SOLUCION DE UNA ECUACION O SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN UNA VARIABLE ESPACIAL DE TIPO PARABOLICO O ELIPTICO.

@ Joaquín Delgado

1. Forma normal de la EDP

El resovedor **pdepe** de Matlab permite resolver una EDP o sistemas de EDPs en una variable espacial x y una variable temporal t. La forma normal de las EDP que se pueden resolver es de la forma

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^m f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \text{a}\le x\le b,\ \ t\ge 0 \qquad (1)$$

Donde el coeficiente c que multiplica la derivada respecto de t es una matriz diagonal que se especifica como un vector. La variable espacial puede reescalarse para tener $0 < x < 1$.

El parámetro m está asociado a la geometría del problema: m = 0, 1,2 corresponde a x como la coordenada radial en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas respectivamente.

Los términos f, s se llaman flujo y fuente respectivamente.

Ejemplo 1

Reescalar la ecuación e identificar la ecuación con la forma normal (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}-u+\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\quad u=u(x,t)\quad 0<x<L,\ \ t>0\,.$$

Hacemos $\bar{x}=x/L$ luego $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}$ y la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\lambda}{L}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}-u+\sin(2\pi\bar{x}),\quad u=u(\bar{x},t)\quad 0<\bar{x}<1,\ \ t>0$$

o bien

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\frac{\lambda}{L}u\right]-u+\sin(2\pi\bar{x}),\quad u=u(\bar{x},t)\quad 0<\bar{x}<1,\ \ t>0\,.$$

Identificamos

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}\right)=1,\quad f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}\right)=\frac{1}{L^2}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\frac{\lambda}{L}u,\quad s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}\right)=\sin(2\pi\bar{x})$$

Ejemplo 2

Escribir la ecuación de calor con convección en coordenadas cilíndricas y esféricas. Identificar con la forma normal (1).

La ecuación general de calor con convección es

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (k\nabla u) + \lambda u \tag{2}$$

donde c es la capacidad calorífica específica y k la conductividad térmica.

El gradiente y la divergencia en las coordenadas solicitadas son:

Cilíndricas r, θ, z

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En el caso de simetría cilíndrica $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ y la ecuación (2) se reduce a

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}k\frac{\partial u}{\partial r}\right\} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Identificamos con la forma normal (1)

$$x = r, m = 1, c\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = c,\ f\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -k\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Coordenadas esféricas r, ϕ, θ :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right).$$

En el caso de simetría esférica la ecuación (2) se reduce a

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Identificamos con la forma normal (1)

$$x = r, m = 2, c\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = c,\ f\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -k\frac{\partial u}{\partial x}.$$

2. Condiciones de frontera

La condición de frontera en los extremos $x \in [0,1]$ se especifican en la forma

$$p(x,t,u) + q(x,t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

donde x = a,b. Es necesario especificar las componentes de p = (pl,pr) y de q = (ql,qr) como funciones de t y de los valores de u en los extremos (ul,ur) en el caso de p. Nóte que las condiciones de frontera se especifican mediante el flujo en vez de la derivada parcial $\partial u / \partial x$.

3. Condiciones iniciales

Se especifican en la forma de una función de x

$u = icfun(x)$

4. Llamada principal para resolver una EDP

```
u = pdepe(m,@pdefun,@icfun, @bcfun,x,t)
```

Sean `nx = length(x), nt =length(t)` las longitudes de las mallas `x` y `t` respectivamente, `np` es el número de ecuaciones diferenciales, entonces

```
a = x(1) < x(2) < … <x(end) = b
0 = t(1) < t(2) < … < t(end)
```

La solución `u` es un arreglo multidimensional de tamaño `nt × nx × np`; con `nx` ≥ 3, por ejemplo `u(j,k,i)` es la solución aproximada de la componente `i` en el punto `(t(j),x(k))`. Nótese que los índices `j,k` corresponden al orden de las variables (t,x).

