Fundamentos Matemáticos. Segunda Parte.

J. Delgado

July 20, 2005

Contents

Capítulo 1

El espacio $\mathbb{R}^n$

En esta sección presentaremos al espacio $\mathbb{R}^n$ desde diversos puntos de vista: Como espacio vectorial, como espacio euclideano y como espacio topológico. Supondremos que el lector está familiarizado con la construcción de los racionales a partir de los enteros.

1.1 El campo completo $\mathbb{R}$

En forma resumida, un campo es un conjunto donde se puede sumar, restar, multiplicar y dividir. Un ejemplo de campo son los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}.$$

con las operaciones de suma y multiplicación definidas así:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Dos números racionales consideran iguales si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Estrictamente hablando la relación anterior define una *relación de equivalencia*, y los representantes de la misma clas formas equvialentes de representar al mismo número racional, p.ej.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{-3}{-4} = \cdots$$

Definición 1 (Campo). *Se dice que el conjunto $\mathbb{K}$ es un campo, si existen dos operaciones por $a+b$ y ab respectivamente, con las siguientes propiedades:*

CONMUTATIVIDAD *Para todo $a, b \in \mathbb{K}$, $a + b = b + a$ y $ab = ba$.*

ASOCIATIVIDADES *Para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$,$(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)c = a(bc)$.*

DISTRIBUTIVIDAD *Para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a(b + c) = ab + ac$.*

EXISTENCIA DE NEUTROS *Existen elementos distintos $0, 1 \in \mathbb{K}$, llamdos neutros aditivo y multiplicativo respectivamente, tales que para todo $a \in \mathbb{K}$, $a + 0 = a$ y $a1 = a$.*

EXISTENCIA DE INVERSOS *Para cada $a \in \mathbb{K}$ existe $a^* \in \mathbb{K}$ tal que $a + a^* = 0$ y para cada $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ existe $a^\dagger \in \mathbb{K}$ tal que $aa^\dagger = 1$. Se acostumbra denotar $a^* \equiv -a$, $a^\dagger \equiv a^{-1}$ y se llaman inversos aditivos y multiplicativos respectivamente.*

La resta y la división se definen como

$$a - b \equiv a + (-b), \qquad \frac{a}{b} \equiv ab^{-1}.$$

Ejemplo 1. Los números racionales son un ejemplo de campo. El conjunto con dos elementos $\{0, 1\}$ es otro ejemplo de campo, trivial por cierto, con las mismas operaciones de suma y producto que como elementos racionales.

Ejemplo 2. Sea p un entero y consideremos las clases de enteros módulo p, i,e. defina la relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ si y solo si al dividir p divide a la diferencia $a - b$, decimos entonces que $a \equiv b \pmod p$. La clase de equivalencia de a se denota por $[a]$. El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota por $\mathbb{Z}_p$, por ejemplo

$$\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], \cdots, [p - 1]\}.$$

Se pueden definir las operaciones de suma y producto de clases como sigue:

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad [a][b] = [ab]$$

Debe verificarse por ejemplo que si $[a] = [a']$ y $[b] = [b']$ entonces

$$[a + b] = [a + b'] \qquad \text{y} \qquad [a][b] = [a'][b']$$

así, la defınción de suma y producto no depende del representante de la clase. Lo anterior es cierto, pues si

$$\begin{aligned} a &= a' + rp, \\ b &= b' + sp, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} a+b &= a' + b + +(r+s)p, \\ ab &= a'b' + (a's + b'r + rsp)p, \end{aligned}$$

Se deja al lector probar que si p es primo entonces $\mathbb{Z}_p$ es un campo. La dificultad mayor es probar la existencia del inverso multiplicativo.

Las necesidades de extender el campo de los números racionales son varias, por ejemplo en $\mathbb{Q}$ no es posible resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 2$.

