se quiere aumentar la precisión, debe aumentarse el número de trayectorias en el método de Monte Carlo, y también el número de subintervalos de tiempo, con lo que el tiempo de computadora aumentaría de manera significativa; por lo que parece necesario utilizar algún método que reduzca la varianza de las aproximaciones obtenidas por los métodos anteriores. Eso es lo que se buscará hacer en la sección siguiente.

Capítulo 3

Métodos de reducción de varianza

La principal desventaja el método Monte-Carlo es la lentitud con la que converge. La rapidez de convergencia depende del número de trayectorias que se generan para calcular el promedio y de la varianza de la función. Por lo que se ha buscado reducir σ/\sqrt{M} disminuyendo la varianza. ¿Cómo plantear el problema de forma distinta para reducir la varianza al mismo tiempo que se obtiene la estimación de la esperanza que nos interesa calcular? Este problema se ha atacado por distintas técnicas entre las que destacan: variables de control, variables antitéticas, muestreo de importancia, por condicionamiento y por muestreo estratificado, entre otras.

3.1. Variable de control

Esta técnica consiste en encontrar otra variable que esté correlacionada con la variable de interés.

Supongamos que X es una variable aleatoria, para la cual deseamos obtener una estimación de $E(X)$. Sea Y otra variable aleatoria, tal que $E(Y)$ es conocida. Si definimos una tercer variable aleatoria Z por:

$$Z = X + \beta[Y - E(Y)].$$

Entonces, $E[Z] = E(X + \beta[Y - E(Y)])$. Es fácil ver que:

$$E(Z) = E(X).$$

Pero,

$$Var(Z) = Var(X) + \beta^2 Var(Y) + 2\beta cov(X, Y).$$

Como se puede apreciar, la $Var(Z)$ es una función cuadrática de β . El valor de β , llamémosle β^* , que minimiza el valor de $Var(Z)$, es:

$$\beta^* = -\frac{cov(X, Y)}{Var(Y)}.$$

El valor mínimo está dado por:

$$\text{Var}(X + \beta^*[Y - E(Y)]) = \text{Var}(X) - \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(Y)}. \quad (3.1)$$

La reducción relativa de la varianza la obtenemos, si dividimos la ecuación (3.1) entre $\text{Var}(X)$,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}(X + \beta^*[Y - E(Y)])}{\text{Var}(X)} &= 1 - \frac{[\text{cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \\ &= 1 - [\rho(X, Y)]^2. \end{aligned}$$

En donde, $\rho(X, Y)$ es el coeficiente de correlación entre X y Y y está dado por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

La ecuación (3.1) nos dice que la reducción de varianza obtenida al emplear la variable de control Y es de $100\rho^2(X, Y)\%$.

Por lo regular, aunque $E(Y)$ es conocida, los valores de $\text{Var}(Y)$, de $\text{cov}(X, Y)$, así como de $\text{Var}(X)$, no son conocidos, sino que se tienen que estimar a partir de los datos simulados.

Si tenemos M parejas de datos simulados, $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, M$, podemos emplear

$$\widehat{\text{cov}}(X, Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{M - 1},$$

y

$$\widehat{\text{Var}}(Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{M - 1},$$

como los estimadores de interés. Con esto podemos aproximar β^* por medio de $\hat{\beta}^*$, en donde

$$\hat{\beta}^* = -\frac{\widehat{\text{cov}}(X, Y)}{\widehat{\text{Var}}(Y)}.$$

Ahora bien, la varianza del estimador de $Z = X + \beta^*[Y - E(Y)]$ está dada por

$$\text{Var}((\bar{X} + \beta^*[\bar{Y} - E(Y)])) = \frac{1}{n} \left(\text{Var}(X) - \frac{\text{cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \right).$$

Cálculo de la esperanza de la variable de control

En el caso de las opciones asiáticas con media aritmética, se sabe que aunque el precio del subyacente tenga una distribución lognormal, la media aritmética tiene una distribución que sólo es tratable numéricamente, véase Linetsky [11]. Ahora bien, la media geométrica es una cota inferior para la media aritmética, y por otro lado su esperanza

puede calcularse como se indica a continuación; por lo que se utilizará como nuestra variable de control.

