Una introducción a la medida e integral de Lebesgue

Roberto Quezada Batalla
Departamento de Matemáticas, UAM-I

Índice general

Introducción

Estas notas son una breve introducción a la teoría de la medida e integral de Lebesgue, incluyen conceptos y resultados considerados clásicos y que todo joven matemático debe conocer.

Hemos hecho un intento serio por hacer accesible al lector los resultados más importantes de la teoría en toda su extensión sin simplificarlos, discutiéndolos de una manera completa y sin dejar huecos. Para entender el material de estas notas sólo se necesita un buen conocimieto del Cálculo Diferencial e Integral, en la forma que se desarrolla en los cursos de Cálculo Avanzado. No obstante, al final de las notas hemos incluido un apéndice con algunos de los conceptos usados a lo largo de ellas.

Nuestro objetivo principal es presentar aquellas partes de la teoría que son indispensables y encuentran aplicación inmediata en otras áreas, por ejemplo en Probabilidad y en Física Matemática. Consecuentemente, otros temas como integración y diferenciación, medidas en espacios abstractos, espacios L_p, series de Fourier, integral de Lebesgue-Stieltjes, también considerados clásicos, han quedado fuera. Los lectores interesados en estos temas pueden estudiarlos en los cursos más avanzados de Análisis Matemático o bien pueden leerlos en las referencias incluidas al final de las notas.

El Capítulo 1 contiene un breve repaso de la integral de Riemann, presentada de una manera tal que la integral de Lebesgue resulta ser una extensión natural de ella obtenida al reemplazar la clase de las funciones aproximantes, funciones escalonadas, por la clase más general de las funciones simples.

La medida de Lebesgue en la recta real se desarrolla en el Capítulo 2, incluyendo la construcción de la σ-álgebra de los subconjuntos Lebesgue-medibles a partir de la condición de Caratheodory, que interpretamos como una condición de separabilidad; en la Proposición 2.3.17 demostramos varias condiciones equivalentes a la de Caratheodory, las cuales permiten interpretar de manera intuitiva el concepto de medibilidad.

La clase de las funciones medibles se trata en el Capítulo 3, incluyendo los resultados sobre aproximación por funciones continuas. La integral de Lebesgue se trata en el Capítulo 4, primero para funciones medibles y acotadas definidas en subconjuntos de medida finita, después extendemos este concepto a la clase de funciones medibles no negativas y finalmente a la clase de las funciones medibles con valores complejos.

Consideramos que esta es una versión preliminar de las notas porque todavía requieren ser completadas, por ejemplo en la parte de los ejercicios para el estudiante.

Capítulo 1

La Integral de Riemann

Recordemos brevemente la construcción y algunas propiedades de la integral de Riemann en intervalos acotados de $\mathbb{R}$.

Una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ es una colección finita $\{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. La norma de $\mathcal{P}$ es $\|\mathcal{P}\| = \text{máx}_{0\leq j\leq n} |x_j - x_{j-1}|$.

Sean $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$, f una función definida en $[a,b]$ y $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\quad i = 1, \ldots, n$, una elección de puntos en $[a,b]$. Defínase

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|x_i - x_{i-1}|$$

A esta suma la llamaremos *Suma de Riemann de f relativa a la partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ y la elección $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$*. Este nombre nos permitirá recordar que para cada f esta suma depende de la partición $\mathcal{P}$ y de la elección ξ.

Definición 1.0.1. *(Riemann-integrabilidad).*
Una función f definida en $[a,b]$ es Riemann integrable (R-integrable) si existe un número real $\mathcal{R}$ tal que para cualquier $\epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$, tal que $\forall \mathcal{P}$ partición de $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y toda elección ξ se tiene

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathcal{R}| < \epsilon.$$

De manera breve:

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall \mathcal{P}) \quad (\forall \xi) \quad [\quad \|\mathcal{P}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathcal{R}| < \epsilon \quad].$$

No es dificil demostrar que, en caso de existir, el número $\mathcal{R}$ es único: pues si existen dos $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$, digamos $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_1$, que satisfacen la definición anterior entonces para $\epsilon < \dfrac{1}{2}(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1)$, $\quad \exists \delta > 0 \quad$ tal que $\forall \mathcal{P}$ y $\forall \xi \quad$ se tiene que si $\|\mathcal{P}\| < \delta \quad$ entonces $|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathcal{R}_1| < \epsilon \quad$ y $\quad |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathcal{R}_2| < \epsilon$. Entonces utilizando desigualdad del triángulo obtenemos que

$$|\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2| \leq 2\epsilon,$$

lo cual es una contradicción.

Al número $\mathcal{R}$ lo denotaremos mediante el símbolo

$$R - \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi).$$

Recuérdese que si $f \geq 0$ entonces $R - \int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la gráfica de f en $[a,b]$.

La definición que hemos dado para la integral de Riemann de una función, no es constructiva. En lo que sigue describiremos un método constructivo que permite calcular integrales de Riemann. Además este método nos servirá como motivación para definir la integral de Lebesgue.

Definición 1.0.2. *(Función escalonada)*
Una función g definida en $[a,b]$ es escalonada si existe una partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que g es constante en cada subintervalo de $\mathcal{P}$.

Como consecuencia inmediata de la definición obtenemos que una función escalonada g toma sólo un número finito de valores. Pero la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & si \quad x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es escalonada aún cuando toma sólo dos valores.

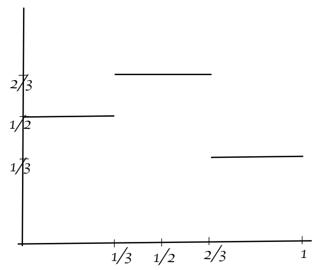

Figura 1.1: una función escalonada

La función escalonada de la figura 1,1 acepta la siguiente representación

$$g(x) = \frac{1}{2}\chi_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}\chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}\chi_{[\frac{2}{3},1]}(x),$$

donde $\chi_{[\alpha,\beta)}$ es la función indicadora del intervalo $[\alpha,\beta)$ definida de la siguiente manera:

$$\chi_{[\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\alpha,\beta) \\ 0 & si \quad x \notin [\alpha,\beta). \end{cases}$$

Pero esta representación de g no es única. Aquí tenemos otra:

$$g(x) = \frac{1}{2}\chi_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}\chi_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2})}(x) + \frac{2}{3}\chi_{[\frac{1}{2},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}\chi_{[\frac{2}{3},1]}(x).$$

Sean g_1, g_2, dos funciones escalonadas en $[a,b]$ con representaciones

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{[x_{j-1},x_j)}(x) \quad y \quad g_2(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{[y_{k-1},y_k)}(x)$$

y sean

$$\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\} \quad y \quad \mathcal{P}_2 = \{y_0 = a, y_1, \ldots, y_m = b\}$$

las particiones asociadas con g_1 y g_2, respectivamente.

Si $Q = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \{z_0, z_1, \ldots, z_k\}$, podemos escribir

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j\chi_{[z_{j-1},z_j)}(x), \qquad g_2(x) = \sum_{j=1}^{l} \beta_j\chi_{[z_{j-1},z_j)}(x),$$

con $\alpha_j = a_k$ y $\beta_j = b_l$ para algunos j y l,

$$y \qquad g_1(x) + g_2(x) = \sum_{j=1}^{l}(\alpha_j + \beta_j)\chi_{(z_{j-1},z_j)}(x).$$

Proposición 1.0.3. *Si g es una función escalonada en $[a,b]$ entonces g es $\mathcal{R}$-integrable y además si*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{(x_{i-1},x_i)}(x)$$

entonces

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Para demostrar esta proposición utilizaremos el siguiente resultado, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector.

Teorema 1.0.4. *(Aditividad)*
Si $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, entonces una función f es R-integrable en $[a,b]$ si y sólo si es R-integrable en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ $\quad i = 1, \ldots, n$ y además

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{b} f(x)dx.$$

También necesitaremos el siguiente.

Lema 1.0.5. *Si f es R-integrable en $[a,b]$ y $f(x) = g(x)$ excepto en un número finito de puntos $c_1, \ldots, c_k \in [a,b]$ entonces g es R-integrable y*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Demostración.
Supóngase que $k = 1$. Bastará demostar que si $f(x) = g(x)$, excepto en $c \in [a,b]$, entonces $|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}(g,\mathcal{P},\xi)|$ es arbitrariamente pequeño para $\|\mathcal{P}\|$ pequeña. Dada cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ con $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$, el punto c se encuentra a lo más en dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$,
Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}(g,\mathcal{P},\xi)| &= |\mathcal{R}(f-g,\mathcal{P},\xi)| = |\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(c) - g(c)||x_i - x_{i-1}| + |f(c) - g(c)||x_{i+1} - x_i| \\ &\leq 2\|\mathcal{P}\| \quad |f(c) - g(c)| \end{aligned}$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, tómese $\delta < \epsilon(2|f(c) - g(c)|)^{-1}$, entonces se tiene que $|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}(g,\mathcal{P},\xi)| < \epsilon \quad \forall$ elección ξ si $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Esto demuestra el resultado si $k = 1$.

Si se tienen k puntos distintos, para cualquier partición $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$, cada punto c_j, $j = 1, \ldots, k$, se encuentra en a lo más dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ y $[x_j, x_{j+1}]$.
Entonces

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}(g,\mathcal{P},\xi)| = |\mathcal{R}(f-g,\mathcal{P},\xi)| = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k} |(f(c_j) - g(c_j))||x_j - x_{j-1}| + |f(c_j) - g(c_j)||x_{j+1} - x_j| \leq$$

$$2\|\mathcal{P}\| \sum_{j=1}^{k} |f(c_j) - g(c_j)|.$$

Entonces para cada $\epsilon > 0$ se puede tomar $\delta < \epsilon(2\sum_{j=1}^{k} |f(c) - g(c)|)^{-1}$, y se tendrá que

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}(g,\mathcal{P},\xi)| < \epsilon \quad \forall \xi \quad \text{si} \quad \|\mathcal{P}\| < \delta.$$

□

Demostración.(de la Proposición 1.0.3)
Una función constante es R-integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ pues si $\mathcal{R} = c(b-a)$ donde c es el valor de la función, entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}| &= |\sum_{j=1}^{k}(f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \mathcal{R}| \\ &= |c(b-a) - \mathcal{R}| = 0. \end{aligned}$$

Como cada función escalonada es constante, digamos igual a c_j, en cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ de alguna partición $\mathcal{P}$ entonces esta función es R-integrable en cada subintervalo y además

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)dx = c_j(x_j - x_{j+1}) \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora basta aplicar el teorema de aditividad para obtener que g es R-integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{j=1}^{k} c_j(x_j - x_{j+1}).$$

□

Teorema 1.0.6. *Una función definida en $[a,b]$ es R-integrable si y sólo si para cualquier $\epsilon > 0$, existen dos funciones escalonadas f_1 y f_2 tales que*
$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \forall \quad x \in [a,b] \quad$ *y*

$$\left(R - \int_a^b f_2(x)dx\right) - \left(R - \int_a^b f_1(x)dx\right) < \epsilon.$$

Demostración.
Como f es R-integrable, esto implica que f es acotada en $[a,b]$. Pues sea $\epsilon = 1$, y t
omese $\delta > 0$ como en la Definición 1,0,1, entonces para cualquier partición $\mathcal{P}$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y cualquier elección ξ se tiene que

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}| < \epsilon;$$

con $\mathcal{R} = R - \int_a^b f(x)dx$, lo cual implica que

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi)| \leq |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi) - \mathcal{R}| + |\mathcal{R}| < |\mathcal{R}| + \epsilon.$$

Sea $\mathcal{P}$ una equipartición de $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\| = \frac{b-a}{n} < \delta$. Cada $x \in [a,b]$ pertenece a algún intervalo de $\mathcal{P}$, digamos $x \in (x_{j-1}, x_j)$.

Si $f \geq 0$ tomando una elección ξ que contenga al punto x tenemos que

$$|f(x)|\frac{b-a}{n} \leq |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi)| < |\mathcal{R}| + \epsilon,$$

entonces
$$|f(x)| < \frac{n}{b-a}(\mathcal{R} + \epsilon).$$
Si f cambia de signo escríbase $f = f_+ - f_-$ donde
$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & si \quad f(x) < 0 \end{cases} = \text{máx}(f(x), 0)$$
$$f_-(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) \leq 0 \\ 0 & si \quad f(x) > 0 \end{cases} = \text{máx}(-f(x), 0)$$
Se tiene que $f_+, f_- \geq 0$ y $|f| = f_+ + f_-$, por lo tanto es f acotada.

Como f es R-integrable, entonces dado $\epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) - \mathcal{R}| < \epsilon$ para toda elección ξ, y toda partición $\mathcal{P}$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Si $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, como f es acotada tiene sentido definir
$$\begin{aligned} f_1(x) = &\quad \text{ínf}\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\} \quad para \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f_2(x) = &\quad \sup\{f(x) : x \in (x_{i-1}, x_i)\} \quad para \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$
Estas funciones se pueden definir también en los puntos de $\mathcal{P}$ de manera que resulten escalonadas. Nótese que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad x \in [a, b]$. Recordemos que si $\mathcal{S}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces
$$(i) \quad S = \sup \quad \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lllll} (i{,}1) & S \geq \mathfrak{s} & \forall & \mathfrak{s} \in \mathcal{S} & \\ (i{,}2) & \forall \quad \epsilon > 0 & \exists & \mathfrak{s}_\epsilon \in \mathcal{S} & \text{tal que} \quad \mathfrak{s}_\epsilon > S - \epsilon \end{array}$$
$$(ii) \quad s = \text{ínf} \quad \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lllll} (ii{,}1) & s \leq \mathfrak{s} & \forall & \mathfrak{s} \in \mathcal{S} & \\ (ii{,}2) & \forall \quad \epsilon > 0 & \exists & \mathfrak{s}_\epsilon \in \mathcal{S} & \text{tal que} \quad \mathfrak{s}_\epsilon < s + \epsilon. \end{array}$$

Por la definición de f_1, f_2 existen $\xi_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_i))$ tales que
$$\begin{aligned} & f(\xi_i) < f_1(x) + \epsilon, \\ \text{y} \quad & f(\eta_i) > f_2(x) - \epsilon, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$
Por ser escalonada, f_1 se puede representar en la forma
$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} (\text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i)\}) \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x).$$
Ahora,
$$\begin{aligned} \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx &= \sum_{j=1}^{n} (f_2(x) - f_1(x))(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (f(\eta_j) + \epsilon - f(\xi_j) + \epsilon)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f(\eta_j) - f(\xi_j))(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{n} 2\epsilon(x_j - x_{j-1}) \\ &= \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \eta) - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi) + 2\epsilon(b - a) \\ &< 2\epsilon(1 + (b - a)), \end{aligned}$$

pues como $\quad |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\psi)-\mathcal{R}|<\epsilon$ entonces

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\psi)-\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi)| &\leq |\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\psi)-\mathcal{R}|+|\mathcal{R}-\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\xi)|\\ &< \epsilon+\epsilon=2\epsilon.\end{aligned}$$

Reciprocamente, sea

$$\mathcal{R}=\sup\left\{\ \int_a^b f_1(x)dx \quad : \quad f_1 \quad \text{es escalonada} \quad \text{y} \quad f_1(x)\leq f(x) \quad \forall x\in[a,b]\ \right\}.$$

Si f_2 es escalonada con $f_2(x)\geq f(x)\geq f_1(x)$, entonces

$$\int_a^b f_2(x)dx \quad \geq \quad \int_a^b f_1(x) \quad \forall \quad f_1 \quad \text{escalonada con} \quad f_1<f \quad \text{en } [a,b].$$

Es decir, $\int_a^b f_2(x)dx$ es cota superior del conjunto

$$\left\{\ \int_a^b f_1(x)dx \quad : \quad f_1 \quad \text{es escalonada} \quad \text{y} \quad f_1\leq f\ \right\}.$$

Entonces

$$\int_a^b f_2(x)dx \quad \geq \quad \mathcal{R}.$$

Consecuentemente $\mathcal{R}$ es cota inferior del conjunto

$$\left\{\ \int_a^b f_2(x)dx \quad : \quad f_2 \quad \text{es escalonada} \quad \text{y} \quad f_2\geq f \quad \text{en } [a,b]\ \right\}.$$

Además para $\epsilon>0$ existen f_1,f_2 escalonadas con $f_1\leq f\leq f_2$ en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f_2(x)dx<\int_a^b f_1(x)dx+\epsilon\leq\mathcal{R}+\epsilon.$$

Entonces,

$$\mathcal{R}=\text{ínf}\left\{\ \int_a^b f_2dx \quad : \quad f_2 \quad \text{es escalonada} \quad \text{y} \quad f_2\geq f\ \right\}.$$

Ahora veremos que $\mathcal{R}$ es la integral de f.

Estas últimas f_1 y f_2 son integrables y si $\mathcal{P}$ es una partición asociada con f_1 y f_2

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(x)dx &\leq \mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi) \quad \forall \quad \mathcal{Q} \quad \text{partición con} \quad \|\mathcal{Q}\|<\|\mathcal{P}\|,\\ \int_a^b f_2(x)dx &\geq \mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi) \quad \forall \quad \mathcal{Q} \quad \text{partición con} \quad \|\mathcal{Q}\|<\|\mathcal{P}\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$|\mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi)-\mathcal{R}|<\epsilon,$$

pues

$$-\epsilon < \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx \leq \int_a^b f_1(x)dx - \mathcal{R} \leq \mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi) - \mathcal{R}.$$

Y

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi) - \mathcal{R} \leq \int_a^b f_2 dx - \mathcal{R} \leq \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx < \epsilon,$$

pues

$$\mathcal{R} \geq \int_a^b f_1(x)dx.$$

Entonces,

$$-\epsilon < \mathcal{R}(f,\mathcal{Q},\xi) - \mathcal{R} < \epsilon.$$

Esto demuestra que f es $\mathcal{R}$-integrable y además, $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{R}$. $\square$

Nótese que en la demostración del Teorema anterior se describe un método para calcular la integral de Riemann de cada función Riemann-integrable, de hecho tenemos que

$$R\text{–}\int_a^b f(x)dx = \sup\left\{ \int_a^b f_1(x)dx \ : f_1 \text{ es escalonada y } f_1(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$

$$= \inf\left\{ \int_a^b f_2(x)dx \ : \ f_2 \text{ es escalonada y } f_2(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}.$$

Los siguientes teoremas, cuyas demostraciones dejamos como ejercicio para el lector, describen propiedades básicas de la integral de Riemann.