Las funciones en el argumento de pdepe siguen la sintaxis:

4.1 Flujo

```
[c,f,s] = pdefun(x,t,u,dudx)
```

donde `x, t` son escalares, `u, dudx` son vectores de dimensión np. La función regresa vectores c,f,s de de dimensión `np` correspondientes a la matriz diagonal $c(x,t,u,\partial u / \partial x)$, flujo $f(x,t,u,\partial u / \partial x)$ y fuente $s(x,t,u,\partial u / \partial x)$. Por cada entrada del vector c nulo, la ecuación correspondiente es de tipo elíptica pero debe haber al menos una ecuación parabólica.

4.2 Condiciones de frontera

```
[pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
```

donde `pl, ql` son vectores columna de dimensión `np` correspondientes a la función $p(a,t,u)$ y a la matriz diagonal $q(a,t,u,\partial u / \partial x)$. Note que sólo *p* puede depender de *u*. Análogamente `pr, qr` son vectores columna de dimensión `np` correspondientes a la función $p(b,t,u)$ y a la matriz diagonal $q(b,t,u,\partial u / \partial x)$.

4.3 Condición inicial

`u = icfun(x)`

donde `x` es un escalar, u es un vector de dimensión `np`.

5. Evaluación de la solución en puntos específicos de x

`ui = u(:,:,i)` aproxima la i-ésmima componente de la solución en la malla tempo-espacial `(t,x).` Para evaluar la solución y su derivada en puntos de la malla `xout` distintos de la malla `x` se usa el comando

```
[uout,duoutdx] = pdeval(m,x,ui,xout)
```

la salida son vectores `uout,duoutdx` contienen las aproximaciones en la malla `xcout.` Observe que se evalúa la derivada y no el flujo.

6. Manejo de discontinuidades

Se permiten discontinuidades de *c* o *s* en *x* siempre que se incluyan en la malla x, pero el fujo deberá ser continuo. Es conveniente usar una malla más fina cerca de los puntos de discontinuidad, pero para m =2 (coordenadas esféricas) esto no es necesario.

Ejemplo pedex1 (ver archivo pdex1.m)

Resolver la ecuación diferencial de tipo parabólico

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\pi \exp(-t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

y la condición inicial

$$u(x,0) = \sin(\pi x).$$

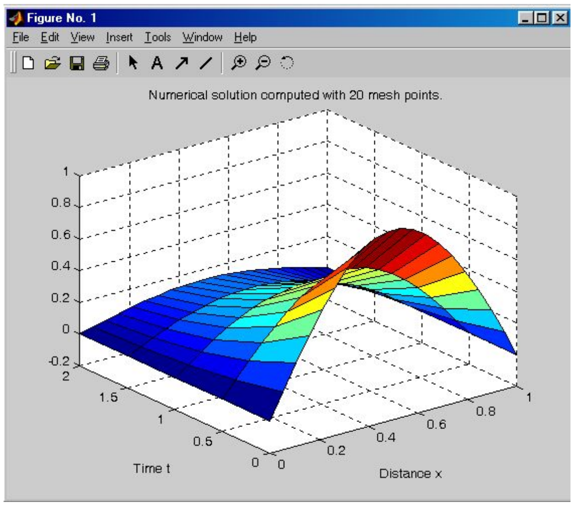
En realidad queremos comparar con la solución exacta $u(x,t) = \exp(-t)\sin(\pi x)$, de ahí que se justifican las condiciones iniciales y de frontera.