Proposición 1. *La ecuación cuadrática $x^2 = 2$ no admite solución en $\mathbb{Q}$.*

Demostración.
Porque supongamos que existieran enteros a, b tales que $(a/b)^2 = 2$. Siempre es posible suponer que a y b no admiten factor común, i.e. son primos relativos. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} &= 2 \\ a^2 &= 2b^2 \end{aligned}$$

por lo que a^2 es par; por lo tanto a mismo debe ser par (si a fuera impar, entonces $a = 2k+1$ y por lo tanto $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ que sería impar). Poniendo entonces $a = 2k$ tendíamos

$$\begin{aligned} 4k^2 &= 2b^2, \quad \text{cancelando} \\ 2k^2 &= b^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto b^2 es también par, por lo que a y b admiten el factor común 2. Esto es una contradicción y por lo tanto no se puede suponer que exista una solución racional de la ecuación $x^2 = 2$. $\square$

Otra razón por la cual se necesita extender el campo $\mathbb{Q}$ es que no es completo, por ejemplo la sucesión de números racionales

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_0 = 1$$

es una sucesión decreciente de números positivos, asíque "debería converger". Tomando el límite cuando $n \to \infty$, $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ se tendría

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

i.e. $x^2 = 2$, x "debería" ser $\sqrt{2}$ que no es racional!

Ejemplo 3. [Una posible manera de extender a $\mathbb{Q}$] Como es bien conocido, en $\mathbb{Q}$ no siempre es posible resolver ecuaciones cuadráticas como $x^2 = 2$ o $x^2 = p$, con p primo. Existen diversas formas de extender el campo $\mathbb{Q}$ para resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo consideremos las expresiones formales del tipo $a + jb$ donde $j^2 = 2$. Se puede definir la suma de la manera obvia: $(a+jb)+(c+jd) = a+c+j(b+d)$. Para la multiplicación procedamos formalmente: ya que las propiedades de distributividad y conmutatividad deberán ser ciertas en la nueva extensión,

$$(a + jb) \cdot (c + jd) = ac + j^2bd + (ad + bc) = ac + 2bd + j(ad + bc)$$

Definiendo entonces $(a + jb) \cdot (c + jd) = ac + 2bd + j(ad + bc)$ se puede verificar que se obtiene un campo. El campo así obtenido se llama *una extensión cuadrática de* $\mathbb{Q}$.

El neutro adivito es evidentemente $0 + j0$, el neutro multiplicativo es $1 + j0$. Verifiquemos a manera de ejemplo, la existencia del inverso para un elemento no nulo: si $a + jb$ es no nulo, bucamos el inverso como $c + jd$,

$$(a + jb)(c + jd) = ac + 2bd + j(ad + bc) = 1 + j0$$

luego c, d son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} ac + 2bd &= 1 \\ bc + ad &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

con a, b como datos. El determinante del sistema es $a^2 - 2b^2$ es distinto de cero, de otra forma $(a/b)^2 = 2$ lo que diría que $x^2 = 2$ tiene solución en $\mathbb{Q}$, por lo tanto existen c, d únicos que satisfacen el sistema (1.1). Al resolver explícitamente el sistema obtenemos

$$(a + bj)^{-1} = \frac{a - bj}{a^2 - 2b^2}.$$

El campo así obtenido se llama la extensión cuadrática $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Es evidente que en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ la ecuación cuadrática $x^2 = 2$ admite la solución $x = 1j$

Ejemplo 4. Los racionales complejos son elementos de la forma $a + ib$ con $i^2 = -1$, con las operaciones de suma y producto análogas a las de la extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$.

Hemos exhibido ejemplos de campos. El campo de los números reales se distitngue por su propiedad de orden y completez que se enuncian de manera axiomática

Definición 2 (el campo $\mathbb{R}$). *El campo de los números reales $\mathbb{R}$ es un campo que además satisface los siguientes axiomas*

AXIOMA DE ORDEN *Existe un subconjunto de $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$ con tal que*

(i) Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b, ab \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se da una y solo una de las siguientes afirmaciones: $a \in \mathbb{R}^+$, $a = 0$ o $-a \in \mathbb{R}^+$.

AXIOMA DEL SUPREMO *(véase §1.1.1)*

Se *puede construir* el campo de los números reales a partir de los racionales, por ejemplo a partir de la noción de cortadura y probar que el campo así construido satisface los axiomas de orden y del supremo. En nuesto enfoque, los reales se presentan de manera axiomática.