Teorema 1.0.7. *(Linealidad)*
Si f y g son R-integrables entonces cf y $f+g$ son R-integrables $(c \in \mathbb{R})$ *y además*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad y \quad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 1.0.8. *(Monotonía)*
Si f y g son R-integrables y $f \leq g$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Corolario 1.0.9. *Si f es R-integrable y $m \leq f \leq M$ entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Teorema 1.0.10. *Cualquier función continua en $[a, b]$ es R-integrable en $[a, b]$.*

Teorema 1.0.11. *Cualquier función monótona en $[a, b]$ es R-integrable en $[a, b]$.*

Teorema 1.0.12. *Sea $\mathcal{U}$ un abierto que contiene $[a, b]$. Si f es continua en $\mathcal{U}$ y F es primitiva de f en $\mathcal{U}$ entonces*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 1.0.13. *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, considérese la función característica*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tenemos que

(i) $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ *es acotada y no es continua en punto alguno.*

(ii) $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ *no es monótona, ni seccionalmente monótona.*

(iii) $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ *no es R-integrable en intervalo acotado alguno.*

Demostración.
(iii) Si f_1 y f_2 son dos funciones escalonadas, $f_1 \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x) < f_2$ bastará demostrar que para algún $\alpha > 0$.

$$\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \quad > \alpha$$

Obsérvese que $f_1 \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ en $[a, b]$ entonces $f_1 \leq 0$, para toda $x \in [a, b]$ y por lo tanto $\int_a^b f_1(x)dx \leq 0$.

De manera análoga, si f_2 es escalonada y $\chi_{\mathbb{Q}}(x) \leq f_2$ entonces $f_2 \geq 1$ y por lo tanto $\int_a^b f_2(x)dx \geq (b - a)$

Entonces

$$\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx \geq (b - a) = \alpha > 0,$$

para cualesquiera $\quad f_1, f_2 \quad$ escalonadas con $f_1 \leq \chi_{\mathbb{Q}}(x) < f_2$.

Por lo tanto, por el Teorema 1.0.6 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ no es R-integrable. $\square$

Ejemplo 1.0.14. ***(La función de Riemann)*** *Representemos a los racionales no nulos en la forma* $\frac{p}{q}$ *con* $q \neq 0$ *y* $(p,q) = 1$.
Defínase

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & si \quad x = \frac{p}{q} \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Entonces:
(i) $g(x)$ es continua en cada irracional y discontinua en los racionales.

Demostración.
Sea $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Podemos suponer sin perder generalidad que $[x-1, x+1] \subset [0, \infty)$, en otro caso el intervalo $[x-1, x+1]$ se puede transformar a un intervalo de la forma $[y-1, y+1]$ con $y \geq 1$.

Para cada $\epsilon > 0$ el subconjunto $A_\epsilon = \left\{ \frac{p}{q} \quad : \quad \frac{p}{q} \in [x-1, x+1] \quad y \quad \frac{1}{q} \geq \epsilon \right\}$ es finito. Pues si notamos que $x - 1 \leq \frac{p}{q} \leq x + 1$ y $0 < q \leq \frac{1}{\epsilon}$, tenemos que

$$0 \leq (x-1)q \leq p \leq (x+1)q \leq \frac{x+1}{\epsilon}.$$

Entonces p y q varian dentro de intervalos acotados y por lo tanto $\sharp A_\epsilon < \infty$.

Sea $\delta > 0$ tal que $[x-\delta, x+\delta] \cap A_\epsilon = \varnothing$. Entonces si $y \in [x-\delta, x+\delta]$,

$$g(y) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad y \quad \text{es irracional} \\ < \epsilon & \text{si} \quad y \quad \text{es racional} \end{cases}$$

Entonces $g(y) < \epsilon$, para toda $y \in [x-\delta, x+\delta]$, es decir,

$$|g(x) - g(y)| = |g(y)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x-y| < \delta.$$

Esto demuestra que g es continua para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ahora, si $x \in \mathbb{Q}$, digamos $0 \neq x = \frac{p}{q}$, entonces $g(x) = \frac{1}{q} \neq 0$. Si g fuera continua en x entonces para cualquier sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ que converge a x, la sucesión de sus imágenes convergería a $g(x)$. No obstante, si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de irracionales con $x_n \to x$ entonces

$$g(x_n) = 0 \nrightarrow \frac{1}{q} = g(x).$$

Esto demuestra que g no es continua en los racionales.

(ii) g es R-integrable en $[0,1]$. En realidad, esto mismo vale para cualquier intervalo acotado.

Demostración.
Sean $\epsilon > 0$ y $f_1(x) = 0$ la función identicamente cero para $x \in [0,1]$. Si $\dfrac{1}{n} < \epsilon$, sea $f_2(x) = \dfrac{1}{n}$ para todo $x \in [0,1]$ excepto en aquellos racionales en $A_{\frac{1}{n}} \cap [0,1]$, donde $A_{\frac{1}{n}} = \left\{ \dfrac{p}{q} : \dfrac{p}{q} \in [0,1] \quad \text{y} \quad \dfrac{1}{q} \geq \dfrac{1}{n} \right\}$, recuérdese que $\sharp\left(A_{\frac{1}{n}}\right) < \infty$. Nótese que como $x \in [0,1]$, entonces $[0,1] \subset [x-1, x+1]$ y por lo tanto $\sharp\left([0,1] \cap A_{\frac{1}{n}}\right) < \infty$. Tenemos que $f_1(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{n} = f_2(x)$ se cumple excepto en $[0,1] \cap A_{\frac{1}{n}}$, que tiene cardinalidad finita. Entonces,

$$\int_0^1 f_2(x)dx - \int_0^1 f_1(x)dx = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Y podemos concluir que g es $\mathcal{R}$-integrable y además,

$$\int_0^1 g(x)dx = 0.$$

$\square$

Capítulo 2

La medida de Lebesgue

2.1. Introducción

Alguna vez Lebesgue escribió: "Es claro que se debe iniciar partiendo $[c, d]$ en lugar de $[a, b]$, $\ldots$ ". En efecto, en contraposición con la integral de Riemann, en la cual se inicia partiendo el dominio de la función, Lebesgue propuso iniciar partiendo el rango de la función que se desea integrar. Podemos ilustrar la diferencia entre estos dos procedimientos con una analogía propuesta por el mismo Lebesgue: si en un paquete se tienen billetes de las siguiente denominaciones $\{0{,}10, 1, 0{,}50, 100, 20, 0{,}10, 2, 500, 20, 10, 100, 0{,}50\}$, de acuerdo con Riemann se contarían agrupando los primeros tres, después los cuatro siguientes y finalmente los últimos cinco para obtener $1{,}60 + 122{,}10 + 630{,}50 = 754{,}20$. Pero de acuerdo con el procedimeinto propuesto por Lebesgue los contariamos agrupándolos de acuerdo a sus valores, así: $0{,}10 \times 2 + 0{,}50 \times 2 + 20 \times 2 + 100 \times 2 + 2 + 500 + 1 + 10 = 754{,}20$.

En la siguiente figura ilustramos el proceso propuesto por Lebesgue.

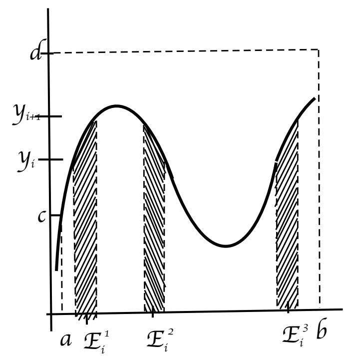

Figura 2.1: $f^{-1}[y_i, y_{i+1}] = E_i^1 \cup E_i^2 \cup E_i^3$

La imagen inversa de un intervalo como $[y_i, y_{i+1}]$, puede ser muy complicada. En la figura, la imagen inversa del intervalo $[y_i, y_{i+1}]$ es una unión de intervalos pero, para funciones menos regulares, esta imagen inversa es mucho más complicada. Por ejemplo, si f es la función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

la imagen inversa de un intervalo suficientemente pequeño alrededor de 1 es $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ que no es una unión de intervalos; lo mismo ocurre con la imagen inversa $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, de un intervalo suficientemente pequeño alrededor de 0.

No obstante el área de la parte sombreada en la figura 2,1 se puede aproximar por $c_i\ell(E_i^1) + c_i\ell(E_i^2) + c_i\ell(E_i^3) = c_i \sum_k \ell(E_i^k)$, con $c_i \in [y_i, y_{i+1}]$, donde $\ell(E)$ representa la longitud del intervalo E. Y la integral se aproximaría por la suma de las áreas de las imágenes inversas de los intervalos $[y_i, y_{i+1}]$. Pero, ¿qué longitud es natural asignar a subconjuntos como $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$?

En lo que sigue estudiaremos este problema separándolo en dos partes:

1.- Caracterizar la clase de los subconjuntos E que son imágenes inversas de funciones razonablemente buenas.

2.- Asignar una longitud (medida) a cada uno de estos subconjuntos E.

Para tratar con estos dos problemas utilizaremos el concepto de medida exterior y la condición de Caratheodory para definir la clase de los subconjuntos medibles. Este enfoque requiere superar varias dificultades técnicas, no obstante lo preferimos debido a su versatilidad para generalizarse a un contexto más abstracto.

2.2. La medida exterior de Lebesgue

Sea $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario y sea $(I_n)_{n\geq 1}$ una colección a lo más numerable de intervalos abiertos tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. La medida anterior de A se define mediante la relación

$$0 \leq m^*A = \text{ínf} \left\{ \sum_{n\geq 1} \ell(I_n) : \{I_n\}_{n\geq 1}, A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \text{el ínfimo se toma sobre}$$

todas las colecciones $\{I_n\}$ a lo más numerables de subintervalos abiertos con $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Como $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) \geq 0$, para toda colección de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n\geq 1}$, tenemos que m^*A está bien definida, pues es el ínfimo de un subconjunto no vacío y acotado por abajo.

Si A es tal que $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) = \infty$ para toda colección $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$, en este caso definimos $m^*A = \infty$.

Tenemos que $m^*\phi = 0$. Para demostrar esto, basta tomar las cubiertas $\{(-1,1)\}, \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}, \ldots$. Todas ellas cubren a ϕ, es decir, $\phi \subset (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$, para cada $n \geq 1$; entonces $0 \leq m^*\phi \leq \frac{2}{n}, \ldots \quad \forall n > 1$.

El mismo razonamiento permite demostrar que la medida exterior de un punto $a \in \mathbb{R}$ es cero: $m^*\{a\} = 0$.

Teorema 2.2.1. *Si $A \subset B$, entonces $m^*A \leq m^*B$.*

Demostración. Si $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es una cubierta de B por intervalos abiertos entonces $\cup_{n\geq 1} I_n \supset B \supset A$, por lo tanto $\{I_n\}_{n\geq 1}$ también es una cubierta abierta de A por intervalos abiertos.

Nótese que $\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) : \cup_{n\geq 1} I_n \supset B\right\} \subset \left\{\sum_{n\geq 1} \ell(J_n) : \cup_{n\geq 1} J_n \supset A\right\}$, porque las cubiertas de B también cubren A y A tiene cubiertas que no cubren B. Entonces

$$m^*B = \text{ínf}\left\{\sum \ell(I_j) : \cup_j I_j \supset B\right\} \geq \text{ínf}\left\{\sum_j \ell(I_j) : \cup_{j\geq 1} I_j \supset A\right\} = m^*(A).$$

□

Teorema 2.2.2. *La medida exterior de un intervalo es igual a su longitud.*

Demostración. (i) Consideremos el caso $I = [a,b], \quad a < b$. Demostraremos las dos desigualdades: $m^*[a,b] \leq b - a, \quad y \quad b - a \leq m^*[a,b]$.

Consideremos cubiertas del tipo $\left\{\left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right\}$. Entonces

$$[a,b] \subset \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right), \quad \forall n \geq 1$$

y por lo tanto para toda $n \geq 1$,

$$m^*[a,b] \leq b - a + \frac{2}{n}.$$

Esto demuestra que $m^*[a,b] \leq b - a$.

Ahora sea $\{I_n\}_{n\geq 1}$ una cubierta de $[a,b]$ por intervalos abiertos. Por la compacidad de $[a,b]$, existe una subcubierta finita $\{I_{n_m}\}_{m=1}^{M}$ de $[a,b]$. Como $a \in \cup_{m=1}^{M} I_{n_m}$, existe un subintervalo $I_1 = I_{n_{m_1}}$ tal que $a \in I_1 = (a_1, b_1)$, entonces $a_1 < a < b_1$. Si $b < b_1$ ya terminamos. En otro caso $b_1 < b$ y como $[a,b] \subset \cup_{m=1}^{M} I_{n_m}$, existe un intervalo $I_2 = I_{n_{m_2}}$ tal que $b_1 \in I_2 = (a_2, b_2)$, es decir $a_2 < b_1 < b_2$. De esta manera logramos obtener una nueva subcolección finita $I_1, I_2, \ldots, I_k$ de subintervalos abiertos tales que $a_j < b_{j-1} < b_j$ para $2 \leq j \leq k-1 \quad y \quad a_k < b < b_k$. Entonces para toda cubierta $(I_n)_{n\geq 1}$ de $[a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) &\geq \sum_{m=1}^{M} \ell(I_{n_m}) \geq \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j) \\
&= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) \\
&= b_k - (a_k - b_{k-1}) - \cdots - (a_2 - b_1) - a_1 \geq b - a.
\end{aligned}$$

Es decir, $m^*([a,b]) \geq b-a$.

(ii) Supongase ahora que I es arbitrario pero con longitud finita. Entonces existe un intervalo cerrado $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{J} \subset I$ y $\ell(\mathcal{J}) > \ell(I) - \epsilon, \epsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ell(I) - \epsilon &< \ell(\mathcal{J}) = m^*\mathcal{J} \leq m^* I \\ &\leq m^*\overline{I} = \ell(\overline{I}) = \ell(I). \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $m^* I \leq \ell(I)$ y $\ell(I) - \epsilon \leq m^* I$ para todo $\epsilon > 0$, por lo tanto, $m^* I = \ell(I)$.

(iii) Si I es un intervalo infinito, dado cualquier $M > 0$ existe un intervalo cerrado $\mathcal{J} \subset I$ tal que $\ell(\mathcal{J}) = M$. Entonces

$$m^* I \geq m^*\mathcal{J} = \ell(\mathcal{J}) = M \quad \text{con } M > 0 \text{ arbitrario.}$$

Es decir,

$$m^* I = \infty = \ell(I).$$

□

Teorema 2.2.3. *(Subaditividad de la medida exterior)*
Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$ entonces

$$m^* \cup_{n=1}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n.$$

Demostración. Si $m^* A_n = \infty$ para algún $n \geq 1$, entonces la desigualdad es obvia. Supóngase $m^* A_n < \infty \quad \forall \quad n \geq 1$. Para cada $\epsilon > 0$ y $n \geq 1$ sea $\epsilon_n = \dfrac{\epsilon}{2^n}$. Entonces existe una cubierta $\{I_{n,j}\}_{j\geq 1}$ de A_n por intervalos abiertos tales que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_n, j) < m^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

La colección $\{I_n, j\}_{j\geq 1, n\geq 1}$ es una cubierta de $\cup_{n\geq 1} An$ por intervalos abiertos. Entonces

$$\begin{aligned} m^* \cup_{n\geq 1} A_n &\leq \sum_{n\geq 1}\sum_{j\geq 1} \ell(I_{n,j}) < \sum_{n\geq 1}(m^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}) \\ &= \sum_{n\geq 1} m^* A_n + \epsilon \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\geq 1} m^* A_n + \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. □

Corolario 2.2.4. *Supóngase $A \subset \mathbb{R}$ a lo más numerable, entonces $m^* A = 0$.*

Demostración. Si $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$, como $m^*\{a_n\} = 0$ para cada $n \geq 1$, entonces

$$m^*A = m^* \cup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*\{a_n\} = 0.$$

□

Sabemos que $m^*[0,1] = 1$, entonces $[0,1]$ es no-numerable.

Si $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto arbitrario entonces, de acuerdo con la definición de m^*A y las propiedades del ínfimo de un conjunto, tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta $\{I_n^\epsilon\}_{n>1}$ de A por intervalos abiertos tales que

$$\sum_{n\geq 1} \ell(I_n^\epsilon) < m^*A + \epsilon.$$

Sea $\mathcal{O}^\epsilon = \cup_{n\geq 1} I_n^\epsilon$ entonces $\mathcal{O}^\epsilon \supset A$, y

$$m^*\mathcal{O}^\epsilon = m^* \cup_{n\geq 1} In^\epsilon \leq \sum_{n>1} m^*(I_n^\epsilon) = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n^\epsilon) < m^*A + \epsilon.$$

En otras palabras, hemos demostrado el siguiente.

Corolario 2.2.5. *Para todo* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $\epsilon > 0$ *existe* $\mathcal{O}^\epsilon$ *abierto tal que* $\mathcal{O}^\epsilon \supset A$ *y* $m^*\mathcal{O}^\epsilon < m^*A + \epsilon$.

Es decir la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ se puede aproximar por la medida exterior de un abierto.

2.3. La σ-álgebra de los subconjuntos medibles

Una propiedad natural de una medida es la $\sigma - aditividad$:

$$m^* \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n,$$

si la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ tiene elementos mutuamente ajenos, es decir, $A_n \cap A_m = \emptyset, \quad \text{si } n \neq m$.

No es posible demostrar que m^* es $\sigma - aditiva$ cuando la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión de subconuntos de $\mathbb{R}$. Pero esta propiedad se cumple cuando los elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ pertenecen a una clase especial de subconjuntos, la de los subconjuntos medibles.

Definición 2.3.1. *(Caratheodory) Un subconjunto E de números reales es **medible** si y sólo si dado cualquier otro subconjunto* $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*A \quad = \quad m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

La condición de Caratheodory puede considerarse como una condición de separabilidad, es decir, un subconjunto medible E separa bien a cualquier otro conjunto en el sentido de la medida exterior.

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la colección de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$. Si $E \in \mathcal{M}$ (i.e., si E es medible), entonces su medida de Lebesgue mE es su medida exterior, $mE = m^*E$.

La condición de Caratheodory es simétrica (invariante) respecto de la aplicación $E \to E^c$. En consecuencia, E es medible si y sólo si E^c es medible.

El subconjunto vacío $\emptyset$ es medible, pues si $A \subset \mathbb{R}$, es cualquier subconjunto (de prueba), entonces $m^*(A\cap\emptyset) = m^*\emptyset = 0$ y $m^*(A\cap\emptyset^c) = m^*(A\cap\mathbb{R}) = m^*A$. Por lo tanto,

$$m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^c) = m^*A \quad \forall \quad A \subset \mathbb{R}.$$

En consecuencia $\mathbb{R}$ también es medible.