El valor esperado de la variable de control es $\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[e^{\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt\right)} - K \right]_+$.

Sustituyendo $S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ en la ecuación anterior, tenemos:

$$\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[\left(S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_t dt} - K \right)_+ \right].$$

Y como puede verse en Lamberton [9], se tiene que el valor de \tilde{V}_0 está dado por

$$\tilde{V}_0 = e^{-\frac{1}{2} \left[r + \frac{\sigma^2}{6} \right] T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \quad (3.2)$$

en donde,

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}},$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T/3}$$

Aplicación de reducción de varianza

Con base en la sección anterior y de acuerdo con el método desarrollado por Kemna y Vorst [6], en el que proponen aproximar $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ por medio de $e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du}$. Estas dos variables aleatorias esperamos que sean similares, para valores de r y σ no demasiado grandes. De hecho la segunda, que es una media geométrica continua, es una cota inferior para la primera.

Es fácil ver que la variable aleatoria $e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du}$ tiene una distribución normal y su esperanza está dada por,

$$E \left[e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du} - K \right)_+ \right] = e^{-\frac{1}{2} \left[r + \frac{\sigma^2}{6} \right] T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

que tiene una forma del estilo de la fórmula de Black y Scholes.

Por lo tanto, podemos emplear como variable de control a la variable aleatoria Z , definida por

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du} - K \right)_+.$$

Ahora bien, como podemos sustituir S_t por $S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u}$, al hacer esto en la ecuación anterior, tenemos

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u}\right) du} - K \right)_+,$$

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \left[\int_0^T \ln(S_0) du + \int_0^T \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u du + \sigma \int_0^T W_u du \right]} - K \right)_+,$$

$$Z = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du} - K \right)_+.$$

Se debe notar que la variable de control se calcula con la misma trayectoria del movimiento browniano, que ya se utilizó para la variable S_t . Por lo que debemos adaptar cada uno de los esquemas para simular la variable de control.

Entonces, los esquemas para la aproximación de la variable de control Z quedan de la manera siguiente:

$$Z_T^{R,n} = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} h W_{t_k}} - K \right)_+ \quad (3.3)$$

$$Z_T^{T,n} = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (W_{t_k} + W_{t_{k+1}})} - K \right)_+ \quad (3.4)$$

En cada uno de los cuales utilizamos el mismo tipo de aproximación para $\int_0^T W_u du$ que para $\int_0^T S_u du$.

En la siguiente sección se presentan los resultados de las aproximaciones obtenidas al aplicar los esquemas anteriores.

3.2. Resultados numéricos con reducción de varianza

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron para el caso de prueba, un call asiático con precio de ejercicio fijo y la técnica de reducción de varianza, para aproximar su valor. Se aplicará a la valuación de la opción asiática del capítulo anterior, los valores de los parámetros son: $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 10\%$, $\sigma = 20\%$ y $T = 1$ el valor

	S	K	r	σ	T	
	100	100	0.1	0.20	1	
Tray. Monte Carlo	Núm. pasos en el tiempo	Aproxi- mación	Límite inferior	Límite superior	Longitud al 95 %	Tiempo (mm:ss)
1000	10	6.7592	6.7761	6.7931	0.0339	< 1 s
1000	50	6.9823	6.9975	7.0128	0.0305	< 1 s
1000	100	6.9924	7.0073	7.0222	0.0298	< 1 s
5000	10	6.7837	6.7911	6.7986	0.0148	< 1 s
5000	50	6.9875	6.9944	7.0014	0.0139	00:01
5000	100	7.0085	7.0153	7.0221	0.0136	00:01
10000	10	6.7807	6.7860	6.7914	0.0107	< 1 s
10000	50	6.9909	6.9959	7.0009	0.0100	00:01
10000	100	7.0125	7.0175	7.0224	0.0100	00:03
50000	10	6.7807	6.7860	6.7914	0.0107	< 1 s
50000	50	6.9909	6.9959	7.0009	0.0100	00:01
50000	100	7.0125	7.0175	7.0224	0.0100	00:03

Figura 3.1: Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann* con reducción de varianza.