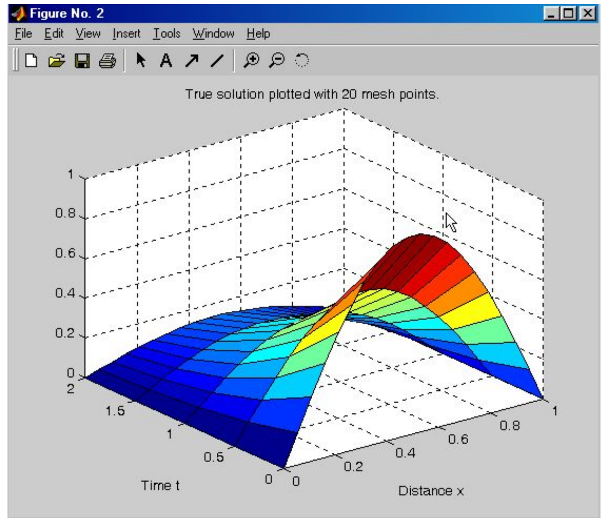
```
function pdex1

% 20 puntos de malla especial, 5 temporal
m = 0;
x = linspace(0,1,20);
t = linspace(0,2,5);

%Llamada a la rutina principal
sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);

%Primera componente
u=sol(:,:,1);

%Grafico de superficie
figure;
surf(x,t,u);
title('Solución numérica con 20 puntos de malla.');

xlabel('Distancia x');

ylabel('Tiempo t');


figure;
surf(x,t,exp(-t)'*sin(pi*x));

title('Solución exacta con 20 puntos de malla. ');

xlabel('Distance x');

ylabel('Time t');


figure;

plot(x,u(end,:), 'o',x,exp(-t(end))*sin(pi*x));

title('Soluciones en t = 2. ');

legend('Numerica, 20 puntos de malla', 'Analitica',0);

xlabel('Distancia x'); ylabel('u(x,2)');


% Especificacion de la EDP
function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,u,DuDx)
c = pi^2;
f = DuDx;
s = 0;

% Especificación de la condición inicial
function u0 = pdex1ic(x)
u0 = sin(pi*x);

% Especificación de condiciones de frontera
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)

pl = ul;

ql = 0;

pr = pi * exp(-t);

qr = 1;
```

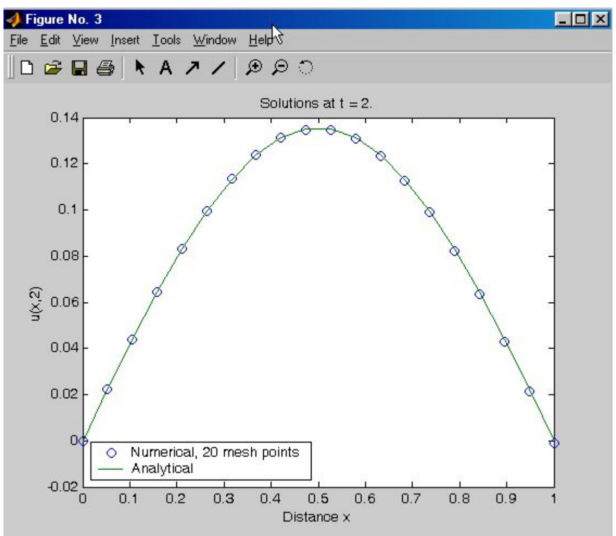
Al correr

```
>> pdex1
```

se obtienen las siguiente figuras







Ejemplo 4 (ver pdex2.m)

Se considera la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(5r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) - 1000\exp(u) \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \exp(u) \end{cases}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

La condición inicial es discontinua en x = 1

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

La condición de frontera izquierda $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ asegura que la solución es continua en el origen *r = 0*. La condición de frontera en el extremo derecho es *u = 1*.

```
function pdex2

m = 2;
x = [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.45 0.475 0.5 0.525 0.55 0.6 0.7 0.8 0.9 0.95 0.975 0.99 1];
t = [0 0.001 0.005 0.01 0.05 0.1 0.5 1];

sol = pdepe(m,@pdex2pde,@pdex2ic,@pdex2bc,x,t);
u = sol(:,:,1);

figure;
surf(x,t,u);
title('Solucion numerica calculada usando una malla no uniforme.');
xlabel('Distancia x');
ylabel('Tiempo t');

figure;
plot(x,u,x,u,'*');
xlabel(' Distancia x');
title('Perfiles de la solucion en los tiempos seleccionados.');

% Especificacion de la EDP

function [c,f,s] = pdex2pde(x,t,u,DuDx)
c = 1;
if x <= 0.5
  f = 5*DuDx;
  s = -1000*exp(u);
else
  f = DuDx;
  s = -exp(u);
end

% Especificacion de la condicion inicial

function u0 = pdex2ic(x)
if x < 1
  u0 = 0;
else
  u0 = 1;
end

% Especificacion de las condiciones de frontera.
```

```
% pdepe usara pl=ql=0 porque el  problema tiene
% una singularidad: xl=0 and m>0


function [pl,ql,pr,qr] = pdex2bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl = 0;  ql = 0;
pr = ur - 1;
qr = 0;
```