Nótese que la condición de Caratheodory es equivalente con las dos desigualdades

$$\begin{array}{ll} (i) & m^*A \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall \quad A \subset \mathbb{R} \\ (ii) & m^*A \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \quad \forall \quad A \subset \mathbb{R}. \end{array}$$

Y la primera de ellas siempre se cumple, pues por subaditividad,

$$m^*A = m^*\left((A \cap E) \cup (A \cap E^c)\right) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Entonces para demostrar que un subconjunto E es medible, bastará verificar que la segunda desigualdad se cumple para todo subconjunto (de prueba) $A \subset \mathbb{R}$.

Proposición 2.3.2. *Todo subconjunto E con medida exterior cero es medible y $mE = 0$.*

Demostración. Tomemos cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Tenemos que $A\cap E \subset E$, entonces $0 \leq m^*(A \cap E) \leq m^*E$, por lo tanto

$$m^*(A \cap E) = 0.$$

Por otra parte $A \cap E^c \subset A$, entonces

$$m^*(A \cap E^c) \leq m^*A.$$

Por lo tanto tenemos que

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m(A \cap E^c) \leq m^*A.$$

□

Como consecuencia inmediata de la Proposición anterior se obtiene que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que es a lo más numerable, es medible y tiene medida cero. También son medibles aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyo complemento es a lo más numerable. En particular $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ son medibles y $m\mathbb{Q} = 0$. También son medibles todos los subconjuntos de conjuntos de medida exterior cero.

Proposición 2.3.3. *Si E y F son medibles, entonces $E \cup F$ es medible.*

Demostración.
Tomemos cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Bastará demostrar que

$$m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap (E \cup F)^c) \leq m^* A.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} A \cap (E \cup F) &= (A \cap (E \cup F)) \cap (E \cup E^c) \\ &= (A \cap (E \cup F) \cap E) \cup (A \cap (E \cup F) \cap E^c) \\ &= (A \cap E \cap E) \cup (A \cap F \cap E) \cup (A \cap E \cap E^c) \cup (A \cap F \cap E^c) \\ &= (A \cap E) \cup (A \cap F \cap E^c). \end{aligned}$$

Entonces por la subaditividad,

$$m^*(A \cap (E \cup F)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F \cap E^c),$$

consecuentemente,

$$m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \leq$$
$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F \cap E^c) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) =$$
$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

pues F es medible. Así mismo, la medibilidad de E implica que

$$m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^* A.$$

□

Definición 2.3.4. *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llama álgebra (o álgebra de Borel) si para $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que*

(i) $A \cup B \in \mathcal{A}$

(ii) $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Si $E, F \in \mathcal{A}$, entonces E^c y F^c también pertenecen a $\mathcal{A}$, por lo tanto $E^c \cup F^c \in \mathcal{A}$. Pero $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c$. Entonces las propiedades (i) y (ii) junto con leyes de DeMorgan implican (iii).

Ejercicio. Demostrar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$.

De acuerdo con lo que hemos demostrado hasta ahora podemos concluir que la colección $\mathcal{M}$, de los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, es un álgebra.

Proposición 2.3.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathcal{A}$, entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$ tales que $B_n \cap B_m = \emptyset$ para $n \neq m$ y $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Demostración. Tómese $B_1 = A_1$ y para $n > 1$, defínase

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \backslash (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1) \\ &= A_n \cap (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1)^c. \end{aligned}$$

Se tiene que $B_n \in \mathcal{A}$ para todo $n > 1$. Además,

$$\begin{aligned} B_n \cap B_{n-1} &= (A_n \cap (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1)^c) \cap (A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1)^c) \\ &= A_n \cap A_{n-1}^c \cap (A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1)^c \cap A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup \cdots \cup A_1)^c \\ &= \emptyset \quad \forall n > 1. \end{aligned}$$

Como $B_n \subset A_n$, entonces $\cup_{n \geq 1} B_n \subset \cup_{n \geq 1} A_n$. Si $x \in \cup_{n \geq 1} A_n$, sea m el menor índice tal que $x \in A_m$. Entonces $x \in B_m$ ya que $x \notin A_j$ para $1 \leq j \leq m-1$ y consecuentemente,

$$x \in \cup_{n \geq 1} B_n$$

□

Definición 2.3.6. *Una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ es un álgebra que también es cerrada bajo uniones contables, es decir, si $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{A}$, entonces $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.*

Lema 2.3.7. *Sea A cualquier subconjunto y $E_1, \ldots, E_n$ subconjuntos medibles y disjuntos. Entonces*

$$m^* (A \cap (\cup_{j=1} E_j)) = \sum_{j=1}^{n} m^* (A \cap E_j).$$

Demostración. Si $n = 1$, entonces $m^* (A \cap E_1) = m^* (A \cap E_1)$. Supongamos que el resultado vale para $n - 1$ subconjuntos. Como los $E_j's$ son disjuntos, entonces

$$A \cap \left(\cup_{j=1}^{n} (E_j\right) \cap E_n = A \cap E_n,$$

y

$$A \cap \left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) \cap E_n^c = A \cap \left(\cup_{j=1}^{n-1} E_j\right).$$

Entonces como E_n es medible

$$\begin{aligned} m^* \left(A \cap \left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right)\right) &= m^* \left(A \cap \left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) \cap E_n\right) + m^* \left(A \cap \left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) \cap E_n^c\right) \\ &= m^* (A \cap E_n) + m^* \left(A \cap \left(\cup_{j=1}^{n-1} E_j\right)\right). \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} & m^* (A \cap E_n) + m^* \left(A \cap \left(\cup_{j=1}^{n-1} E_j\right)\right) \\ = \; & m^* (A \cap E_n) + \sum_{j=1}^{n-1} m^* (A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} m^* (A \cap E_j). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.8. *$\mathcal{M}$ es una $\sigma-$álgebra.*

Demostración. Como ya sabemos que $\mathcal{M}$ es un álgebra, bastará verificar que es cerrada bajo uniones numerables. Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{M}$. Siendo $\mathcal{M}$ un álgebra por la Proposición 2,3,5, podemos suponer que $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta. Sea $F_n = \cup_{j=1}^n E_j$, cada F_n es medible y $F_n \subset E = \cup_{j=1}^\infty E_j$, entonces para cada $n \geq 1$,

$$E^c \subset F_n^c.$$

Sea $A \subset \mathbb{R}$ cualquier subconjunto de prueba, tenemos que

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E_n^c) \\ &= \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap E_n^c) \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

pues $A \cap E_n^c \subset A \cap F_n^c$ y $F_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$. Entonces

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{j=1}^\infty m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap E^c) \\ &\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \end{aligned}$$

por la subaditividad. □

Corolario 2.3.9. *Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos, entonces $m\cup_{n\geq 1} E_n = \sum_{n\geq 1} mE_n$, Es decir, la medida de Lebesgue es σ-aditiva.*

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es σ-álgebra, para cada $m \geq 1$ tenemos que $\cup_{n\geq 1}^m E_n \in \mathcal{M}$ y $\cup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{M}$.

Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medibles disjuntos, entonces tenemos para cada $m \geq 1$

$$\cup_{n=1}^m E_n \subset \cup_{n=1}^\infty E_n,$$

entonces

$$m\left(\cup_{n=1}^m E_n\right) \leq m\left(\cup_{n=1}^\infty E_n\right).$$

Por el Lema 2.3.7 para todo $m \geq 1$ tenemos que,

$$\sum_{n=1}^m mE_n = m \cup_{n=1}^m E_n \leq m\left(\cup_{n=1}^\infty E_n\right).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m mE_n = \sum_{n\geq 1} mE_n \leq m\left(\cup_{n\geq 1} E_n\right).$$

La desigualdad opuesta es la subaditividad. □

Proposición 2.3.10. *El intervalo* (a, ∞), $\quad a \in \mathbb{R}$, *es medible.*

Antes de demostrar esta proposición escribamos algunas consecuencias inmediatas de ella:

(i)	$(-\infty, b] = (b, \infty)^c$	es medible $\forall b \in \mathbb{R}$.
(ii)	$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty)$.	es medible
(iii)	$\{a\} \cup (a, b] = [a, b]$	es medible.
(iv)	$(a, b] \cap \{b\}^c = (a, b)$	es medible.
(v)	$[0, 1] \cap \mathbb{Q}$	es medible y $m[0, 1] \cap \mathbb{Q} = 0$.

Entonces $[0, 1] \cap \mathbb{Q}^c$ es medible, y además

$$\begin{aligned} 1 = m^*[0,1] &\leq m^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) + m^*([0,1] \cap \mathbb{Q}^c) \\ &= m^*([0,1] \cap \mathbb{Q}^c). \end{aligned}$$

Como $[0, 1] \cap \mathbb{Q}^c \subset [0, 1]$ tenemos que $m^*([0, 1] \cap \mathbb{Q}^c) \leq 1$,
entonces

$$m([0, 1] \cap \mathbb{Q}^c) = 1.$$

Demostración.(de la Proposición 2.3.10) Bastará demostrar que para todo $A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(A \cap (a, \infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a]) \leq m^* A.$$

(i) Si $m^* A = \infty$ no hay nada que demostrar.
(ii) Supóngase que $m^* A < \infty$. Por la definición de m^*, dado $\epsilon > 0$ existe una cubierta $\{I_n\}_{n \geq 1}$ de A por intervalos abiertos tales que

$$\sum_n \ell(I_n) \leq m^* A + \epsilon.$$

Sean

$$I_{n'} = I_n \cap (a, \infty) \quad \text{y} \quad I_{n''} = I_n \cap (-\infty, a]$$

Los intervalos $\quad I_{n'}, I_{n''} \quad$ son disjuntos o vacíos y

$$\ell(I_n) = \ell(I_{n'}) + \ell(I_{n''}) = m^* I_{n'} + m^* I_{n''}.$$

Además

$$(A \cap (a, \infty)) \subset \cup_n I_{n'},$$

entonces

$$m^*\left(A \cap (a, \infty)\right) \leq \sum_n m^* I_{n'}. \qquad (1)$$

De manera análoga

$$A \cap (-\infty, a] \subset \cup_n I_{n''},$$

y de aquí se obtiene que

$$m^*\left(A \cap (-\infty, a]\right) \leq \sum_n m^* I_{n''} = \sum_n \ell(I_{n''}). \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) se obtiene que

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap (a,\infty)\right) + m^*\left(A \cap (-\infty,a]\right) &\leq \sum_n \ell(I_{n'}) + \sum_n \ell(I_{n''}) \\ &= \sum_n (\ell(I_{n'}) + \ell(I_{n''})) = \sum_n \ell(I_n) \\ &\leq m^*A + \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Consecuentemente,

$$m^*(A \cap (a,\infty)) + m^*(A \cap (-\infty,a]) \leq m^*A.$$

□

Proposición 2.3.11. *Todo abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ es medible. Además, si $\mathcal{O} = \cup_{n\geq 1} I_n$, es la representación de $\mathcal{O}$ como unión de una colección a lo más numerable de intervalos abiertos y disjuntos, entonces $m\mathcal{O} = \sum_{n\geq 1} \ell(I_n)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{O} = \cup_{n\geq 1} I_n$ la represntación de $\mathcal{O}$ como unión a lo más numerable de intervalos abiertos disjuntos. Entonces $\mathcal{O}$ es medible porque $\mathcal{M}$ es $\sigma-$álgebra y cada I_n es medible, además por el Corolario 2.3.9

$$m\mathcal{O} = m^*\mathcal{O} = \sum_n m^* I_n = \sum_n \ell(I_n).$$

□

A partir de una colección arbitraria de subconjuntos se puede generar una σ-álgebra. El lector puede encontrar en la literatura la demostración de la siguiente Proposición, o puede intentar elaborar su propia demostración.

Proposición 2.3.12. *Dada una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$, existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A}$ que la contiene. Es decir, si $\mathcal{B}$ es otra σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.*

Definición 2.3.13. *La mínima σ-álgebra que contiene a la topología τ de $\mathbb{R}$, se llama σ-álgebra de Borel y se denota por $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman subconjuntos de Borel.*

Todo subconjunto de Borel es medible pues, de acuerdo con la Proposición 2.3.12, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

Ejercicio. Demostrar que existe un conjunto medible que no es de Borel, es decir la σ-álgebra de Borel es una σ-álgebra propia de la σ-álgebra de los subconjuntos medibles.

Los subconjuntos (a,b), $(-\infty,a)$, $[a,\infty)$ son borelianos y, por lo tanto, medibles.

Definición 2.3.14. *(Las clases G_δ y F_σ)*

- *Un subconjunto $G \in G_\delta$ si es una intersección numerable de abiertos. Nótese que estos elementos se pueden salir de la topología, pues ésta no es cerrada bajo intersección numerable de abiertos.*

- *Un subconjunto $F \in F_\sigma$ si es una unión numerable de cerrados.*

Tenemos que $G_\delta, F_\sigma \subset \mathcal{B}$.

Proposición 2.3.15. *El conjunto de puntos de discontinuidad de una función arbitraria es un F_σ.*

Demostración. Sean $M(x,h)$ y $m(x,h)$ el supremo y el ínfimo de f en el intervalo $[x-h, x+h]$. La función $o(x) = \text{lím}_{h\to 0}(M(x,h) - m(x,h))$ se llama la oscilación de f. Nótese que la condición $o(x) = 0$ significa que f es continua en x. Consecuentemente el conjunto de puntos de discontinuidad de f se puede representar en la forma

$$\cup_{n\geq 1}\{x : o(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Bastará demostrar que el conjunto $\{x : o(x) \geq \frac{1}{n}\}$ es cerrado para cada $n \geq 1$. Si $x_n \to x$ y $o(x_n) \geq \frac{1}{n}$ para cada $n \geq 1$, entonces para cada h existe N_h tal que $x_n \in (x-h, x+h)$ si $n \geq N_h$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \subset (x-h, x+h)$, existen puntos y_n y z_n en $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$ tales que $|f(y_n) - f(x_n)| > \frac{1}{n}$, entonces $o(x) \geq \frac{1}{n}$. $\square$

Ejercicios

1.- Demuestre que en $\mathbb{R}$ la intersección de una colección numerable de abiertos densos es denso.

2.- Demuestre que $\mathbb{R}$ no es una unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío (es decir, con complemento denso).

3.- Demuestre que los irracionales no son un F_σ. Sugerencia: Si lo fueran entonces $\mathbb{R}$ sería una unión numerable de cerrados con interior vacío.

4.- Concluya que no existe una función continua en los racionales y discontinua en los irracionales.

Proposición 2.3.16. (i) *Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente ($E_{n+1} \subset E_n$) de subconjuntos medibles y $mE_1 < \infty$, entonces*

$$m\left(\cap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

(ii) *Si $(E_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos medibles, entonces*

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

Demostración. Sean $E = \cap_{n\geq 1} E_n$ y $F_n = E_n \backslash E_{n+1}$ entonces

$$\begin{aligned}
\cup_{n\geq 1} F_n &= (E_1\backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_3) \cup \dots \\
&= (E_1 \cap E_2^c) \cup (E_2 \cap E_3^c) \cup (E_3 \cap E_4^c) \cup \dots \\
&= E_1 \cap (E_2^c \cup E_3^c) \cdots = E_1 \cap (E_2^c \cup E_3^c \cup \dots) \\
&= E_1 \cap (\cap_{n\geq 1} E_n)^c = E_1 \backslash E
\end{aligned}$$

Los F_n's son disjuntos a pares ya que

$$F_n \cap F_{n+1} = (E_n \cap E_{n+1}^c) \cap (E_{n+1} \cap E_{n+2}^c) = \emptyset,$$

y en general,

$$F_n \cap F_m = \emptyset \quad \text{si } n \neq m.$$

Por la $\sigma-$aditividad de m

$$m(E_1 \backslash E) = \sum_{n \geq 1} mF_n = \sum_{n \geq 1} m(E_n \backslash E_{n+1}).$$

Pero

$$E_1 = E \cup (E_1 \backslash E),$$

entonces

$$mE_1 = mE + m(E_1 \backslash E).$$

Y de manera análoga se demuestra que

$$mE_n = mE_{n+1} + m(E_n \backslash E_{n+1}).$$

Como

$$mE_1 < \infty \quad \text{y} \quad E_n \subset E_1 \quad \forall n \geq 2,$$

entonces

$$mE_n \leq mE_1 < \infty \quad \forall n \geq 2.$$

Es decir todos los E_n y E, tienen medida de Lebesgue finita. De acuerdo con lo anterior tenemos que

$$m(E_1 \setminus E) = mE_1 - mE,$$

y

$$m(E_n \backslash E_{n+1}) = mE_n - mE_{n+1}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} mE_1 - mE &= \sum_{n \geq 1} (mE_n - mE_{n+1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} mE_k - mE_{k+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} (mE_1 - mE_n) = mE_1 - \lim_{n} mE_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$mE = m(\cap_{n \geq 1} E_n) = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

Esto demuestra (i).

Para demostrar (ii) obsérvese que si $mE_n = \infty$ para algún n, entonces $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \infty$, pues la sucesión es creciente. Y si $mE_n < \infty$ para cada $n \geq 1$, podemos escribir

$$\cup_n^{\infty} = E_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty} (E_{n+1} - E_n),$$

y la unión es disjunta. Entonces

$$m(\cup_n^\infty E_n) = mE_1 + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_{n+1} - E_n) = mE_1 + \lim_N \sum_{n=1}^{N} m(E_{n+1} - E_n) = \lim_N mE_N.$$

$\square$

El conjunto de Cantor. En $[0,1]$ considérese la siguiente construcción

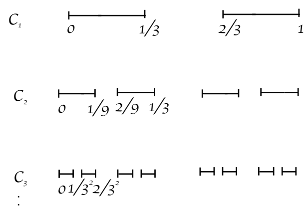

Figura 2.2: Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ se define como,

$$\mathcal{C} = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

De acuerdo con la parte (i) de la Proposición 2.3.16

$$m\mathcal{C} = \lim_n m\mathcal{C}_n,$$

pero

$$m\mathcal{C}_1 = \frac{2}{3} \quad m\mathcal{C}_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad m\mathcal{C}_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \ldots,$$

y no es dificil demostrar por inducción que $m\mathcal{C}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Por lo tanto

$$m\mathcal{C} = \lim_n m\mathcal{C}_n = \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Para finalizar esta sección demostraremos varias condiciones que son equivalentes con la condición de Caratheodory. Cualquiera de ellas pudo haberse tomado como definición de subconjunto medible.

Proposición 2.3.17. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) E es medible,

(ii) Para cada $\epsilon > 0 \quad \exists \quad \mathcal{O}_\epsilon \supset E$ abierto tal que $m^*(\mathcal{O}_\epsilon \backslash E) < \epsilon$,

(iii) Para cada $\epsilon > 0 \quad \exists \quad F_\epsilon \subset E$ cerrado tal que $m^*(E \backslash F_\epsilon) < \epsilon$

(iv) Existe $G \in \mathcal{G}_\mathcal{G}$ con $E \subset G$ tal que $m^*(G \backslash E) = 0$

(v) Existe $F \in \mathcal{F}_\sigma$ con $F \subset E$ tal que $m^*(E\backslash F) = 0$.