	S	K	r	σ	T	
	100	100	0.1	0.20	1	
Tray. Monte Carlo	Núm. pasos en el tiempo	Aproximación	Límite inferior	Límite superior	Longitud al 95 %	Tiempo (mm:ss)
1000	10	7.0367	6.7978	7.2757	0.2390	00:00:00
1000	50	7.0285	6.7903	7.2667	0.2382	00:00:00
1000	100	7.0349	6.8003	7.2695	0.2346	00:00:00
5000	10	7.0435	6.9314	7.1556	0.1121	00:00:00
5000	50	7.0403	6.9621	7.1185	0.1126	00:01:39
5000	100	7.0437	6.9320	7.1554	0.1117	00:00:01
10000	10	7.0403	6.9604	7.1201	0.0799	00:00:01
10000	50	7.0419	6.9625	7.1213	0.0794	00:00:01
10000	100	7.0387	6.9586	7.1188	0.0801	00:00:02
50000	10	7.0402	7.0049	7.0755	0.0107	00:00:03
50000	50	7.0401	7.0047	7.0755	0.0100	00:00:06
50000	100	7.0408	7.0057	7.0760	0.0100	00:00:11

Figura 3.2: Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapezio* con reducción de varianza.

Los resultados anteriores se obtuvieron con la implementación del algoritmo siguiente para el cálculo del valor de la opción asiática,

$$I = V_0 = e^{-rT} E \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right].$$

Algoritmo Monte-Carlo con reducción de varianza para valorar una opción call asiática con precio de ejercicio fijo.

Denotemos con:

X_i al valor obtenido para la opción mediante el esquema (2.9) con la trayectoria i .

Y_i al valor obtenido para la variable de control mediante el esquema (3.3) con la trayectoria i .

\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i las medias aritméticas del valor de la opción y de la variable de control, respectivamente, hasta la iteración i .

$VarX_i, VarY_i$ y $CovXY_i$ a la varianza del valor de la opción, la varianza de la variable de control y la covarianza entre estas variables, respectivamente, hasta la iteración i .

1. Entrada: Valor inicial del subyacente S_0 , precio de ejercicio K , tiempo de maduración T , la tasa libre de riesgo r , volatilidad anual σ .
2. Inicializar valores: $\tilde{X}_0 = 0, VarX_1 = 0, VarY_1 = 0$ y $CovXY_1 = 0$.

3. Calcular \tilde{X}_1 con el esquema (2.9) y \tilde{Y}_1 mediante el esquema (3.3)
4. Hacer $\tilde{X}_1 = X_1$ y $\tilde{Y}_1 = Y_1$.
5. Para cada trayectoria i , con $i = 2, \dots, M$
 - a) Calcular X_i, Y_i
 - b) Calcular $\tilde{X}_i = \tilde{X}_{i-1} + \frac{X_i - \tilde{X}_{i-1}}{i}$, $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_{i-1} + \frac{Y_i - \tilde{Y}_{i-1}}{i}$.
 - c) Calcular $Var X_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) Var X_{i-1} + i \left(\tilde{X}_i - \tilde{X}_{i-1}\right)^2$.
 - d) Calcular $Var Y_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) Var Y_{i-1} + i \left(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1}\right)^2$
 - e) Calcular $Cov XY_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) Cov XY_{i-1} + \frac{1}{i} \left(X_i - \tilde{X}_{i-1}\right) \left(Y_i - \tilde{Y}_{i-1}\right)$
6. Actualizar los valores de $\tilde{X}_M, \tilde{Y}_M, Var X_M, Var Y_M$ y $Cov XY_M$, “trayéndolos” a valor presente.
7. Calcular EY mediante la fórmula (3.2) y $\beta = \frac{Cov XY_M}{Var Y_M}$.
8. Calcular $Z_M = \tilde{X}_M + \beta(\tilde{Y}_M - EY)$ y $Var Z_M = Var X_M - \frac{(Cov XY_M)^2}{Var Y_M}$
9. Se determina el intervalo de confianza del 95 %

$$I \in \left[\tilde{Z}_M - \frac{1.96\sqrt{Var Z_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{Z}_M + \frac{1.96\sqrt{Var Z_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