Si $m^*E < \infty$, las proposiciones anteriores son equivalentes con

(vi) Dado $\epsilon > 0$ existe una unión finita de intervalos abiertos $\mathcal{U}$ tal que $m^*(E \vartriangle \mathcal{U}) < \epsilon$ con $E \vartriangle \mathcal{U} = (E\backslash\mathcal{U}) \cup (\mathcal{U}\backslash E)$ donde $\vartriangle$ denota la diferencia simétrica.

Demostración. Demostraremos las siguientes implicaciones: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) $\Rightarrow$ (**iv**) $\Rightarrow$ (**i**), (**i**) $\Rightarrow$ (**iii**) $\Rightarrow$ (**v**) $\Rightarrow$ (**i**) y (**ii**) $\Rightarrow$ (**iv**) $\Rightarrow$ (**ii**).

Supongamos que $m^*E < \infty$. Dado $\epsilon > 0 \quad \exists \mathcal{O}_\epsilon \supset E$ tal que $m^*\mathcal{O}_\epsilon < m^*E + \epsilon$. Como E es medible entonces E separa bien a $\mathcal{O}_\epsilon$ es decir

$$m^*\mathcal{O}_\epsilon = m^*\left(\mathcal{O}_\epsilon \cap E\right) + m^*\left(\mathcal{O}_\epsilon \cap E^c\right) = m^*E + m^*\left(\mathcal{O}_\epsilon \backslash E\right),$$

entonces

$$m^*\left(\mathcal{O}_\epsilon \backslash E\right) = m^*\mathcal{O}_\epsilon - m^*E < \epsilon.$$

Supóngase ahora que $m^*E = \infty$. Sigue siendo válido que dado $\epsilon > 0 \quad \exists \mathcal{O}_\epsilon \supset E$ tal que $m^*\mathcal{O}_\epsilon < m^*E + \epsilon$. Sea $E_n = E \cap (n, n+1) \quad n \in \mathbb{Z}$. Como $m^*E_n \leq 1 < \infty \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}$, existe $\mathcal{O}_n \supset E_n$ tal que

$$m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E_n\right) < \epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^{|n|}}.$$

Sea $\mathcal{O} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_n \supset \cup_{n\in\mathbb{Z}}E_n = E$, entonces $\mathcal{O}$ es abierto y

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_\epsilon \backslash E &= \left(\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_n\right) \cap \left(\cup_{n\in\mathbb{Z}}E_n\right)^c = \left(\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_n\right) \cap \left(\cap_{n\in\mathbb{Z}}E_n^c\right) \\
&= \cup_n \left(\mathcal{O}_n \cap \left(\cap_n E_n^c\right)\right) = \cup_n \mathcal{O}_n \cap E^c \\
&= \cup_n \left(\mathcal{O}_n \backslash E\right).
\end{aligned}$$

Ahora como

$$\begin{gathered}
\mathcal{O}_n \backslash E \quad \subset \quad \mathcal{O}_n \backslash E_n, \\
m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E\right) \leq m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E_n\right),
\end{gathered}$$

entonces

$$m^*\left(\mathcal{O}\backslash E\right) \leq \sum_n m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E\right) \leq \sum_n m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E_n\right) < \sum_n \frac{\epsilon}{2^{|n|}} = \epsilon.$$

Esto demuestra que (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**).

Sea $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$, con $\epsilon_n > 0$, cualquier sucesión que converge a cero.

$$\forall n \quad \exists \mathcal{O}_n \quad \text{tal que} \quad \mathcal{O}_n \supset E \quad \text{y} \quad m^*\left(\mathcal{O}_n \backslash E\right) < \epsilon.$$

Sea $\quad G = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n \in \mathcal{G}_\delta$,

$$\begin{aligned}
G\backslash E &= G \cap E^c = \left(\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n\right) \cap E^c = \cap_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n \cap E^c) \\
&= \cap_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n \backslash E) \subset \mathcal{O}_n \backslash E \quad \forall n \geq 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$0 \leq m^*(G \backslash E) \leq m^*(\mathcal{O}_n \backslash E) < \epsilon_n \to 0.$$

Por lo tanto

$$m^*(G \backslash E) = 0$$

Esto demuestra que **(ii)** $\Rightarrow$ **(iv)**.

Demostremos ahora que **(iv)** $\Rightarrow$ **(i)**. Bastará demostrar que $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*A$, para cualquier subconjunto de prueba $A \subset \mathbb{R}$. Tenemos que $A \cap E \subset A \cap G$, entonces $m^*(A \cap E) \leq m^*(A \cap G)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} A \cap E^c &= (A \cap E^c) \cap X = (A \cap E^c) \cap (G \cup G^c) \\ &= (A \cap E^c \cap G) \cup (A \cap E^c \cap G^c) \\ &= (A \cap G \cap E^c) \cup (A \cap G^c) \subset (G \cap E^c) \cup (A \cap G^c), \end{aligned}$$

entonces

$$m^*(A \cap E^c) \leq m^*(G \cap E^c) + m^*(A \cap G^c) = m^*(A \cap G^c),$$

pues $m^*(G \setminus E) = 0$.

Por lo tanto,

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A \cap G) + m^*(A \cap G^c) = m^*A, \quad \text{pues } G \text{ es medible.}$$

Consideremos ahora la segunda cadena de implicaciones. Supóngase que (i) se cumple y tómese un subconjunto E medible, entonces E^c es medible y por (ii), $\exists \quad \mathcal{O}_\epsilon \supset E^c$ abierto tal que $m^*(\mathcal{O}_\epsilon \cap (E^c)^c) < \epsilon$.
Tómese el cerrado $F_\epsilon = \mathcal{O}_\epsilon^c$ y obsérvese que $E \supset \mathcal{O}_\epsilon^c = F_\epsilon$, por lo tanto

$$m^*(E \backslash F_\epsilon) = m^*(E \cap F_\epsilon^c) \leq m^*(E \cap \mathcal{O}_\epsilon) < \epsilon.$$

Esto demuestra que **(i)** $\Rightarrow$ **(iii)**.

Sea $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$, $\epsilon_n > 0$, una sucesión convergente a cero, entonces por **(iii)**, para todo $n \geq 1$ existe un cerrado F_n tal que $F_n \subset E$ y $m^*(E \cap F_n^c) < \epsilon_n$. Sea $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}_\sigma$, como $F \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}_\sigma^c$, y se tiene $F \subset E$. Ahora,

$$\begin{aligned} E \backslash F &= E \cap F^c = E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} F_n)^c = E \cap (\cap_{n=1}^{\infty} F_n^c) \\ &= \cap_{n=1}^{\infty} E \cap F_n^c \subset E \cap F_n^c \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m^*(E \backslash F) = m^* \left(\cap_{n=1}^{\infty} E \cap F_n^c\right) \leq m^*(E \cap F_n^c) < \epsilon_n,$$

para todo $n \geq 1$. Esto demuestra que

$$m^*(E \backslash F) = 0.$$

Es decir, **(iii)** $\Rightarrow$ **(v)**.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ cualquier subconjunto de prueba y $F \in \mathcal{F}_\sigma$ como en **(v)**. Como F es medible, F^c también es medible. Además, como $F \subset E$, entonces $E^c \subset F^c$, y por lo tanto

$$m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A \cap F^c).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} A \cap E &= (A \cap E) \cap X = (A \cap E) \cap (F \cup F^c) \\ &= (A \cap E \cap F) \cup (A \cap E \cap F^c) \\ &= (A \cap F) \cup (A \cap E \cap F^c) \subset (A \cap F) \cup (E \cap F^c), \end{aligned}$$

entonces

$$m^*(A \cap E) \quad \leq \quad m^*(A \cap F) + m^*(E \cap F^c) = m^*(A \cap F).$$

Por lo tanto,

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c) = m^* A.$$

Esto demuestra que E es medible y consecuentemente **(v)** $\Rightarrow$ **(i)**.

La última cadena de implicaciones se demuestra enseguida. Supóngase que **(ii)** se cumple y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un abierto $\mathcal{O}$ tal que $E \subset \mathcal{O}$ y $m^*(\mathcal{O} \backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\mathcal{O} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ la representación de $\mathcal{O}$ como unión de intervalos abiertos tales que $I_n \cap I_m = \emptyset \quad \forall \quad n \neq m$. Si E tiene medida finita, el abierto $\mathcal{O}$ se puede escoger con $m^*\mathcal{O} < \infty$. Además por la σ-aditividad,

$$\infty > m^*\mathcal{O} = m^* \cup_{n \geq 1} I_n = \sum_{n \geq 1} m^* I_n,$$

es decir, la serie es convergente. Entonces existe un número natural $n_0(\epsilon)$ tal que $\sum_{n \geq n_0} m^* I_n < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{n_0(\epsilon)} I_n$.

Tenemos que

$$E \bigtriangleup \mathcal{U} = (E \backslash \mathcal{U}) \cup (\mathcal{U} \backslash E).$$

Pero

$$\begin{aligned} E \backslash \mathcal{U} &= E \cap \mathcal{U}^c \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{U}^c = (\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \cap \mathcal{U}^c \\ &= \left(\cup_{n=1}^{n_0(\epsilon)} I_n \cup \cup_{n=n_0+1}^{\infty} I_n \right) \cap \mathcal{U}^c = \emptyset \cup \mathcal{U}^c \\ &= \cup_{n=n_0+1}^{\infty} I_n, \end{aligned}$$

entonces

$$m^*(E \backslash \mathcal{U}) = m^* \left(\cup_{n=n_0+1}^{\infty} I_n \right) = \sum_{n \geq n_0} m^* I_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte $\mathcal{U} \backslash E \subset \mathcal{O} \backslash E$, entonces $m^*(\mathcal{U} \backslash E) \leq m^*(\mathcal{O} \backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$.

Consecuentemente

$$m^*(E \bigtriangleup \mathcal{U}) = m^*(E\backslash\mathcal{U}) + m^*(\mathcal{U}\backslash E) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

y por lo tanto

$$m^*(E \bigtriangleup \mathcal{U}) < \epsilon.$$

Esto demuestra que **(vi)** se cumple.

Reciprocamente, si $m^*E < \infty$ y **(vi)** se cumple, para cada $\epsilon > 0$ sea $\mathcal{U} = \cup_{k=1}^{n} I_k$ una unión finita de intervalos abiertos con $m^*(E \bigtriangleup \mathcal{U}) < \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos que $m^*(E\backslash\mathcal{U}) \leq m^*(E \bigtriangleup \mathcal{U}) < \frac{\epsilon}{2}$ entonces existe una cubierta $\{\mathcal{J}_m\}_{m\geq 1}$ de $E\backslash\mathcal{U}$ por intervalos abiertos, tales que

$$\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m \supset E\backslash\mathcal{U} \quad \text{y} \quad m^*\left(\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m\right) \leq \sum_{m\geq 1} \ell(\mathcal{J}_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\mathcal{O} = \mathcal{U} \cup \left(\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m\right)$, $\quad \mathcal{O}$ es abierto y

$$E = (E\backslash\mathcal{U}) \cup \mathcal{U} \subset \left(\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m\right) \cup \mathcal{U} = \mathcal{O}.$$

Obsérvese que

$$\mathcal{O}\backslash E = \mathcal{U}\backslash E \cup \left(\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m\right)\backslash E = \mathcal{U}\backslash E \cup \left(\cup(\mathcal{J}_m\backslash E)\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} m^*(\mathcal{O}\backslash E) &\leq m^*(\mathcal{U}\backslash E) + m^*(\cup_{m\geq 1}(\mathcal{J}_m\backslash E)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + m^*(\cup_{m\geq 1}\mathcal{J}_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{m\geq 1} \ell(\mathcal{J}_m) < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que **(ii)** se cumple. □

2.4. Subconjuntos no medibles

En esta sección demostraremos que la medida exterior de Lebesgue no es σ-aditiva. Para esto construiremos una sucesión $\{Vn\}_{n\geq 1}$ de subconjuntos ajenos de $[0,1]$ tal que $\bigcup_{n\geq 1} Vn = [0,1]$ pero

$$1 = m^*\left(\cup_{n\geq 1}Vn\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m^*Vn.$$

Entonces estos Vn's son no medibles y esto demuestra que $\mathcal{M} \subsetneqq 2^{\mathbb{R}}$.

Construcción de los Vn's. Para cada $\alpha \in [0,1]$ sea $E_\alpha = \{x \in [0,1] : x - \alpha \in \mathbb{Q}\}$. Por ejemplo, $E_0 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $E_{\frac{1}{2}} = E_0$. De hecho,

$$E_0 = E_m \quad \text{para todo} \quad m = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0.$$

Pero $E_{\frac{\pi}{4}} \neq E_0$ pues $\frac{1}{2} \notin E_{\frac{\pi}{4}}$. De hecho

$$E_{\frac{\pi}{4}} \cap E_0 = \emptyset,$$

pues si $x \in E_{\frac{\pi}{4}} \cap E_0$, entonces $x - \frac{\pi}{4} = \frac{p}{q}$ y $x = \frac{r}{s}$
$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción.

De hecho tenemos lo siguiente:

(i) Cada E_α es numerable pues la función $x \to x - \alpha$ es una biyección de E_α sobre $\mathbb{Q}$.

(ii) Si $E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset$ entonces $E_\alpha = E_\beta$

Pues si $x \in E_\alpha \cap E_\beta$ entonces $x-\alpha$ y $x-\beta$ son racionales. Si $y \in E_\alpha$, es decir, $y-\alpha \in \mathbb{Q}$, tenemos que $y-\beta = (y-\alpha)+(\alpha-\beta)$, y $(x-\beta)-(x-\alpha) = \alpha-\beta \in \mathbb{Q}$. Entonces $y-\beta \in \mathbb{Q}$, es decir $y \in E_\beta$. De manera análoga $E_\beta \subset E_\alpha$.

Dada la colección $\{E_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$, por el **Axioma de Elección** podemos elegir exactamente un representante x_α de cada E_α. Sea V el subconjunto formado con estos representantes x_α's. Nótese que en V sólo hay un racional y ningún par de elementos de este subconjunto difieren en un racional.

Ahora considérese una lista de los racionales en $[0,1]$, $q_1, q_2, \ldots$ y para cada $n \geq 1$ sea $\mathrm{V}_n = q_n \dot{+} \mathrm{V}$ donde $\dot{+}$ denota suma módulo 1; es decir

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x+y<1 \\ x+y-1 & \text{si} \quad x+y \geq 1. \end{cases}$$

Necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 2.4.1. *Si* $A \subset [0,1]$, *entonces* $m^*(x\dot{+}A) = m^*A \quad \forall x \in [0,1]$

Demostración. Si A es un intervalo $x\dot{+}A = (a+x] \cup [0, b+x-1]$ y $m^*(x\dot{+}A) = 1-a-x+b+x-1 = b-a$. De manera análoga se demuestra el caso cuando $A = \mathcal{O} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

Para $A \subset [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} m^*(x\dot{+}A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \cup_n I_n \supset x\dot{+}A, \quad I_n \quad \text{abierto}\right\} \\ &= \inf\left\{m^*(x\dot{+}\mathcal{O}) : A \subset -x\dot{+}\mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \quad \text{abierto}\right\} \\ &= m^*A. \end{aligned}$$

□

Tenemos que

(i) $\mathrm{V}_n \cap \mathrm{V}_m = \emptyset$ si $n \leq m$.

Pues si $x \in \mathrm{V}_n \cap \mathrm{V}_m$, entonces existen $x_\alpha, x_\beta \in \mathrm{V}$ tales que $x = x_\alpha + q_n$ y $x = x_\beta + q_m$ de aquí se ve que $x_\alpha - x_\beta = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$ lo cual es una contradicción.

(ii) $\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n = [0,1]$. Pues obviamente $\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n \subset [0,1]$, y si $x \in [0,1]$, existe E_α tal que $x \in E_\alpha$. De manera que

$$x = x_\alpha + q_n \in \mathrm{V}_n \quad \text{entonces} \quad x \in \cup_{n \geq 1} \mathrm{V}_n.$$

(iii) m^* no es σ-aditiva. Pues si suponemos que m^* es σ-aditiva, entonces por el Lema anterior,

$$\begin{aligned} 1 = m^*[0,1] &= m^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* \mathrm{V}_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(q_n \dot{+} \mathrm{V}) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* \mathrm{V}. \end{aligned}$$

Lo cual es imposible.

2.5. Espacios de medida

Llamemos espacio medible a un par (X, Σ) donde X es un conjunto y Σ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X. Un espacio de medida es una terna (X, Σ, μ) donde X, Σ son como antes y $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ es una medida. Es decir:

$$\begin{array}{ll} (i) & \mu\emptyset = 0, \\ (ii) & \mu\left(\cup_n E_n\right) = \sum \mu E_n, \end{array}$$

para toda sucesión $(E_n)_{n \geq 1}$ de subconjuntos disjuntos de Σ.

Ejemplo 2.5.1. ***(El espacio de medida de Lebesgue)***. *En secciones anteriores construimos el espacio de medida de Lebesgue* $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. *Tenemos que*

(i) $m^*\phi = 0$ *y* $\phi \in \mathcal{M}$ *entonces* $m\phi = 0$,

(ii) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de medibles disjuntos entonces*

$$m\left(\cup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n \geq 1} m E_n.$$

Ejemplo 2.5.2. *Sea* X *cualquier conjunto y* $\Sigma = 2^X$ *la colección de todos los subconjuntos de* X. *Para* $E \in 2^X$, *defínase*

$$\mu E = \begin{cases} \infty & si \quad E \quad es\ infinito \\ \sharp E & si \quad E \quad es\ finito. \end{cases}$$

La terna $(X, 2^X, \mu)$ *es un espacio de medida.*

Demostración. Tenemos que

(i) $m^*\phi = \sharp\phi = 0$,

(ii) Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos disjuntos de Σ,

Para demostrar la $\sigma-$aditividad consideraremos dos casos:

(a) $\cup_{n\geq 1}E_n$es finito,

(b) $\cup_{n\geq 1}E_n$es infinito.