Apéndice A

Anexo I

A.1. Generadores de números aleatorios

Una forma de generar números aleatorios es lanzar una moneda al aire, tirar un dado o sacar una carta de una baraja o dando de vueltas a un disco, que tiene inscritos a lo largo de la circunferencia números, y que se mueve por medio de una fuerza mecánica no determinista. Estos procedimientos son útiles siempre que se desee generar un número pequeño de números aleatorios, pero si se desea generar miles de ellos se requieren procedimientos que puedan hacer uso de las computadoras. Un ejemplo que ilustra las limitaciones de estos procedimientos lo dio la empresa *Rand* que en 1955 publicó una tabla de un millón de números aleatorios. En un principio fue un éxito, pero pronto mostró sus limitaciones para ciertos cálculos, en los que se requiere miles y miles de números aleatorios, como por ejemplo en aplicaciones del método de Monte-Carlo en dinámica molecular.

El primer algoritmo computacional para generar números aleatorios fue el algoritmo de cuadrados medios de Von Neumann que fue publicado a fines de los años cuarenta. El algoritmo consiste en lo siguiente: Dado un número entero positivo de N dígitos X_0 , con N par, tomar s números, con $s < N/2$, a la izquierda del dígito $d_{N/2}$ incluyendo a este dígito y s números a su derecha. Este nuevo número se eleva al cuadrado y el resultado se indica como X_1 ; si denominamos como $U_1 = .X_1$ entonces U_1 es el primer número en el intervalo $(0, 1)$. Se repite el proceso que se le aplicó a X_0 a X_1 para generar X_2 y obtener a su vez $U_2 = .X_2$, y así sucesivamente. De esta forma se generan n números en $(0, 1)$ que ya no son propiamente aleatorios pues no son producto del azar.

Ilustremos con un ejemplo este algoritmo. Consideremos que $N = 6$, $s = 2$ y $x_0 = 256874$. Los dígitos que se seleccionan son 5687, que elevados al cuadrado nos dan el siguiente elemento de la sucesión $x_1 = 32341969$ que da lugar a $U_1 = .32341969$. De esta forma se obtienen $x_2 = (3419)^2$, $U_2 = .11689561$, $x_3 = (.6895)^2$ y $U_3 = .47541025$ y así sucesivamente.

A sucesiones de números obtenidos por algoritmos deterministas cuya complejidad nos impide predecir de antemano cuál es el valor de su k -ésimo elemento se les llama números pseudo-aleatorios.

Los algoritmos para generar números pseudo-aleatorios en el intervalo $(0, 1)$ deben tener buenas propiedades estadísticas, entre éstas:

1. Los números deben distribuirse uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.
2. No deben estar correlacionados entre sí.
3. Deben permitirnos generar un gran número de ellos sin que se comiencen a repetir.

El algoritmo de Von-Neumann no tiene buenas propiedades estadísticas y a veces sólo se pueden generar sucesiones pequeñas como cuando los dígitos que se seleccionan para generar un nuevo número son todos cero.

La mayoría de los algoritmos que se utilizan hoy en día para generar números pseudo-aleatorios con distribución uniforme utilizan congruencias lineales. El primero en introducirlos fue Lehmer en 1951 y la idea es la siguiente.

Dado a , c y m enteros positivos generar la sucesión X_i por medio del siguiente procedimiento:

1. Dado Z_0 aleatoria.
2. $Z_{i+1} = (aZ_i + c) \bmod(m)$.
3. $X_{i+1} = Z_{i+1}/m$.

O sea Z_{i+1} es el residuo que se obtiene al dividir a $aZ_i + c$ entre m . Claramente $Z_{i+1} < m$ por lo tanto $X_{i+1} \in (0, 1)$. A Z_0 se le llama la semilla.

Ejemplo

Sea $c = 7$, $a = 1$, $m = 11$ y $Z_0 = 3$. Entonces

i	Z_i	X_i
1	10	0.909090909
2	6	0.545454545
3	2	0.181818182
4	9	0.818181818
5	5	0.454545455
6	1	0.090909091
7	8	0.727272727
8	4	0.363636364
9	0	0
10	7	0.636363636
11	3	0.272727273
12	10	0.909090909

Como observamos esta congruencia genera al menos 11 números antes de comenzar a repetirlos. De hecho genera todos los posibles residuos. A esto se le llama el ciclo de la congruencia. Si se seleccionan bien los números a , c y m el algoritmo tiene ciclo máximo o sea igual a m .

Para computadoras de 32 bits (4 bytes), se ha observado que una buena selección de m es $m = 2^{31} - 1$, $a = 7^5 = 16,807$ y $c = 0$.

No basta con buscar generadores que tengan ciclo máximo también deseamos que se distribuyan uniformemente, que no estén correlacionados, que sean fáciles de generar y almacenarse y que puedan replicarse. Es decir que si se conoce la semilla se replica la sucesión.

Otro ejemplo de un buen generador de números pseudo-aleatorios es el de Kobayashi que estádo por

$$Z_i = (314159269Z_{i-1} + 453806245) \bmod(2^{31}).$$

A.2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios

Se recomienda que antes de usar el generador de números aleatorios de cualquier paquete de software, se valide éste aplicando una serie de pruebas estadísticas y empíricas. Entre las estadísticas están:

1. Hacer un histograma con los números aleatorios y comprobar gráficamente que se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.
2. Prueba de bondad de ajuste para probar la hipótesis que los números pseudo-aleatorios se distribuyen uniformes. La prueba consiste en lo siguiente:
 - a) Se divide el intervalo $[0, 1]$ en k subintervalos de longitud Δx , (al menos $k = 100$.)
 - b) Se generan n variables pseudo-aleatorias $U_i, i = 1, \dots, n$. Se cuentan cuántas U_i caen en el subintervalo k , sea $f_k = \text{Num. } U_i \text{ en el intervalo } [(k-1)\Delta x, k\Delta x]$ para $k = 1, \dots, n$.
 - c) Sea $\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{j=1}^k (f_j - \frac{n}{k})^2$
 - d) Para n suficientemente grande χ^2 tiene una distribución χ^2 con $k - 1$ grados de libertad.
 - e) Si $\chi^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$ se rechaza la hipótesis de que las U_i sean uniformes en $(0, 1)$ con un nivel de confianza α .

Observación: Estas pruebas no son poderosas para n pequeñas ni para muy grandes ya que siempre se rechazará la hipótesis por una minúscula diferencia.

3. Verificar si (U_i, U_{i+1}) son variables aleatorias independientes que se distribuyen uniformemente en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. La prueba consiste en lo siguiente:
 - a) Se generan n variables pseudo-aleatorias uniformes en $[0, 1]$.
 - b) Dividir el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en n^2 rectángulos de longitud J_1 y ancho J_2 .
 - c) Sea $f_{j_1, j_2} = \text{Núm. de } (U_i, U_j) \text{ tal que } U_i \in J_1 \text{ y } U_j \in J_2$.

d)

$$\chi^2 = \frac{k^2}{n} \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k (f_{j_1 j_2} - \frac{n}{k^2})^2$$

e) Si $\chi^2 > \chi_{k^2-1, 1-\alpha}^2$ se rechaza la hipótesis nula.

Entre las empíricas está una para probar independencia, conocida como prueba de corridas.