En el primer caso sólo un número finito de sumandos son no vacíos, digamos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y como son ajenos

$$\mu\left(\cup_{n\geq 1}E_n\right) = \sharp\left(\cup_{k=1}^{n}E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sharp E_k = \sum_{k=1}^{\infty}\mu E_k \quad \text{porque } \forall k > n \quad \sharp E_k = 0.$$

Si $(\cup_{n\geq 1}E_n)$ es infinito, puede ocurrir que exista E_n infinito. En este caso $\mu E_n = \infty \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n = \infty = \mu(\cup_{n\geq 1}E_n)$. Si todos los E_n's son finitos, entonces existe una subsucesión $(E_{n_k})_{k\geq 1}$ con $E_{n_k} \neq \emptyset \quad \forall k \geq 1$, por lo tanto, $\infty = \sum_{k\geq 1}\mu E_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n$. Es decir $\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n = \infty = \mu\left(\cup_{n\geq 1}E_n\right)$. Esto demuestra la σ-aditividad. $\square$

Ejercicio. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\lambda : X \to (0,1)$ una función tal que $\sum_{j=1}^{n}\lambda(x_j) = 1$. La terna $(X, 2^X, \mathcal{P})$ es un espacio de medida, donde $\mathcal{P} : 2^X \to [0,1]$ está definida para $E \subset X$ mediante la relación

$$\mathcal{P}(E) = \sum_{x_j \in E}\lambda(x_j).$$

Definición 2.5.3. *Un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ es un **Espacio de probabilidad** si la medida $\mathcal{P}$ toma valores en el intervalo $[0,1]$, es decir $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$.*

Ejercicio. (Delta de Dirac) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\Sigma = 2^X$. Para $x_0 \in X$ y $E \in \Sigma$ defínase

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_0 \notin E \\ 1 & \text{si} \quad x_0 \in E \end{cases}$$

$(X, 2^X, \delta_{x_0})$ es un espacio de probabilidad.

Ejercicio En el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ considérese la sucesión $(E_n = [n, \infty))_{n\geq 1}$. Tenemos que $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ y $\cap_{n\geq 1}E_n = \emptyset$, entonces $\mu\left(\cap_{n\geq 1}E_n\right) = 0$. Pero $\mu E_n = \infty$ para todo $n \geq 1$, entonces $m(\cap_n E_n) \neq \lim_n mE_n$. ¿ Porqué esto no contradice el resultado de la parte (i) de la Proposición 2.3.16?

Ejercicio. Sea X un conjunto no numerable. Sea $\mathcal{F}$ la colección de los subconjuntos de X que son contables (finitos o numerables) o que tienen complemento contable. Demuestre que

(a) $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra.

Para $E \in \mathcal{F}$ defínase

$$\mu E = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E \quad \text{es contable} \\ 1 & \text{si} \quad E^c \quad \text{es contable} \end{cases}$$

(b) Demuestre que $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es medida de probabilidad.

Capítulo 3

Funciones medibles

En este capítulo y el siguiente consideraremos funciones que pueden tomar los valores $\pm\infty$. Es decir consideraremos funciones con valores en el conjunto $\mathbb{R}^\sharp = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, al que llamaremos conjunto de los números reales extendidos. La relación de orden y las operaciones aritméticas se pueden extender a $\mathbb{R}^\sharp$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{Orden :} & \text{dados} \quad a, b \in \mathbb{R}^\sharp \quad a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ & -\infty < a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad b < \infty \quad \forall b \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Operaciones aritméticas: para $x \in \mathbb{R}$,

(i) $x + \infty = \infty, \quad x - \infty = -\infty$

(ii) $x \cdot \infty = \infty \quad$ si $x > 0$

(iii) $x \cdot (-\infty) = -\infty \quad$ si $x > 0$

(iv) $0 \cdot \infty = 0$

(v) $\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$

(vi) $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad -\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

(vii) $\infty - \infty \quad$ permanece indefinida.

Para $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ podemos definir los siguientes intervalos: $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$, $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$, por ejemplo $\mathbb{R}^\sharp = [-\infty, \infty]$.

Si llamamos abierto a todo subconjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^\sharp$ tal que $\mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ es abierto y

- si $+\infty \in \mathcal{O}$, existe una vecindad $\{x : a < x \leq +\infty\} \subset \mathcal{O}$;
- si $-\infty \in \mathcal{O}$, existe una vecindad $\{x : -\infty \leq x <\} \subset \mathcal{O}$,

con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces con esta topología $\mathbb{R}^\sharp$ es un espacio topológico compacto, es decir, $\mathbb{R}^\sharp$ es una compactificación de $\mathbb{R}$. Pero ésta no es la única manera de compactificar la recta real.

Si $A \subset \mathbb{R}^\sharp$ es no vacío, entonces existen el supremo y el ínfimo de A a los que denotaremos por $\sup A$ e $\inf A$, respectivamente.

Proposición 3.0.4. *Sea $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$, donde E es un subconjunto medible. Entonces la siguientes proposiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{lll} (i) & \forall \alpha \in \mathbb{R} & f^{-1}(\alpha, \infty] = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \quad \textit{es medible} \\ (ii) & \forall \alpha \in \mathbb{R} & f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \quad \textit{es medible} \\ (iii) & \forall \alpha \in \mathbb{R} & f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in E : f(x) < \alpha\} \quad \textit{es medible} \\ (iv) & \forall \alpha \in \mathbb{R} & f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \quad \textit{es medible.} \end{array}$$

Y cada una de éstas implica que

$$(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^\sharp \quad \textit{el conjunto} \quad f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in E : \quad f(x) = \alpha\} \quad \textit{es medible.}$$

Demostración. $(i) \Rightarrow (iv)$; pues $\{x \in E : \quad f(x) \leq \alpha\} = E \backslash \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ y como $f^{-1}((\alpha, \infty))$ es medible, $f^{-1}((-\infty, \alpha])$ también es medible.

De manera análoga se demuestra que $(iv) \Rightarrow (i)$ y $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Demostremos ahora que $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $\alpha_n \to \alpha$ con $\alpha_n > \alpha$. Entonces $[\alpha, \infty] = \cup_{n \geq 1}(\alpha_n, \infty]$, consecuentemente $f^{-1}([\alpha, \infty]) = f^{-1}\left(\cup_{n \geq 1}(\alpha_n, \infty]\right) = \cup_{n \geq 1} f^{-1}(\alpha_n, \infty]$ es medible.

Para demostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$, sea $\alpha_n \to \alpha$ con $\alpha_n < \alpha$. Entonces $(\alpha, \infty] = \cap_{n \geq 1}[\alpha_n, \infty]$, por lo tanto $f^{-1}(\alpha, \infty] = f^{-1}\left(\cap_{n \geq 1}[\alpha_n, \infty]\right) = \cap_{n \geq 1} f^{-1}[\alpha_n, \infty]$, que es medible.

Finalmente, tenemos que $\{\alpha\} = [\alpha, \infty) \cap (-\infty, \alpha]$, entonces $f^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}([\alpha, \infty]) \cap f^{-1}((-\infty, \alpha])$, que es medible para $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, si $\alpha_n \to -\infty$ entonces $\{x \in E : f(x) = -\infty\} = \cap_{n \geq 1}\{x \in E : f(x) \leq \alpha_n\}$. Y de manera análoga, si $\beta_n \to \infty$ entonces $\{x \in E : f(x) = \infty\} = \cap_{n \geq 1}\{x \in E : f(x) \geq \beta_n\}$. $\square$

Definición 3.0.5. *Una función $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ es medible (o más propiamente, Lebesgue-medible) si E es medible y se cumple cualquiera de las afirmaciones $(i) - (iv)$ en la proposición anterior.*

Una función $s : E \to \mathbb{R}^\sharp$ es simple si existen subconjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ medibles tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ y

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x),$$

con $c_j, 1 \leq j \leq n$ números reales.

Corolario 3.0.6. *Sea E medible*

(a) *Si* $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ *es continua, entonces* f *es medible.*

(b) *Si* $s : E \to \mathbb{R}^\sharp$ *es simple, entonces es medible.*

(c) *Si* $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ *es medible y* $F \subset E$, F *medible, entonces* $f|_F : F \to \mathbb{R}^\sharp$ *es medible.*

(d) *Si* $g : \mathbb{R}^\sharp \to \mathbb{R}^\sharp$ *es continua y* $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ *es medible, entonces* $h = g \circ f$ *es medible.*

Demostración.

(a) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \infty]$ es abierto en $\mathbb{R}^\sharp$ y por la continuidad de f, $f^{-1}(\alpha, \infty]$ es abierto, por lo tanto es medible y $\{x \in E : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, \infty] \cap E$ es medible.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $s^{-1}(\alpha, \infty) = \{x \in E : s(x) > \alpha\} = E \cap \cup_{c_k > \alpha} E_k$, que es medible.

(c) Tenemos que $\{x \in F : f(x) > \alpha\} = F \cap \{x \in E : f(x) > \alpha\}$, entonces como F es medible y $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible obtenemos que $\{x \in F : f|_F(x) > \alpha\}$ también es medible.

(d) Se tiene que $h^{-1}(\alpha, \infty) = f^{-1}(g^{-1}(\alpha, \infty))$. Como $g^{-1}(\alpha, \infty)$ es abierto podemos escribir $g^{-1}(\alpha, \infty) = \cup_{n \geq 1} I_n$, donde I_n es un intervalo abierto para cada $n \geq 1$. Ahora, $h^{-1}(\alpha, \infty) = f^{-1}(\cup_{n \geq 1} I_n) = \cup_{n \geq 1} f^{-1}(I_n)$ y cada $f^{-1}(I_n)$ es medible para cada $n \geq 1$.

$\square$

Proposición 3.0.7. *Sean* c *una constante real y* f, g *dos funciones medibles con valores reales y con el mismo dominio medible. Entonces las funciones* $f + c$, cf, $f + g$, $g - f$, $f \cdot g$ *son medibles.*

Demostración.

(i) Si $f, g : E \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces $(f + g)^{-1}[-\infty, \alpha) = \{x \in E : f(x) + g(x) < \alpha\}$. Si $f(x) + g(x) < \alpha$ entonces $f(x) < \alpha - g(x)$ y por lo tanto existe $r_x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r_x < \alpha - g(x)$. Entonces

$$\{x \in E : f(x)+g(x) < \alpha\} = \cup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) < r\} \cap \{x \in E : g(x) < \alpha - r\},$$

que es medible pues es una unión numerable de medibles.

(ii)

$$(f + c)^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in E : f(x) + c < \infty\} = \{x \in E : f(x) < \alpha + c\},$$

es medible.

(iii) Si $c \neq 0$, tenemos que

$$\{x \in E : c \cdot f(x) < \alpha\} = \{x \in E : f(x) < \frac{\alpha}{c}\},$$

es medible.

Si $c = 0$,

$$\{x \in E : c \cdot f(x) < \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad \alpha \leq 0 \\ E & \text{si} \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

que es medible.

(iv) Por (iii), con $c = -1$ se tiene que $-f$ es medible y aplicando (i) se obtiene que $g - f$ es medible.

(v) Para mostrar que $f \cdot g$ es medible, primero veamos que f^2 es medible. Para $\alpha \geq 0$;

$$\begin{aligned} \{x \in E : f^2(x) < \alpha\} &= \{x \in E : |f(x)| < \sqrt{\alpha}\} \\ &= \{x \in E : f(x) < \sqrt{\alpha}\} \cap \{x \in E : f(x) > -\sqrt{\alpha}\}, \end{aligned}$$

que es medible. Y si $\alpha < 0$,

$$\{x \in E : f^2(x) < \alpha\} = \emptyset,$$

que es medible.

Ahora, aplicando los incisos anteriores se ve que $f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$ es medible.

□

La hipótesis que f y g tomen valores reales es necesaria porque en otro caso $f + g$ no estaría bien definida en los puntos donde $f(x) = \infty$ y $g(x) = -\infty$

Teorema 3.0.8. *Sea* $(f_n)_{n \geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles con el mismo dominio medible* E *entonces las funciones* $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ *y* $\underline{\lim}_n f_n$ *son medibles; donde*

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\}(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\},$$

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n f_n(x) = \sup_n\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$$

y $\left(\overline{\lim}_n f_n\right)(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)$.

Demostración. Por ejemplo si $h(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}, \quad x \in E$, entonces

$$\{x \in E : h(x) > \alpha\} = \cup_{j=1}^n \{x \in E : f_j(x) > \alpha\},$$

resulta medible pues cada $\{x \in E : f_j(x) > \alpha\}$ es medible.

Así mismo, si $h(x) = \sup_n\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$, $\quad x \in E$, tenemos que

$$\{x \in E : h(x) > \alpha\} = \cup_{j=1}^{\infty}\{x \in E : f_j(x) > \alpha\},$$

que es medible.

Ahora sea $L(x) = \overline{\text{lím}_n} f_n(x)$, $\quad x \in E$, $\quad$ es decir, $L(x) = \text{ínf}_n \sup_{k\geq n} f_n(x)$. Demostremos que $\text{ínf}_n\{f_1(x), \dots\}$ es medible. Si $k(x) = \text{ínf}_n\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$, $\quad x \in E$, entonces $\{x \in E : k(x) > \alpha\} = \cap_{j=1}^{\infty}\{x \in E : f_j(x) > \alpha\}$. Por lo tanto $k(x)$ es medible. Ahora si $\overline{f_k}(x) = \sup_{j\geq k} f_j(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\{x \in E : L(x) > \alpha\} &= \cap_{j=1}^{\infty}\{x \in E : \overline{f_j(x)} > \alpha\} \\ &= \cap_{j=1}^{\infty}\left(\cup_{k\geq j}\{x \in E : f_j(x) > \alpha\}\right),\end{aligned}$$

entonces $\overline{\text{lím}_n} f_n$ es medible.

De manera análoga se demuestra que $\underline{\text{lím}}_n f_n$ es medible. □

Corolario 3.0.9. *El límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible.*

Demostración. Una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones definidas de subconjuntos E de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^\sharp$ converge puntualmente si y sólo si

$$\overline{\text{lím}}_n f_n(x) = \underline{\text{lím}}_n f_n(x) \quad \forall x \in E.$$

El resultado se sigue pues $\overline{\text{lím}_n} f_n$ y $\underline{\text{lím}}_n f_n$ son medibles.

Teorema 3.0.10. *Sea f una función medible definida en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y tal que $m\{x \in [a,b] : f(x) = \pm\infty\} = 0$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existen una función escalonada g_ϵ y una función continua h_ϵ tales que*

$$|f - h_\epsilon| < \epsilon \quad y \quad |f - g_\epsilon| < \epsilon \quad \textit{excepto en un subconjunto de medida menor que} \quad \epsilon.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}m\{x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon \\ m\{x \in [a,b] : |f(x) - h(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon.\end{aligned}$$

Además si $m \leq f \leq M$, entonces g y h se pueden elegir acotadas con las mismas cotas.

Demostración. Separaremos la demostración en varias partes.

(a) Dado $\epsilon > 0$ $\;\exists\;$ $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ excepto en un subconjunto de medida menor que $\dfrac{\epsilon}{3}$. Es decir

$$m\{x \in [a,b] : |f(x)| > M\} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Esto se demuestra de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad E_n &= \{x \in [a,b] : |f(x)| \geq n\} \\ &= \{x \in [a,b] : |f(x)| > n\} \quad \cup \quad \{x \in [a,b] : |f(x)| = n\}. \end{aligned}$$

Cada E_n es medible y $E_n \supset E_{n+1}$, pues si $|f(x)| > n+1$, entonces $|f(x)| > n$. Además

$$mE_n \leq m[a,b] = b - a < \infty \quad \forall n.$$

Entonces por la parte (i) de la Proposición 2.3.16 $m\left(\cap_{n\geq 1} E_n\right) = \lim mE_n$ y $m\{x \in [a,b] : |f(x)| = \infty\} = m\left(\cap_{n\geq 1} E_n\right)$. Por lo tanto $\lim mE_n = 0$.

Para $\dfrac{\epsilon}{3} > 0$ existe $N_\epsilon \geq 1$ tal que $mE_n < \dfrac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq 1$. Tomése $M = N_\epsilon + 1$, entonces $m\{x \in [a,b] : |f(x)| > M\} < \frac{\epsilon}{3}$.

(b) Dados $\epsilon > 0$ y $M > 0$, existe una función simple tal que $|f - \varphi| < \epsilon$, excepto en aquellos puntos donde $|f(x)| > M$.

Para demostrar esto dividamos a $[-M, M]$ en n subintervalos iguales. Es decir sea $\epsilon > 0$, tómese n tal que $\dfrac{2M}{n} < \epsilon$ y consideremos la partición

$$\mathcal{P} = \{-M, -M + \frac{2M}{n}, \ldots, -M\}.$$

Sea

$$\begin{aligned} E_k &= f^{-1}\left(\left[-M + \frac{2(k-1)M}{n}, -M + \frac{2kM}{n}\right]\right) \\ &= \{x \in [a,b] : -M + \frac{2(k-1)M}{n} < f(x) < -M + \frac{2kM}{n}\}, \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n$. Cada E_k es medible y podemos definir una φ de la siguiente manera

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(-M + \frac{2kM}{n}\right) \chi_{E_k}.$$

Para $x \in E_k$ tenemos que $|f(x) - \varphi(x)| < \dfrac{2M}{n} < \epsilon$, pero $\cup_{k=1}^n E_k = [a,b] \backslash E$, donde $E = m\{x \in [a,b] : |f(x)| > M\}$; pues

$$\begin{aligned} [a,b] \backslash E &= f^{-1}([-M, M]) \\ &= f^{-1}\left(\cup_{k=1}^n \left[-M + \frac{2(k-1)M}{n}, -M + \frac{2kM}{n}\right]\right) \\ &= \cup_{k=1}^n f^{-1}\left(\left[-M + \frac{2(k-1)M}{n}, -M + \frac{2kM}{n}\right]\right) = \cup_{k=1}^n E_k. \end{aligned}$$

Además $E_k \cap E_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k'$.

(c) Existe una función escalonada g en $[a,b]$ tal que $g(x) = \varphi(x)$, excepto en un subconjunto de medida menor que $\frac{\epsilon}{3}$.

Para obtener esta función obsérvese que cada E_k del inciso anterior es medible y $E_k \subset [a,b]$, entonces $mE_k < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Para cada k, existe $\{I_\ell^k\}_{\ell=1}^{m_k}$ colección finita de intervalos tales que

$$m\left(E_k \bigtriangleup \cup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k\right) < \frac{\epsilon}{3n}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que estos subintervalos son disjuntos. Sea

$$g(x) = \left(-M + \frac{2kM}{n}\right)\chi_{\bigcup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k}(x) \quad \text{para} \quad x \in E_k \cap \cup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k.$$

Esta función es escalonada pues

$$\chi_{\cup_{j=1}^k I_j} = \chi_{I_1} + \chi_{I_2} + \cdots + \chi_{I_k}.$$

Además $g(x) = \varphi(x)$ excepto en $A = \cup_{k=1}^n \left(E_k \bigtriangleup \cup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k\right)$ y

$$mA \le \sum_{k=1}^n m\left(E_k \bigtriangleup \cup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k\right) \le \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{3n} = \frac{\epsilon}{3}.$$

(d) Notése que

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^n \left(-M + \frac{2kM}{n}\right)\chi_{\cup_{\ell=1}^{m_k} I_\ell^k}(x) \\ &= \sum_{j=1}^m c_j \chi_{I_j}(x) \end{aligned}$$

para algunos $c_j \in \mathbb{R}$. Podemos escribir $I_j = [a_{j-1}, a_j]$ para $1 \le j \le m$.