1. Dados números pseudo-aleatorios uniformes U_i , $i = 1, \dots, n$ se van contando el número de U_i que satisfacen que $U_i < U_{i+1}$. A cada una de las sucesiones que satisfacen lo anterior se le llama corrida. Al término de la construcción de las corridas se clasifican por su número de elementos. Sea $r_i = \text{Núm. de corridas de longitud } i$ con $i = 1, \dots, 5, 6$ definidas por

$$r_i = \begin{cases} \text{número de corridas de longitud } i, & i = 1, \dots, 5 \\ \text{número de corridas de longitud } \geq 6 & i = 6. \end{cases}$$

2. Se construye un estadístico

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - nb_i)(r_j - nb_j),$$

con el elemento a_{ij} de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4529.4 & 9044.9 & 13568 & 18091 & 22615 & 27892 \\ 9044.9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{bmatrix}$$

y las b_i son los elementos del vector $b = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{11}{120}, \frac{19}{720}, \frac{29}{5040}, \frac{1}{840})$. Estas constantes aparecen calculadas en el libro de Knuth, ver [8].

3. Para n grande, se recomienda $n \geq 4000$, R se aproxima a una χ^2 con 6 grados de libertad.
4. Si $R > \chi_6^2$ se rechaza la hipótesis.

Más pruebas de este tipo se pueden encontraren en los libros de ([10]) y ([8]).

A.3. Generación de números aleatorios con otras distribuciones

Se pueden generar número pseudo-aleatorios para casi cualquier distribución discreta o continua a partir de números pseudo-aleatorios uniformes. En estas notas se presentan para el caso de la distribución Bernoulli, uniforme y normal, que son las distribuciones más usadas en finanzas.

1. Para generar números aleatorios Bernoulli X_i que toman el valor x_1 con probabilidad p y x_2 con probabilidad $1 - p$, se aplica el siguiente algoritmo:

a) Se genera una v.a. uniforme, U_i , en $[0, 1]$.

b) Si $U_i \leq p \Rightarrow X_i = x_1$.

c) Si $U_i > p \Rightarrow X_i = x_2$.

2. Si la variable aleatoria X_i toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n con probabilidad p_1, \dots, p_n se hace lo siguiente:

a) Se genera una v.a. uniforme en $[0, 1]$.

b)

$$X_i = \begin{cases} x_1, & 0 \leq U_i \leq p_1 \\ x_2 & p_1 < U_i \leq p_1 + p_2, \\ x_3 & p_1 + p_2 < U_i \leq \sum_{j=1}^3 p_j, \\ \dots & \\ x_n & \sum_{j=1}^{n-1} p_j < U_i. \end{cases}$$

3. En el caso de las variables continuas se puede utilizar un método general que es el método inverso. Sea U una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$, para cualquier distribución F la variable aleatoria definida por $\chi = F^{-1}(U)$ tiene distribución F .

Por ejemplo sea X la variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro μ . Su distribución está dada por $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$. Si $F(x) = y$ entonces $y \in (0, 1)$ y $1 - e^{-\mu x} = y$. Despejando x se obtiene que la variable aleatoria exponencial se puede construir a partir de $X = \frac{-1}{\mu} \ln(1 - y)$ con y una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$. Observemos que si $y \in (0, 1)$ también lo está $1 - y$ por lo que el algoritmo para generar variables pseudo-aleatorias con distribución uniforme con parámetro μ queda de la siguiente forma:

a) Se genera una v.a. U uniforme en $(0, 1)$.

b) $\chi = \frac{-1}{\mu} \ln(U)$ es exponencial de parámetro μ .

También se puede utilizar este método para las variables normales.

4. Otro método para generar normales es el siguiente: Sean $(x, y) \sim N(0, 1)$ variables aleatorias independientes, entonces la función de densidad conjunta se define

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Si estas dos variables se llevan al plano (r, θ) a través del cambio de coordenadas polares $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Tang}^{-1} \frac{y}{x}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y al origen lo manda al origen. La pregunta es si (x, y) son normales independientes, entonces ¿cuál es la densidad de (r, θ) ? $g(r^2, \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}$ con r^2 exponencial con parámetro $\lambda = 1/2$ y θ uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Algoritmo de Box-Muller

1. Se genera dos v.a. uniformes independientes $U_1, U_2 \sim (0, 1)$.
2. Sea $R^2 = -2 \ln(U_1)$, $\theta = 2\pi U_2$.
- 3.

$$x = R \cos \theta = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$y = R \sin \theta = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

son normales independientes.

Simulación de una caminata aleatoria y de un browniano

Consideremos el siguiente juego: Se tiene jugadores que se colocan en el origen de un plano cartesiano. Se tira una moneda, si sale sol avanzan hacia la posición $(1, 1)$, si cae águila avanzan hacia $(1, -1)$. A la siguiente tirada si sale sol avanzan hacia la posición (num jugada, posición anterior +1) si sale águila se mueve a la posición (num jugada, posición anterior -1) y así sucesivamente. Después de n tiradas, gana quien tenga la coordenada y más grande. Simulemos este juego por computadora. Denotemos por $S_j^i =$ la coordenada y de la posición del jugador i en la tirada j . Claramente el resultado de cada moneda es independiente y se puede representar como una variable aleatoria independiente y con distribución Bernoulli. Toma el valor sol con probabilidad de un medio y el de águila con las misma probabilidad para que sea un juego justo.

La sucesión S_j^i para el jugador i forma una sucesión de variables aleatorias que se conoce con el nombre de caminata aleatoria y describe el comportamiento de varios procesos estocásticos discretos.

Algoritmo para generar una caminata aleatoria

1. Inicialice $S_0^i = 0$.

- Para cada tirada j desde $j = 1, \dots, M$ se genera una variable aleatoria Bernoulli a través de una uniforme. Sea U_j una variable uniforme en el intervalo $(0, 1)$ lo que denotaremos por $U_j \sim U(0, 1)$. Si

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } U_j > 1/2 \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $S_{j+1}^i = S_j^i + X_j$.

Si unimos todas las posiciones del jugador por medio de líneas rectas se tiene una posible trayectoria que puede seguir el jugador j . El número de distintas trayectorias que puede seguir es 2^M .

Observemos que $E(X_j) = 0$ y que $Var(X_j) = 1$. La probabilidad de que el jugador i esté en la n -tirada en la ordenada $y = n$ es $1/(2)^n$.

$$E(S_M^i) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = 0.$$

$$Var(S_M^i) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M Var(X_i) = M.$$

Si M es lo suficientemente grande podemos aplicar el teorema del límite central que nos dice que

$$Z_M = \frac{S_M - E(S_M)}{\sqrt{Var(S_M)}} = \frac{S_M}{\sqrt{Var(S_M)}} \sim N(0, 1).$$

Por lo tanto, S_M es una normal para M grande.

Simulación de un movimiento Browniano

Como se vió en las opciones, el movimiento browniano es un proceso estocástico continuo que satisface:

- $W(0) = 0$
- $E(W(t)) = 0$ y los incrementos $W(t) - W(s)$ con $t \geq s$ son variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza $t - s$.

Hay dos formas de simular un browniano. En ambos casos se tiene que discretizar el tiempo.

Dado un intervalo $[0, T]$, sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $\Delta t = T/N$. Definamos los puntos $t_0 = 0$, $t_i = i\Delta t$ y $t_N = T$. Asociada a esta partición del intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ se puede simular el browniano por medio de una caminata aleatoria o por medio de gaussianas.

Algoritmo para generar un browniano por medio de una caminata aleatoria

- Dados $t_0 = 0$, $t_i = i\Delta t$ y $t_N = T$ y $W_0 = 0$,

2. Para $i = 1, \dots, N$, se genera una variable aleatoria tipo Bernoulli X_i y se calcula $W_i = W_{i-1} + X_i\sqrt{\Delta t}$.
3. Para construir una función lineal por pedazos \hat{W} que interpole a ésta se define

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{\Delta t}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

Algoritmo para generar un browniano por medio de gaussianas

En este caso se utiliza el hecho que incrementos de brownianos son variables independientes que se distribuyen en forma normal con media cero y varianza $t - s$.