En el intervalo $\left(a_1 - \frac{\epsilon}{6m}, a_1 + \frac{\epsilon}{6m}\right)$ se define h como el segmento que une $\left(a_1 - \frac{\epsilon}{6m}, c_1\right)$ con $\left(a_1 + \frac{\epsilon}{6m}, c_2\right)$ y así para cada subintervalo de la partición. De esta manera conseguimos una función continua $h(x)$ tal que $h(x) = g(x)$ excepto en

$$\cup_{j=1}^m \left(a_j - \frac{\epsilon}{6m}, a_j + \frac{\epsilon}{6m}\right).$$

Pero

$$m\left(\cup_{j=1}^m \left(a_j - \frac{\epsilon}{6m}, a_j + \frac{\epsilon}{6m}\right)\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\epsilon}{3m} = \frac{\epsilon}{3}.$$

En resumen tenemos que:

$|f - \varphi| < \epsilon$, excepto en $E_1 \subset [a,b]$ con $mE_1 < \frac{\epsilon}{3}$,

$\varphi = g$ excepto en $E_2 \subset [a,b]$ con $mE_2 < \frac{\epsilon}{3}$,

$h = g$ excepto en $E_3 \subset [a,b]$ con $mE_3 < \frac{\epsilon}{3}$.

Entonces $|f-g| < \epsilon$ excepto en $E_2 \cup E_1$ y $m(E_1 \cup E_2) < \epsilon$. Y $|f-h| < \epsilon$ excepto en $E_3 \cup E_2 \cup E_1$. Pero $m(E_1 \cup E_2 \cup E_3) < \epsilon$. $\square$

3.1. Casi dondequiera

Si una condición, por ejemplo $f(x) = g(x)$, se cumple excepto en un conjunto de medida cero, diremos que esta condición se cumple **casi dondequiera** de manera breve escribiremos c.d. De manera más general, si E es un subconjunto medible y P es una propiedad, la frase "*P se cumple casi dondequiera en E*" significa que existe un subconjunto N de medida nula tal que la propiedad se cumple en cada punto de $E \backslash N$.

Proposición 3.1.1. *Si $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ es medible y $f = g$ c.d. en E, entonces g es medible.*

Demostración. Los subconjunto $E_1 = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ y $E_2 = \{x \in E : g(x) > \alpha\}$ difieren a lo más por un conjunto de medida cero. Es decir, $E_1 \backslash E_2$ y $E_2 \backslash E_1$ son medibles y $m(E_1 \Delta E_2) = 0$. Podemos escribir

$$E_2 = (E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)) \backslash (E_1 \backslash E_2).$$

Entonces E_2 es medible si E_1 lo es.

Ejercicios

1.- Demuestre que si una sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ de funciones medibles converge casi dondequiera a una función f, entonces f es medible.

2.- Dada una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, de ejemplos que demuestren que la condición "*f es continua c.d. en Ω*" no implica ni es implicada por la condición "*existe una función continua $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ c.d.*".

3.2. Los teoremas de Egoroff y Lusin

Aparentemente existe una gran diferencia entre los conjuntos medibles y los conjuntos abiertos o los intervalos y entre las funciones medibles y las continuas, de manera que la intuición se pierde al trabajar con subconjuntos y funciones medibles. En realidad la diferencia no es tanta, de acuerdo con el Teorema 2.3.17 un subconjunto medible es casi un abierto, un cerrado o una unión de intervalos si tiene medida finita; así mismo, de acuerdo con el Teorema 3.0.10 una función medible es casi una función continua. Algo similar ocurre entre las sucesiones que convergen casi dondequiera y las que convergen uniformemente, tal como demostraremos en esta sección, de manera que también podemos decir que una sucesión que converge c.d. casi converge uniformemente. Una forma rigurosa de esto está contenida en el Teorema de Egorov que demostraremos enseguida.

Teorema 3.2.1. ***(Egoroff)*** *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles que converge c.d. a una función con valores reales medible f sobre un subconjunto medible E de medida finita, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto medible $F \subset E$, con $mF < \epsilon$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f uniformemente en $E\backslash F$.*

Demostración. Para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \geq 1$, sean $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente con $\lim_n \epsilon_n = 0$ y $\delta_n = \frac{\epsilon}{2^n}$. Sea $\mathcal{E}$ el subconjunto de E donde $(f_n)_{n\geq 1}$ no converge.

Sea
$$G_{n,k} = \{x \in E\backslash\mathcal{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon_n\},$$
y
$$E_{n,K} = \cup_{k\geq K} G_{n,k} = \{x \in E\backslash\mathcal{E} : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon_n, \text{ para alguna } k \geq K\}.$$

La sucesión $(E_{n,K})_{K\geq 1}$ es decreciente y como para cada $x \in E\backslash\mathcal{E}$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$, entonces debe existir algún $K \geq 1$ tal que $x \notin E_{n,K}$, es decir, $\cap_{K\geq 1} E_{n,K} = \emptyset$. Por la parte (i) de 2.3.16, se tiene que $\lim_K E_{n,K} = 0$. Entonces existe K_n tal que $mE_{n,K_n} < \delta_n$, es decir,
$$m\{x \in E\backslash\mathcal{E} : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon_n, \text{ para algún } k \geq K_n\} < \delta_n.$$

Sea $E_n = E_{n,K_n}$, tenemos que $mE_n < \delta_n$ y
$$(E\backslash\mathcal{E})\backslash E_n = \{x \in E\backslash\mathcal{E} : |f_k(x) - f(x)| < \epsilon_n, \text{ para todo } k \geq K_n\}.$$

Tómese $F = \mathcal{E} \cup \{\cup_{n\geq 1} E_n\}$, tenemos que $mF \leq \sum_{n\geq 1} mE_n = \epsilon$, y $E\backslash F = \cap_{n\geq 1}(E\backslash\mathcal{E})\backslash E_n$. Para cada $\eta > 0$, existe $n \geq 1$ tal que $\epsilon_n < \eta$, por lo tanto, $|f_k(x) - f(x)| < \eta$ si $k \geq K_n$ para todo $x \in E\backslash F$. Es decir la sucesión converge uniformemente en $E\backslash F$. $\square$

Ejercicio. Demuestre lo siguiente (**Teorema de Lusin**): Sea f una función con valores reales y medible en un intervalo cerrado $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe una función continua g en $[a, b]$ tal que $m\{x : f(x) \neq g(x)\} < \epsilon$.

Sugerencia: Aplique el Teorema de Egoroff y las Proposiciones 2.3.17, 3.0.10.

Capítulo 4

La integral de Lebesgue

La integral de Riemann es la primera generalización del concepto de integral definido rigurosamente por Cauchy para funciones continuas, a una clase más grande de funciones. Sin embargo la integral de Riemann no resultó suficiente para tratar algunos problemas de la teoría de series de Fourier, ni tampoco es apropiada para aplicaciones en otras áreas de las Matemáticas, por ejemplo en Probabilidad. La integral de Lebesgue cumple estos requisitos y por esta razón es una herramienta indispensable en Matemáticas.

Además, los teoremas de intercambio de límites con integrales son mucho más poderosos cuando se formulan en términos de la integral de Lebesgue en lugar de la integral de Riemann.

En este capítulo definiremos la integral de Lebesgue siguiendo un esquema similar al aplicado en el Capítulo 1 a la integral de Riemann. En lugar de las funciones escalonadas que usamos para construir la integral de Riemann, aquí usaremos una clase más amplia de funciones, las funciones simples.

Una función simple es una combinación lineal de la forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

donde los $E_j's$ son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ y $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Igual que en el caso de las funciones escalonadas esta representación no es única.

Obsérvese que una función S es simple si y sólo si es medible y toma sólo un número finito de valores. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ son los valores de una función simple s, entonces

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x),$$

con $A_j = s^{-1}(\{a_j\}) = \{x \in \mathbb{R} : s(x) = a_j\}, j = 1, 2, \ldots, n$. Esta última es la representación canónica de s, tiene la propiedad de que los $A_j's$ son disjuntos y los $a_j's$ son distintos y no nulos.

De manera similar que en el caso de funciones escalonadas, si s es una función simple que se anula fuera de un subconjunto de medida finita, definimos su integral de Lebesgue mediante

$$\int sdm = \sum_{j=1}^{n} a_j mA_j,$$

cuando $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$, es la representación canónica de s.

También como en el caso de las funciones escalonadas, la integral de Lebesgue de una función escalonada no depende de la representación elegida.

Proposición 4.0.2. *Sea* $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, *con* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$. *Supóngase además que cada subconjunto* E_j *es medible con medida finita,entonces*

$$\int sdm = \sum_{j=1}^{n} a_j mE_j.$$

Demostración. Sea $A_j = \{x \in \mathbb{R} : s(x) = a_j\} = \cup_{a_i = a_j} E_i$.
Entonces

$$a_j mA_j = \sum_{a_i = a_j} a_i mE_i \quad \text{por la aditividad de } m$$

por lo tanto

$$\int sdm = \sum_{j=1} a_j mA_j = \sum_{i} a_i mE_i.$$

□

Proposición 4.0.3. *Si* s *y* t *son funciones simples que se anulan fuera de un subconjunto de medida finita, entonces*

(*i*) $\int (as + bt)dm = a \int sdm + b \int tdm$, *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$

(*ii*) $\int sdm \leq \int tdm$, *si* $s \leq t$ *c.d.*

Demostración. Si $(A_j)_{j=1}^{n}$ y $(B_j)_{j=1}^{m}$ son los subconjuntos que aparecen en la representación canónica de s y t, respectivamente, y A_0 y B_0 los subconjuntos donde s y t se anulan; entonces $(A_i \cap B_j)_{0 \leq i = n, 0 \leq j \leq m}$ es una colección finita de subconjuntos medibles y disjuntos que podemos reenumerar y denotar por $(E_k)_{k=1}^{N}$. Podemos escribir

$$s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k} \quad \text{y} \quad t = \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{E_k},$$

consecuentemente

$$as + bt = \sum_{k=1}^{N} (aa_k + bb_k) \chi_{E_k}$$

por la proposición anterior obtenemos que

$$\int (as+bt)dm = a\int sdm + b\int tdm.$$

Ahora, como $t-s\geq 0$, entonces

$$\int tdm - \int sdm = \int (t-s)dm \geq 0.$$

Esto demuestra (ii).

□

Como consecuencia de esta última proposición y el principio de inducción matemática, se obtiene que para cada función simple $s=\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}$ se tiene que $\int sdm = \sum_{j=1}^{n} a_j mE_j$.
De manera que la hipótesis $E_i\cap E_j=\emptyset$ si $i\neq j$ en la primera proposición no es esencial.

Si s es una función simple y E un subconjunto medible, definimos

$$\int_E sdm := \int s\chi_E dm$$

Nótese que $s\chi_E$ también es una función simple, por lo tanto el lado derecho de la igualdad anterior tiene sentido.

Proposición 4.0.4. *Si s es una función simple que se anula fuera de un conjunto de medida finita E y $E=E_1\cup E_2$ con E_1, E_2 medibles y disjuntos, entonces*

$$\int_E sdm = \int_{E_1} sdm + \int_{E_2} sdm$$

Demostración. Supóngase que $s=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{F_j}$, $c_j\in\mathbb{R}$ y F_j medible para $1\leq j\leq n$ y $E=\cup_{j=1}^{n}F_j$.
Tomemos las restricciones $s|_{E_1}=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{E_1\cap F_j}$ y $s|_{E_2}=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{E_2\cap F_j}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int sdm &= \sum_{j=1}^{n} c_j mF_j = \sum_{j=1}^{n} c_j (mE_1 \cap F_j + mE_2 \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j m(E_1 \cap F_j) + \sum_{j=1}^{n} c_j m(E_2 \cap F_j) \\
&= \int \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_1 \cap F_j} dm + \int \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_2 \cap F_j} dm \\
&= \int \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_1} \chi_{F_j} dm + \int \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_2} \chi_{F_j} dm \\
&= \int s \cdot \chi_{E_1} dm + \int s \cdot \chi_{E_2} dm \\
&= \int_{E_1} sdm + \int_{E_2} sdm
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

$\square$.

Teorema 4.0.5. *Sea f una función acotada definida en un subconjunto medible E con $mE < \infty$. Los siguientes enunciados son equivalentes :*

(i) *f es medible,*

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, existen dos funciones simples s y t tales que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$, para todo $x \in E$ y*

$$\int_E tdm - \int_E sdm < \epsilon.$$

Demostración. Sea M la cota de M y supóngase que f es medible. Los subconjuntos

$$E_k = \left\{ x \in E : \frac{kM}{n} \geq f(x) \geq \frac{(k-1)M}{n} \right\}, \quad -n \leq k \leq n,$$

son medibles, ajenos y $E = \cup_{k=-n}^{n} E_k$. Consecuentemente $mE = \sum_{k=-n}^{n} mE_k$. Las funciones simples definidas por

$$s_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x) \quad \text{y} \quad t_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x),$$

satisfacen las desigualdades $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$, para cada $x \in E$. Además

$$\begin{aligned}
\int_E t_n dm - \int_E s_n dm &= \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k - (k-1)) mE_k \\
&= \frac{M}{n} mE.
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande tenemos que

$$\int_E t_n dm - \int_E s_n dm < \epsilon.$$

Esto demuestra que (i) implica (ii).

Reciprocamente, supóngase que (ii) se cumple y para cada $n \geq 1$ sean s_n y t_n funciones simples tales que $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$, y

$$\int_E t_n dm - \int_E s_n dm < \frac{1}{n}.$$

Las funciones $s = \sup_n s_n$ y $t = \text{ínf}_n t_n$ son medibles por el Teorema **??** y además $s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$, para todo $x \in E$.
Sea $F = \{x \in X : s(x) < t(x)\}$ y para cada $k \geq 1$ sea

$$F_k = \left\{ x \in E : s(x) < t(x) - \frac{1}{k} \right\}.$$

Tenemos que

$$F = \cup_{k\geq 1} F_k \quad \text{y} \quad F_k \subset F_{k,n} = \left\{ x \in E : s(x) < t(x) - \frac{1}{k} \right\}$$

para todo $n \geq 1$; pues $s_n(x) \leq s(x) < t(x) - \dfrac{1}{k} \leq t_n(x) - \dfrac{1}{k}$ para todo $n \geq 1$.

Por lo tanto se tiene que

$$\frac{1}{k}\chi_{F_k}(x) < t_n(x) - s_n(x), \quad \text{para todo } x \in F_k \text{ y todo } n \geq 1$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} mF_k &< \int_{F_k} t_n dm - \int_{F_k} s_n dm \\ &\leq \int_E t_n dm - \int_E s_n dm \\ &< \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

Es decir, $mF_k < \dfrac{k}{n}$ para todo $n \geq 1$, lo cual demuestra que $mF_k = 0$.
Consecuentemente $mF = 0$ pues $F = \cup_{k\geq 1} F_k$. Esto implica que $s = f = t$ c.d. y por lo tanto f es medible.

□

Con las mismas notaciones de la demostración anterior tenemos que

$$\int_E s_n dm \leq \sup \left\{ \int_E s dm : s \text{ es simple y } s \leq f \right\}$$

y

$$\int_E t_n dm \geq \text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } t \geq f\right\}, \text{para cada } n \geq 1$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } t \geq f\right\} - \sup\left\{\int_E sdm : s \text{ es simple y } s \leq f\right\} \\ &\leq \int_E t_n dm - \int_E s_n dm = \frac{M}{n} mE, \quad \text{para cada } n \geq 1. \end{aligned}$$

Permitiendo que $n \to \infty$ obtenemos que, si alguna de las condiciones en el teorema anterior se cumple, entonces

$$\text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } f \leq t\right\} = \sup\left\{\int_E sdm : s \text{ es simple y } s \leq f\right\}.$$

Esto motiva la siguiente

Definición 4.0.6. *Si f es medible y acotada definida en un subconjunto medible E con $mE < \infty$, la integral de f sobre E se define como*

$$\begin{aligned} \int_E fdm &= \text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \textit{ es simple y } f \leq t\right\} \\ &= \sup\left\{\int_E sdm : s \textit{ es simple y } s \leq f\right\}. \end{aligned}$$

Si $E = [a, b]$, $\quad a < b$, entonces escribiremos $\int_a^b fdm$ en lugar de $\int_{[a,b]} fdm$. Si f es medible, acotada y nula fuera de un subconjunto de medida finita E, escribiremos simplemente $\int fdm$ en lugar de $\int_E fdm$. Con esta convección tenemos que $\int_E fdm = \int f \cdot \chi_E dm$.

La diferencia entre las integrales de Riemann y Lebesgue se aprecia muy bien en el caso de funciones escalonadas, que también son simples.
Por ejemplo, consideremos la función escalonada

$$e(x) = 0 \cdot \chi_{[0,1)} + 2 \cdot \chi_{[1,2)} + 3 \cdot \chi_{[2,3)} + 0 \cdot \chi_{[3,4)} + 2 \cdot \chi_{[4,5)},$$

cuya representación canónica como función simple es

$$e(x) = 0 \cdot \chi_{[0,1)\cup[3,4)} + 2 \cdot \chi_{[1,2)\cup[4,5)} + 3 \cdot \chi_{[2,3)}.$$

Tenemos que

$$R - \int_0^5 e(x)dx = 0 \cdot (1-0) + 2 \cdot (2-1) + 3 \cdot (3-2) + 0 \cdot (4-3) + 2 \cdot (5-4) = 7$$

y

$$\int_0^5 edm = 0 \cdot ((1-0) + (4-3)) + 2 \cdot ((2-1) + (5-4)) + 3 \cdot (3-2) = 7$$

En general tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.0.7. *Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Si f es Riemann integrable en $[a,b]$, entonces es medible y*

$$R-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b fdm.$$

Demostración. Por ser Riemann integrable es acotada y de acuerdo con el Teorema 1.0.6 para cada $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas f_1 y f_2 tales que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a,b]$ y

$$\left(R-\int_a^b f_2(x)dx\right) - \left(R-\int_a^b f_1(x)dx\right) < \epsilon.$$

Pero cada función escalonada es simple y además

$$R-\int_a^b f_j(x)dx = \int_a^b f_j dm, \quad j=1,2.$$

Entonces se cumple la condición (ii) en el Teorema 4.0.5 y por lo tanto f es medible.
Además

$$\begin{aligned}
\left(R-\int_a^b f(x)dx\right) &= \sup\left\{\int_a^b f_1(x)dx : f_1 \text{ es escalonada y } f_1(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b]\right\} \\
&\leq \sup\left\{\int_a^b sdm : s \text{ es simple y } s(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]\right\} \\
&\leq \text{ínf}\left\{\int_a^b tdm : t \text{ es simple y } t(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]\right\} \\
&\leq \text{ínf}\left\{\int_a^b f_2(x)dx : f_2 \text{ es escalonada y } f_2(x) \geq f(x), \quad \forall x \in [a,b]\right\} \\
&= \left(R-\int_a^b f(x)dx\right)
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $R-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b fdm$.

□

Proposición 4.0.8. *Si f y g son funciones acotadas y medibles definidas en un subconjunto de medida finita, entonces*

(i) $\int_E (af+bg)dm = a\int_E fdm + b\int_E gdm$.

(ii) Si $f = g$ c.d., entonces $\int_E fdm = \int_E gdm$.

(iii) Si $f \leq g$ c.d., entonces $\int_E fdm \leq \int_E gdm$. *Consecuentemente* $\left|\int_E fdm\right| \leq \int_E |f|dm$.

(iv) Si $a \leq f(x) \leq A$, *entonces* $amE \leq \int_E f dm \leq AmE$.

(v) Si E_1 *y* E_2 *son medibles y disjuntos de medida finita, entonces*

$$\int_{E_1 \cup E_2} f dm = \int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm.$$

Demostración. Nótese que si t es una función simple, entonces la función at también es simple y el recíproco vale si $a \neq 0$. Entonces para $a > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_E a f dm &= \text{ínf}\left\{\int_E atdm : t \text{ es simple y } t \geq f\right\} \\ &= a\,\text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } t \geq f\right\} = a\int_E f dm\end{aligned}$$

Si $a < 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_E a f dm &= \text{ínf}\left\{\int_E asdm : s \text{ es simple y } s \leq f\right\} \\ &= a \sup\left\{\int_E sdm : s \text{ es simple y } s \leq f\right\} = a\int_E f dm\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\int_E afdm = a\int_E fdm$, pues esta identidad también se cumple si $a = 0$.

Para demostrar (i) bastará demostrar que $\int_E (f+g)dm = \int_E fdm + \int_E gdm$. Si t_1 y t_2 son funciones simples que satisfacen $t_1 \geq f$ y $t_2 \geq g$, entonces $t_1 + t_2$ es una función simple que satisface la desigualdad $f + g \leq t_1 + t_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)dm &= \text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } f + g \leq t\right\} \\ &\leq \int_E (t_1 + t_2)dm = \int_E t_1 dm + \int_E t_2 dm.\end{aligned}$$

Como $\text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } f+g \leq t\right\} = \int_E fdm + \int_E gdm$, esto demuestra que

$$\int_E (f+g)dm \leq \int_E fdm + \int_E gdm.$$

Para demostrar la desigualdad opuesta, obsérvese que si s_1 y s_2 son funciones simples que satisfacen $s_1 \leq f$ y $s_2 \leq g$, entonces $s_1 + s_2$ es una función simple y satisface que $s_1 + s_2 \leq f + g$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)dm &= \sup\left\{\int_E sdm : s \text{ es simple y } s \leq f\right\} \\ &\geq \int_E (s_1 + s_2)dm \\ &= \int_E s_1 dm + \int_E s_2 dm,\end{aligned}$$

esto demuestra que

$$\int_E (f+g)dm \geq \int_E fdm + \int_E gdm;$$

de lo cual se sigue (i).

Como $f - g = 0$ c.d., si t es una función simple tal que $t \geq f - g$, entonces $t \geq 0$ c.d. Por lo tanto $\int_E tdm \geq 0$ y de esto se sigue que

$$\int_E (f-g)dm = \text{ínf}\left\{\int_E tdm : t \text{ es simple y } t \geq f - g\right\} \geq 0.$$

De manera análoga

$$\int_E (f-g)dm = \sup\left\{\int_E sdm : s \text{ es simple y } s \leq f - g\right\} \leq 0.$$

Esto demuestra (ii).

De la misma manera se demuestra que si $f \leq g$ c.d. entonces

$$\int_E fdm \leq \int_E gdm.$$

De aquí se sigue que

$$\left|\int_E fdm\right| \leq \int_E |f|dm,$$

pues $-|f| \leq f \leq |f|$ implica que $-\int_E |f|dm \leq \int_E fdm \leq \int_E |f|dm$, lo cual demuestra (iii).

Como $\int_E Adm = AmE$ y $\int_E adm = amE$ (iv) se sigue de (iii).

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{E_1 \cup E_2} fdm &= \int f\chi_{E_1 \cup E_2} dm = \int \left(f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2}\right) dm \\
&= \int f\chi_{E_1} dm + \int f\chi_{E_2} dm \\
&= \int_{E_1} fdm + \int_{E_2} fdm,
\end{aligned}$$

donde hemos usado (i).

□

Proposición 4.0.9. *Sea f medible y acotada definida en un medible E con $mE < \infty$.*
Si $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$, con E_n medible para cada $n \geq 1$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, entonces

$$\int_E f dm = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f dm.$$

Demostración. Usando el Principio de Inducción Matemática y la parte (v) de la proposición anterior se demuestra que

$$\int_{\cup_{n=1}^N E_n} f dm = \sum_{n=1}^N \int_{E_n} f dm, \quad \text{para cada } N \geq 1.$$

Ahora, para cada $N \geq 1$ sea $F_N = \cup_{n=N+1}^\infty E_n$. Tenemos que

$$\int_E f dm - \sum_{n=1}^N \int_E f dm = \int_E f dm - \int_{\cup_{n=1}^N E_n} f dm = \int_{F_n} f dm,$$

pues $E = \left(\cup_{n=1}^N E_N\right) \cup F_N$. Obsérvese que como f es acotada, digamos $|f(x)| \leq M$, entonces $\int_E |f(x)| dm \leq MmE < \infty$ y por lo tanto $\int_E f dm < \infty$ por la parte (iv) de la proposición anterior, así mismo $\int_{\cup_{n=1}^N E_n} f dm$ y $\int_{F_N} f dm$ son ambas finitas.
Entonces

$$\left| \int_E f dm - \sum_{n=1}^N \int_E f dm \right| = \left| \int_{F_N} f dm \right| \leq \int_{F_N} |f| dm.$$

De acuerdo con la Definición 4.0.6, para cada $\epsilon > 0$ existe una función simple s tal que $0 \leq s \leq |f|$ y

$$\int_{F_N} |f| dm - \frac{\epsilon}{2} < \int_{F_N} s dm \leq MmF_N, \quad \text{para cada } N \geq 1.$$

Como $F_{N+1} \subset F_N$ y $mF_1 \leq mE < \infty$, de acuerdo con la parte (i) de la Proposición 2.3.16 tenemos que $\lim_N mF_N = m\left(\cap_{N\geq 1} F_N\right) = m\emptyset = 0$.
Tomando N suficientemente grande obtenemos que $MmF_N < \dfrac{\epsilon}{2}$ y por lo tanto

$$\left| \int_E f dm - \sum_{n=1}^N \int_E f dm \right| \leq \int_{F_N} |f| dm < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto demuestra la Proposición.

$\square$.

Si f es medible, acotada y $f \geq 0$ definida en $\mathbb{R}$, entonces la función $\mu_f : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definida por $\mu M_f E := \int_E f dm$, para $E \in \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de los subconjuntos Lebesgue-medibles, es una medida. Pues obviamente $\mu_f E \geq 0$, para cada $E \in \mathcal{M}$, $\mu_f \emptyset = 0$ y si $E = \cup_{n\geq 1} E_n$ con $E_n \in \mathcal{M}$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces por la Proposición anterior tenemos que

$$\mu_f E = \int_{\cup_{n\geq 1} E_n} f dm = \sum_{n\geq 1} \int_{E_n} f dm = \sum_{n\geq 1} \mu_f E_n.$$

Demostraremos ahora nuestro primer teorema de convergencia, es decir, nuestro primer resultado que indica condiciones suficientes para intercambiar un límite con una integral.

Proposición 4.0.10. *(Teorema de Convergencia Acotada).*
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de funciones medibles sobre un subconjunto medible* E *con* $mE < \infty$ *que está uniformemente acotada por una constante real* M, *es decir,* $|f_n(x)| \leq \mathsf{M}$ *para todo* $n \geq 1$ *y todo* $x \in E$, *y además se tiene* $\lim_n f_n(x) = f(x)$ *entonces*

$$\int_E f dm = \lim_n \int_E f_n dm.$$

Demostración. Por el Lema, dados $\epsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{4\mathsf{M}}$ existen un subconjunto $A \subset E$ con $mA < \dfrac{\epsilon}{4\mathsf{M}}$ y un natural N tal que para $n \geq N$ y todo $x \in E \backslash A$ tenemos que $|f(x) - f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{2mE}$.
Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f dm - \int_E f_n dm \right| &\leq \int_E |f - f_n| dm \\
&= \int_{E\backslash A} |f - f_n| dm + \int_A |f - f_n| dm \\
&< \frac{\epsilon}{2mE} mE + 2\mathsf{M} mA \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

4.1. La integral de funciones no negativas.

En la sección anterior hemos definido la integral de Lebesgue para la clase de funciones que son medibles, acotadas y están definidas sobre un subconjunto medible de medida finita. En esta sección extenderemos esta definición al caso de funciones medibles no negativas definidas sobre un subconjunto medible, eliminando la restricción de que las funciones sean acotadas y los subconjuntos (dominios) sean de medida finita. En la próxima sección, también eliminaremos la restricción sobre el signo de las funciones.

Proposición 4.1.1. *Sean f, g funciones medibles no negativas, entonces*

(i) $\int_E (af+bg)dm = a\int_E fdm + b\int_E gdm, \quad a, b > 0.$

(ii) Si $f \leq g$ *c.d., entonces* $\int_E fdm \leq \int_E gdm.$

Demostración. Para $a > 0$ tenemos por la Proposición 4.0.8 que

$$\begin{aligned}
\int_E afdm &= \sup\left\{\int_E ahdm : h \text{ es medible, acotada, } h \leq f \text{ y } m\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\right\} \\
&= a\sup\left\{\int_E hdm : h \text{ es medible, acotada, } h \leq f \text{ y } m\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\right\} \\
&= a\int_E fdm.
\end{aligned}$$

Demostremos que $\int_E (f+g)dm = \int_E fdm + \int_E gdm$. Si $h \leq f, g \quad k \leq g$ y h, k son medibles, acotadas y se anulan fuera de conjuntos de medida finita, entonces por la Proposición 4.0.8 tenemos que

$$\int_E hdm + \int_E kdm = \int_E (h+k)dm \leq \int_E (f+g)dm.$$

Entonces tomando supremo obtenemos que

$$\int_E fdm + \int_E gdm \leq \int_E (f+g)dm.$$

Ahora, si ℓ es una función medible, acotada y nula fuera de un subconjunto de medida finita tal que $\ell \leq f+g$.
Entonces para $h(x) = min(f(x), \ell(x))$ y $k(x) = \ell(x) - h(x)$, tenemos que $h(x) \leq f(x)$ y

$$k(x) = \ell(x) - h(x) = \begin{cases} \ell(x) - f(x) & \text{si} \quad f(x) \leq \ell(x) \\ 0 & \text{si} \quad \ell(x) < f(x), \end{cases}$$

por lo tanto $k(x) \leq g(x)$. Además h y k están acotadas por la cota de ℓ y se anulan donde se anula ℓ.
Entonces

$$\int_E \ell dm = \int_E hdm + \int_E kdm \leq \int_E fdm + \int_E gdm,$$

de manera que

$$\int_E fdm + \int_E gdm \geq \int_E (f+g)dm.$$

Esto termina la demostración de (i).

Como $\left\{\int_E hdm : h \text{ es medible, acotada, } h \leq f \text{ y } m\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\right\} \subset$
$\subset \left\{\int_E kdm : k \text{ es medible, acotada, } k \leq g \text{ y } m\{x : k(x) \neq 0\} < \infty\right\}$,
entonces $\int_E fdm \leq \int_E gdm$, lo cual demuestra (ii).

$\square$

Teorema 4.1.2. *(Lema de Fatou).*
Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas tales que* $\lim_n f_n(x) = f(x)$ *c.d. en un subconjunto medible* E. *Entonces*

$$\int_E f dm \leq \underline{\lim}_n \int_E f_n.$$

Demostración. Sea $E_0 \subset E$ tal que $\lim_n f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in E \setminus E_0$. Entonces $mE_0 = 0$.
Sea h una función medible, acotada, $h \leq f$ y $E' \subset E \setminus E_0$ tal que $mE' = 0$ y h es nula fuera de E'. Defínase

$$h_n(x) = min(h(x), f_n(x)),$$

entonces h_n está acotada por la cota de h y se anula fuera de E'. Ahora, como $h_n(x) = h(x)$ si $h(x) \leq f_n(x)$, o bien, $h_n(x) = f_n(x)$ si $f_n(x) < h(x)$, tenemos que $h_n(x) \to_n h(x)$ para cada $x \in E'$.
Entonces podemos aplicar el Teorema de Convergencia Acotada para obtener que

$$\begin{aligned}\int_E hdm &= \int_{E\setminus E_0} hdm = \int_{E'} hdm \\ &= \lim_n \int_{E'} h_n dm \leq \underline{\lim}_n \int_E f_n dm,\end{aligned}$$

pues $h_n \leq f_n$ para cada $n \geq 1$.
Tomando supremo sobre h obtenemos que

$$\int_E f dm \leq \underline{\lim}_n \int_E f_n dm.$$

□

El Lema de Fatou es un resultado que supone muy pocas hipótesis sobre la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$, pero no permite intercambiar el límite con la integral, afirma sólo que $\int_E f dm \leq \underline{\lim}_n \int_E f_n dm$.

Los dos teoremas de convergencia más fuertes se demuestran usando el Lema de Fatou.
La hipótesis de no negatividad de las funciones f_n en el Lema de Fatou es esencial; pues si en $E = \mathbb{R}$ consideramos la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n = -n^2\chi_{(0,1/n)}$, entonces tenemos que $f(x) = \lim_n f_n(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, pero $\int_{\mathbb{R}} -n^2\chi_{(0,1/n)} dm = -n$, entonces $\underline{\lim}_n \int_{\mathbb{R}} f_n dm = -\infty < 0 = \int_{\mathbb{R}} f dm$.
Por otra parte, la desigualdad en el Lema de Fatou puede ser estricta. Por ejemplo para la sucesión de funciones medibles no negativas $(f_n)_{n\geq 1}$ donde $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$, tenemos que $f(x) = \lim_n f_n(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ pero $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f dm = 0 < 1 = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dm.$$

Teorema 4.1.3. *(de Convergencia Monótona)*
Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas sobre un subconjunto medible* E*, y sea* $f = \text{lím}_n f_n$*. Entonces*

$$\int_E f dm = \lim_n \int_E f_n dm.$$

Demostración. Por el Lema de Fatou tenemos inmediatamente que

$$\int_E f dm \leq \liminf_n \int_E f_n dm.$$

Pero $f_n \leq f$ para cada $n \geq 1$, consecuentemente $\int_E f_n dm \leq \int_E f dm$ para cada $n \geq 1$, De aquí se obtiene que

$$\limsup_n \int_E f_n dm \leq \int_E f dm.$$

Se sigue inmediatamente de esto que $\lim_n \int_E f_n dm$ existe y

$$\int_E f dm = \lim_n \int_E f_n dm,$$

pues

$$\liminf_n \int_E f_n dm \leq \limsup_n \int_E f_n dm$$

$\square$

Corolario 4.1.4. *Sea* $(U_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de funciones medibles, no negativas sobre un medible* E *y sea* $f = \sum_{n\geq 1} U_n$*.*
Entonces

$$\int_E f dm = \sum_{n\geq 1} \int_E U_n dm.$$

Demostración. Bastará tomar la sucesión de sumas parciales $f_n = \sum_{k=1}^n U_k$, $n \geq 1$ que es una sucesión creciente de funciones medibles y no negativas. Aplicando el Teorema anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_E f dm &= \lim_n \int_E f_n dm = \lim_n \sum_{k=1}^n \int_E U_k dm \\ &= \sum_{k\geq 1} \int_E U_n dm \qquad \square \end{aligned}$$

Nótese que en todos los resultados anteriores puede ocurrir que $\int_E f dm = \infty$. También obsérvese que hasta ahora no hemos usado el nombre *Lebesgue integrable* para designar a una función cuya integral de Lebesgue existe, pues de acuerdo con el Teorema 4.0.5 esta última condición se cumple para toda función medible. Este nombre lo aplicaremos sólo a aquellas funciones medibles que tienen integral de Lebesgue finita.

Definición 4.1.5. *Una función medible no negativa se llama* ***Lebesgue integrable*** *sobre un subconjunto medible E si*

$$\int_E f dm < \infty.$$

Si una función medible no negativa g está dominada por una función integrable f sobre un subconjunto medible E, es decir, $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in E$; entonces por la linealidad

$$\int_E f dm = \int_E (f-g) dm + \int_E g dm.$$

Como el lado izquierdo es finito, los dos términos del lado derecho son finitos y por lo tanto g también es integrable.

Corolario 4.1.6. *(Continuidad absoluta).*
Sea f una función no negativa e integrable sobre un medible E. Entonces para $A \subset E$,

$$\int_A f dm \to 0 \qquad \textit{cuando} \quad mA \to 0.$$

Demostración. Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \leq n \\ n & \text{si} \quad f(x) > n, \end{cases} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

La sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente de funciones medibles no negativas, entonces por Teorema de Convergencia Monótona se tiene que $\lim_n \int_E f_n dm = \int_E f dm$.
Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que

$$\int_E (f - f_n) dm < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para } n \geq N.$$

Entonces si $A \subset E$ es un subconjunto medible con $mA < \dfrac{\epsilon}{2N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_A f dm &= \int_A (f - f_N)\, dm + \int_A f_N dm < \int_A (f - f_N)\, dm + NmA \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Demuestre que cada función medible no negativa, definida sobre un subconjunto medible E, es límite de una sucesión creciente de funciones simples no negativas.
   Sugerencia: Para cada $n \geq 1$ sean $E_{n,k} = \left\{ x \in E : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\}$,
   $k = 1, 2, \ldots, 2^{2^n}$, y $E_{n,0} = E \setminus \cup_{k=1}^{2^{2^n}} E_{n,k} = \{x \in E : f(x) \geq 2^n\}$.
   Cada $E_{n,k}$ es medible y $E = \cup_{k=0}^{2^{2^n}} E_{n,k}$. Defina
   $$s_n(x) = 2^n \chi_{E_{n,0}} + \sum_{k=1}^{2^{2^n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}}, \text{ para cada } n \geq 1.$$

2. Demuestre que si f es medible y no negativa sobre un medible E, entonces
   $$\int_E f dm = \sup \left\{ \int_E s dm : s \text{ es simple y } s \leq f \right\}.$$
   Sugerencia. Use el ejercicio 1 y el Teorema de Convergencia Monótona.

3. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, demuestre que
   (a) $\int_E \underline{\text{lím}}_n f_n dm \leq \underline{\text{lím}}_n \int_E f_n dm$, esta es una generalización del Lema de Fatou.
   Sugerencia: Defina $g_n = \text{ínf}_{k \geq n} f_k$. $(g_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones medibles no negativas y $\text{lím}_n g_n = \underline{\text{lím}}_n f_n$. Use que $g_n \leq f_n$ para cada n y aplique el Teorema de Convergencia Monótona.
   (b) $\int_E \overline{\text{lím}}_n f_n dm \geq \overline{\text{lím}}_n \int_E f_n dm$.

4. (a) Suponga que f es una función medible y no negativa y defina $\mu_f E = \int_E f dm$ para cada $E \in \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es la sigma álgebra de los subconjuntos Lebesgue medibles. Demuestre que μ_f es una medida sobre $\mathcal{M}$ y que para cada función medible y no negativa g se tiene que
   $$\int g d\mu_f = \int g f dm.$$
   Sugerencia: La identidad es obviamente cierta si $g = \chi_E, E \in \mathcal{M}$. Consecuentemente también vale para cada función simple no negativa. El caso general se demuestra usando el Teorema de Convergencia Monótona.
   (b) Si además f es integrable, demuestre que μ_f es absolutamente continua respecto de m, es decir, si $mE = 0$ entonces $\mu_f E = 0$.

4.2. La integral de funciones complejas

En esta sección extenderemos el concepto de integral de Lebesgue al caso de funciones medibles con valores complejos.

Si $f : E \to \mathbb{R}^\sharp$ es una función medible y $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto abierto, entonces $\mathcal{O} = \cup_{n\geq 1} I_n$ con I_n un intervalo abierto para cada $n \geq 1$. Por lo tanto $f^{-1}(\mathcal{O}) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}(I_n)$ es un subconjunto medible, pues $f^{-1}(I_n)$ es medible para $n \geq 1$.
Reciprocamente, si $f^{-1}(\mathcal{O})$ es medible para cada subconjunto abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, entonces f es medible. Esta caracterización de la medibilidad motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.1. *Una función con valores complejos $f : E \to \mathbb{C}$ es medible si E es medible y $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in E : f(x) \in \mathcal{O}\}$ es medible para cada subconjunto abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$.*

Lema 4.2.2. *Si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$, es una función continua y $f : E \to \mathbb{C}$ es medible, entonces $h = g \circ f$ es medible.*

Demostración. Si $\mathcal{O} \subset \mathbb{F}$ es un subconjunto abierto, entonces por la continuidad de g tenemos que $g^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto en $\mathbb{C}$. Como f es medible obtenemos que

$$h^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{O})\right)$$

es medible.

$\square$.

Proposición 4.2.3. *Si $f = u+iv$ es una función con valores complejos definida en un subconjunto medible $E \subset \mathbb{R}$, entonces*

(a) f es medible si y sólo si u y v son funciones reales medibles.

(b) $|f|$ es una función medible.

Demostración. Las funciones $g_1(z) = Rez$ y $g_2(z) = Imz$ son continuas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$. Tenemos que $u = g_1 \circ f$ y $v = g_2 \circ f$, entonces aplicando el Lema 4.2.2 obtenemos que u y v son medibles.

Reciprocamente, si u y v son funciones reales medibles y $\mathcal{R}$ es un rectángulo abierto, es decir, $\mathcal{R} = I_1 \times I_2$ con I_1, I_2 intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(\mathcal{R}) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$ es medible. Ahora, cada abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ se puede escribir como unión a lo más numerable de rectángulos abiertos $(\mathcal{R}_n)_{n\geq 1}$, es decir, $\mathcal{O} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{R}_n$. Por lo tanto

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}(\mathcal{R}_n)$$

es medible. Esto demuestra (a).

Finalmente, tenemos que $g(z) = |z|$ es una función continua de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$ y $|f| = g \circ f$, entonces $|f|$ es medible por el Lema anterior.

$\square$

La parte positiva de una función real u es la función $u^+ = u \vee 0$, es decir,

$$u^+(x) = \text{máx}\{u(x), 0\}.$$

De manera similar la parte negativa de u es la función $u^- = (-u) \vee 0$. La función u es medible si y sólo si u^+ y u^- son medibles. Tenemos que

$$u = u^+ - u^-,$$

y

$$|u| = u^+ + u^-.$$

Definición 4.2.4. *Si $f = u + iv$, con u y v funciones reales medibles sobre un subconjunto medible E, entonces decimos que f es integrable sobre E si cada una de las funciones u^+, u^-, v^+ y v^- son integrables sobre E y su integral de Lebesgue está dada por,*

$$\int_E f dm = \int_E u^+ dm - \int_E u^- dm + i \int_E v^+ dm - i \int_E v^- dm.$$

Como las funciones u^+, u^-, v^+ y v^- son medibles no negativas, sus integrales de Lebesgue tienen sentido.

En particular una función *real* u es Lebesgue integrable sobre un medible E si u^+ y u^- son ambas integrables sobre E y en este caso

$$\int_E u dm = \int_E u^+ dm - \int_E u^- dm.$$

Proposición 4.2.5. *Sean f y g funciones complejas integrables sobre E, entonces*

(i) La función cf es integrable sobre E y

$$\int_E cf dm = c \int_E f dm.$$

(ii) La función $f + g$ también es integrable sobre E y

$$\int_E (f+g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

(iii) Si A y B son medibles y disjuntos contenidos en E, entonces

$$\int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm.$$

Demostración. Si $f = u + iv$, f es integrable sobre E si y sólo si u y v son integrables sobre E como funciones reales y

$$\int_E f dm = \int_E u dm + i \int_E v dm. \qquad (1)$$

Tenemos que

$$(cu)^+ = \begin{cases} cu^+ & \text{si} \quad c \geq 0 \\ -cu^- & \text{si} \quad c < 0, \end{cases}$$

entonces por la Proposición 4.2.3 $(cu)^+$ es integrable sobre E. De manera similar se demuestra que $(cu)^-$ es integrable sobre E. Entonces tenemos que cu es integrable y

$$\begin{aligned} \int_E cu dm &= \int_E (cu)^+ dm - \int_E (cu)^- dm \\ &= c \int_E u^+ dm - c \int_E u^- dm \\ &= c \int_E u dm, \end{aligned}$$

pues

$$(cu)^- = \begin{cases} cu^- & \text{si} \quad c \geq 0 \\ -cu^+ & \text{si} \quad c < 0, \end{cases}$$

De manera análoga se demuestra que cv es integrable sobre E y

$$\int_E cv dm = c \int_E v dm.$$

Esto demuestra (i) en el caso cuando a y b son reales. El caso general se sigue de esto usando la identidad (1).

Si u_1 y u_2 son funciones no negativas e integrables sobre E tales que $u = u_1 - u_2$, entonces $u_+ + u_2 = u_- + u_1$ y por la Proposición 4.2.3 obtenemos que

$$\int_E u_+ dm + \int_E u_2 dm = \int_E u_- dm + \int_E u_1 dm.$$

Como estas integrales son finitas tenemos que

$$\int_E u dm = \int_E u_+ dm - \int_E u_- dm = \int_E u_1 dm - \int_E u_2 dm.$$

Si $f = u + iv$ y $g = p + iq$ son integrables entonces u, p, v y q son integrables y por ejemplo $u + p = (u^+ + p^+) - (u^- + p^-)$ entonces

$$\begin{aligned} \int_E (u + p) dm &= \int_E (u^+ + p^+) dm - \int_E (u^- + p^-) dm \\ &= \int_E u^+ dm + \int_E p^+ dm - \int_E u^- dm - \int_E p^- dm \\ &= \int_E u dm + \int_E p dm. \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_E (v+q)dm = \int_E vdm + \int_E qdm.$$

Esto demuestra (ii).

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} fdm &= \int f\chi_{A\cup B}dm \\ &= \int f\chi_A dm + \int f\chi_B dm \\ &= \int_A fdm + \int_B fdm,\end{aligned}$$

lo cual demuestra (iii).

□

Proposición 4.2.6. *Si f es una función compleja integrable sobre un subconjunto medible E, entonces*

$$\left|\int_E fdm\right| \leq \int_E |f|dm.$$

Demostración. Sea $z = \int_E fdm$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha z = |z|$. Supóngase que $\alpha f = u + iv$, entonces tenemos que $u \leq |\alpha f| = |f|$ y consecuentemente

$$\begin{aligned}\left|\int_E fdm\right| &= \alpha\int_E fdm = \int_E \alpha fdm \\ &= \int_E udm \leq \int_E |f|dm,\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\int \alpha fdm$ es un número real.

□

Teorema 4.2.7. *(Convergencia Dominada)*
Sean g una función no negativa integrable sobre E y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones complejas medibles tales que $|f_n| \leq g$ sobre E para cada $n \geq 1$ y $f(x) = \lim_n f_n(x)$ c.d. en E. Entonces

$$\int_E fdm = \lim_n \int_E f_n dm$$

y

$$\lim_n \int_E |f_n - f|dm = 0.$$

Demostración. f es medible y $|f_n| \leq g$, entonces $|f_n - f| \leq 2g$.
Aplicando el Lema de Fatou a la sucesión de funciones medibles y no negativas $(2g - |f_n - f|)_{n\geq 1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_E 2g dm &\leq \underline{\text{lím}}_n \int_E (2g - |f_n - f|)\, dm = \int_E 2g dm + \underline{\text{lím}}_n \left(- \int_E |f_n - f| dm \right) \\ &= \int_E 2g dm - \overline{\text{lím}}_n \int_E |f_n - f| dm\end{aligned}$$

Como g es integrable obtenemos que

$$\overline{\text{lím}}_n \int_E |f_n - f| dm \leq 0 \leq \underline{\text{lím}}_n \int_E |f_n - f| dm,$$

pues la sucesión de reales $\left(\int_E |f_n - f| dm \right)_{n\geq 1}$ es no negativa. Entonces podemos concluir que

$$\text{lím}_n \int_E |f_n - f| dm = 0.$$

Por la Proposición 4.2.5 obtenemos que

$$\left| \int_E f_n dm - \int_E f dm \right| = \left| \int_E (f_n - f) dm \right| \leq \int_E |f_n - f| dm,$$

lo cual implica que

$$\text{lím}_n \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

□

Ejercicio

1.- Demuestre que si f medible, $f \geq 0$ y $\int f(x)dx = 0$, entonces $f = 0$ c.d.

2.- Demuestre el siguiente **Teorema de Lebesgue**. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable si y sólo si f es continua c.d. en $[a, b]$, es decir, si el conjunto de discontinuidades de f en $[a, b]$ tiene medida de Lebesgue cero.

Capítulo 5

Apéndice

En este apéndice incluimos algunos resultados importantes sobre puntos límite y límites superior e inferior de una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$. Dejamos la demostración de algunos de estos resultados como ejercicio para el lector.

Dada una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se tiene que

$$s = \lim_n s_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad |s - s_n| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon.$$

Debilitando un poco esta condición se obtiene la noción de punto límite: ℓ es un punto límite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall\epsilon > 0$ existen una infinidad de términos de la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ que distan de ℓ menos que $\epsilon > 0$. De manera más precisa tenemos.

Definición 5.0.8. *ℓ es punto límite de $(s_n)_{n\geq 1}$ si y sólo si dados $\epsilon > 0$ y $N \geq 1$ existe $n = n_\epsilon \geq N$ tal que $|s_n - \ell| < \epsilon$.*

Una forma equivalente de expresar este concepto está contenida en la siguiente.

Proposición 5.0.9. *ℓ es punto límite de una sucesión de números reales $(s_n)_{n\geq 1}$ si y sólo si existe una subsucesión $(s_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(s_n)_{n\geq 1}$ tal que $\ell = \lim_k s_{n_k}$.*

Demostración. Sea ℓ un punto límite de $(s_n)_{n\geq 1}$ y tómense $\epsilon = \dfrac{1}{k}, N = k$. Entonces para cada k existe $n_k \geq k$ tal que $|s_{n_k} - \ell| < \dfrac{1}{k}$, por lo tanto la subsucesión $(s_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a ℓ.

Reciprocamente, si $\ell = \lim_k s_{n_k}$, $(s_{n_k})_{n\geq 1}$ subsucesión de $(s_n)_{n\geq 1}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ $\exists k_\epsilon \geq 1$ tal que $|s_{n_k} - \ell| < \epsilon$, si $n_k \geq k_\epsilon$. Entonces dados $\epsilon > 0$ y $N \geq 1$ sea $n_\epsilon \geq max(k_\epsilon, N)$. Tenemos que $|s_{n_k} - \ell| < \epsilon$. $\square$

Si $(s_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de reales extendidos ℓ es un punto límite si $\ell \in \mathbb{R}$ y se cumple la condición de la definición, o bien $\ell = \pm\infty$ y existe $(s_{n_k})_{k\geq 1}$ subsucesión de $(s_n)_{n\geq 1}$ tal que $s_{n_k} \to \ell$.

Si $\ell = \text{lím}_n\, s_n$ entonces ℓ es punto límite de $(s_n)_{n\geq 1}$. El recíproco no es cierto, por ejemplo $s_n = 1 + (-1)^n$ no es convergente pero si tiene puntos límites.

Definición 5.0.10. *Si $(s_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de reales extendidos definimos su límite superior y su límite inferior como,*

(i) $\overline{\text{lím}_n} s_n = \text{ínf}_n \sup_{k\geq n} s_k$

(ii) $\underline{\text{lím}_n} s_n = \sup_n \text{ínf}_{k\geq n} s_k$,

respectivamente.

Recuerde que "Todo subconjunto de reales extendidos tiene supremo e ínfimo si es no vacío."

Considérese la sucesión $\overline{s_n} = \sup_{k\geq n} s_k = \sup\{s_n, s_{n+1}, \dots\}$. Como $\overline{s_{n+1}} = \sup\{s_n, s_{n+1}, \dots\}$, entonces $\overline{s_{n+1}} \leq \overline{s_n}$,; es decir, la sucesión $(\overline{s_n})_{n\geq 1}$ es no-creciente en $\mathbb{R}^\sharp$. Entonces existe

$$\text{lím}_n \overline{s_n} = \text{ínf}\{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \dots, \} = \overline{\text{lím}}_n s_n.$$

De manera análoga, si $\underline{s_n} = \text{ínf}_{k\geq n} s_k = \text{ínf}\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}$, la sucesión $(\underline{s_n})_{n\geq 1}$ es monótona no-decreciente en $\mathbb{R}^\sharp$, y por lo tanto

$$\text{lím}_n \underline{s_n} = \sup_n \underline{s_n} = \underline{\text{lím}_n} s_n.$$

Proposición 5.0.11. (a) *Sea $L \in \mathbb{R}$, $\quad L = \overline{\text{lím}_n} s_n$ si y sólo si*

(a.i) Para cada $\epsilon > 0$ existe n tal que $s_k < L + \epsilon$ para todo $k \geq n$;

(a.ii) Dados $\epsilon > 0$ y $n \geq 1$, existe $k' \geq n$ tal que $s_{k'} > \ell + \epsilon$.

(b) *Sea $\ell \in \mathbb{R}$, $\quad \ell = \underline{\text{lím}_n} s_n$ si y sólo si*

(b.i) Dado $\epsilon > 0$ existe n tal que $s_k > \ell - \epsilon$ para todo $k \geq n$;

(b.ii) Dados $\epsilon > 0$ y $n \geq 1$, existe $k' \geq n$ tal que $s_{k'} < \ell - \epsilon$.

La condición (b) en la Proposición anterior es dual de la condición (a).

Teorema 5.0.12. *Sea $(s_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$ y*

$$\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{R}^\sharp : \ell \quad \textit{es punto límite de } (s_n)_{n\geq 1}\}$$

o bien,

$$\mathcal{L} = \{\ell \in \mathbb{R}^\sharp : \textit{existe una subsucesión } (s_{n_k})_{k\geq 1} \textit{ de } (s_n)_{n\geq 1} \textit{tal que } s_{n_k} \to \ell\}.$$

Entonces

$$\underline{\text{lím}_n} s_n = \text{ínf}\,\mathcal{L}, \quad \overline{\text{lím}_n} s_n = \sup \mathcal{L}$$

$$y \quad \underline{\text{lím}_n} s_n,\ \overline{\text{lím}_n} s_n \in \mathcal{L}.$$

Observe que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es convergente si y sólo si $\mathcal{L}$ tiene sólo un punto.

Corolario 5.0.13. *Una sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^\sharp$ es convergente si y sólo si*

$$\underline{\lim_n} s_n = \overline{\lim_n} s_n.$$

Ejercicio. Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado. Demuestre que

(i)
$$\inf\{as : s \in S\} = a \inf\{s : s \in S\} \text{ si } a > 0,$$

(ii)
$$\inf\{as : s \in S\} = a \sup\{s : s \in S\} \text{ si } a < 0,$$

(iii)
$$\sup\{as : s \in S\} = a \inf\{s : s \in S\} \text{ si } a < 0,$$

(iv)
$$\sup\{as : s \in S\} = a \sup\{s : s \in S\} \text{ si } a > 0,$$

(v) Si $0 \notin S$,
$$\sup\{s^{-1} : s \in S\} = (\inf\{s : s \in S\})^{-1},$$

(vi) Si $0 \notin S$,
$$\inf\{s^{-1} : s \in S\} = (\sup\{s : s \in S\})^{-}1.$$

Proposición 5.0.14. *Supóngase $\underline{\lim}_n s_n$ y $\overline{\lim}_n s_n \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) $\overline{\lim}_n(-s_n) = -\underline{\lim}_n s_n$

(ii) $\underline{\lim}_n s_n \leq \overline{\lim}_n s_n$

(iii)
$$\begin{aligned}\underline{\lim}_n s_n + \underline{\lim}_n t_n &\leq \underline{\lim}_n (s_n + t_n) \leq \overline{\lim_n} s_n + \underline{\lim}_n t_n \\ &\leq \overline{\lim_n}(s_n + t_n) \leq \overline{\lim_n} s_n + \overline{\lim_n} t_n.\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] H.L. Royden, *Real Analysis*. The Macmillan company, Collier-Macmillan Limited, London, (1968).

[2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis (second edition)*. McGraw-Hill, Inc., New York, (1974).

[3] H.J. Wilcox, D.L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, (1994).

[4] S. Hartman, J.Mikusinski, *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*, Pergamon Press, New York - Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1961.