1. Dados $t_0 = 0$, $t_i = i\Delta t$ y $t_N = T$ y $S_0 = 0$,
2. Para $i = 1, \dots, N$ se genera una variable aleatoria $Y_i \sim N(0, 1)$ y se calcula $W_i = W_{i-1} + Y_i\sqrt{\Delta t}$.
3. Una aproximación continua \hat{W} de W está dada por

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{\Delta t}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

Aproximación de la solución de un proceso estocástico

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t, \quad X(t_0) = X_0.$$

donde a, b son funciones continuas respecto a t y a X_t . Otra forma de expresarlas es en forma integral

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s.$$

La primera integral es una integral de Riemann, pero la segunda es una integral estocástica.

Ejemplo

Movimiento browniano geométrico

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = X^*.$$

Esta ecuación tiene solución exacta

$$X(t) = X^* e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

La aproximación numérica implica, como en el caso del browniano, discretizar la ecuación. Para ello, se discretiza primero el tiempo: dado un intervalo $[0, T]$, sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $h = T/N$. Definamos los puntos $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$. Asociada a esta

discretización, definamos como $X_i^h \doteq X(t_i)$. El segundo paso es discretizar la ecuación diferencial estocástica por

$$dX_i \approx X_{i+1} - X_i = \mu X_i h + \sigma X_i (W_{i+1} - W_i)$$

y se usa el hecho que $W_{i+1} - W_i = Y_i \sqrt{h}$, con $Y_i \sim N(0, 1)$.

Algoritmo de Euler para aproximar numéricamente la solución de la EDE

En este caso se utiliza el algoritmo para simular brownianos por medio de gaussianas del inciso anterior.

1. Dados $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$ y $X_0^h = X^*$,
2. Para $i = 1, \dots, N$ se genera una variable aleatoria $Y_i \sim N(0, 1)$ y se calcula $X_i^h = X_{i-1}^h + \mu X_{i-1}^h h + \sigma X_{i-1}^h Y_i \sqrt{h}$.
3. Para definir una función continua a partir de ésta se unen los valores S_i por medio de rectas, es decir se define

$$X^h(t) = X_i^h + \frac{X_{i+1}^h - X_i^h}{\Delta t} (t - t_i) \quad \text{para } t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Al discretizar una ecuación diferencial estocástica se introduce un error. Este error es distinto dependiendo de la medida que se escoja. Para fines del cálculo del valor esperado el error es del orden h . Es decir existe una constante $C > 0$ tal que

$$|E(g(X(T))) - E(g(X_T^h))| \leq Ch.$$

en el caso que nos interese aproximar a la trayectoria en los puntos t_i entonces

$$E(\max_{1 \leq i \leq N} |X(t_i) - X_{t_i}^h|) \leq C\sqrt{h}.$$

Hay otros métodos mas precisos para aproximar la solución de una EDE, se sugiere para ello consultar ([7]).

Bibliografía

- [1] Black, F. y Scholes, M. (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*.
- [2] Dufresne, D. (2000), “Laguerre Series for Asian and Other Options”, *Mathematical Finance*, 10, 407-428
- [3] Geman, H., y M. Yor. (1993), “Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities”, *Mathematical Finance*, 3, 349-375
- [4] Glasserman Paul. *Monte-Carlo Methods in Financial Engineering*. Computational Finance. Springer Verlag. 2004.
- [5] Hull John. *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice Hall. Cuarta edición. 2000.
- [6] Kemna, A.G.Z. y Vorst, A.C.F. (1990), “A pricing method for options based on average asset values”. *J. Banking Finance* 14.
- [7] Kloeden y Platten. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag. 1995.
- [8] Knuth. *The Art of Computer Programming*. Vol. 2. Addison-Wesley. 1969.
- [9] Lamberton, Damien y Lapeyre, Bernard. *Introduction to Stochastic Calculus. Applied to Finance*. Chapman & Hall. 1996.
- [10] Law M. A. M. and Kelton W. D., *Simulation Modeling and Analysis*. Mc. Graw-Hill. 1991.
- [11] Linetsky, Vadim. (2003), “Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options”. *Operations Research*.
- [12] Ross Sheldon. *Simulation*. Prentice Hall. Segunda edición. 1997.
- [13] Wilmot, P; Howison, S. y Dewynne, J., *Options Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press. 1993.