En seguida discutimos las consecuencias del axioma de orden y posponemos la discusión del axioma del supremo. El axioma de orden permite definir un orden total

Definición 3. *Se dice que $a < b$ (a es menor que b) si y solo si $b - a \in \mathbb{R}^+$; $a \leq b$ (a es menor o igual que b) si y solo si $b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;*

Proposición 2. *La relación menor o igual es un orden total, i.e. se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Relexividad: $a \leq a$ para toda $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Antisimetría: $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$.*
3. *Transitividad: $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$.*

4. *Tricotomía: Para cualesquiera a, $b \in \mathbb{R}$ se satisface que $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Proposición 3. *Son ciertas las siguientes afirmaciones*

CUADRADOS DE NÚMEROS POSITIVOS *Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.*

SUMAR MIEMBRO A MIEMBRO PRESERVA LA DESIGUALDAD. *Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + b < c + d$.*

MULTIPLICAR POR UN NÚMERO POSITIVO PRESERVA LA DESIGUALDAD. *Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < cb$.*

MULTIPLICAR POR UN NÚMERO NEGATIVO INVIERTE LA DESIGUALDAD. *Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > cb$.*

CUADRADO NO NEGATIVOS. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$ y $a^2 = 0$ si y solo si $a = 0$.*

INVERSO MULTIPLICATIVO POSITIVO. *Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.*

La noción de distancia se define mediante el valor absoluto

Definición 4 (valor absoluto). *El valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ se define como*

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0, \\ -a & si\ a < 0, \end{cases}$$

Observación 1. Es importante remarcar que si se desconoce la cantidad a, lo más que podemos hacer es considerar los casos, por ejemplo $|-2| = 2$, $|-(-2)| = 2$, pero $|-x| = x$ sería incorrecto, pues no sabemos si $x \geq 0$ o $x < 0$. En otro ejemplo

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a, \\ -(x - a) & \text{si } x < a, \end{cases}$$

Proposición 4. *Se satisfacen las siguientes igualdades*

1. $|-a| = |a|$, $a \leq |a|$.

2. $|a| \geq 0$, *y* $|a| = 0$ *si si solo si* $a = 0$.

3. $|ab| = |a||b|$.

4. $|a^2| = |a|^2 = a^2$.

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$.

6. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ejemrcicio 1.1–5.

Observación 2. Con frecuencia se encuentra la desigualdad $|x - a| < \epsilon$. Por la propiedad (1), se tiene $x - a < \epsilon$ y $-(x - a) < \epsilon$, equivalentemente $-\epsilon < x - a < \epsilon$. Sumando a a la desigualdad se obtiene entonces

$$\boxed{|x - a| < \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon}$$

ésta última desigualdad tiene una interpretación geométrica: x está contenida en el intervalo con centro en a y radio ϵ.

Análogamente

$$\boxed{|x - a| \geq \epsilon \Longleftrightarrow x \geq a + \epsilon \quad \text{o} \quad x \leq a - \epsilon}$$

1.1.1 El axioma del supremo

Este axioma merece una discusión aparte, ya que es el que distingue a los números reales de cualquier otro campo.

Definición 5. *Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$* está acotado superiormente *si existe M tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$* está acotado inferiormente *si existe m tal que $m \leq a$ para todo $a \in A$.*

Definición 6 (supremo). *Sea A un conjunto acotado superiormente. Un número s^* es el supremo de A si*

1. *s^* es una cota superior de A.*

2. *Para todo número positivo ϵ existe $a \in A$ tal que $s^* - \epsilon < a \leq s^*$. En otras palabras, s^* es la* mínima cota superior.

Definición 7 (infimo). *Sea A un conjunto acotado inferiormente. Un número s_* es el supremo de A si*

1. *s_* es una cota inferior de A.*

2. *Para todo número positivo* ϵ *existe* $a \in A$ *tal que* $s^* \leq a < s^* + \epsilon$. *En otras palabras,* s_* *es la* máxima cota superior.

De la definición se sigue que si s' es un supremo de A entonces $s' \leq s*$ y $s* \leq s'$ es decir $s' = s*$, luego podemos hablar del supremo del conjunto que denotaremos por $\sup A$. Análogamente el ínfimo de A se denota por $\inf A$.

Ahora estamos en posiblidad de enunciar el
AXIOMA DEL SUPREMO Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene un supremo.

Observación 3. Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente entonces $-A = \{-a \mid a \in A\}$, está acotado superiormente y además $\inf A = \sup -A$, por ello no se enuncia como axioma adicional la existencia del ínfimo para un conjunto no vacío acotado inferiormente.

Ejemplo 5. Considere el conjunto $A = \{x > 0 \mid x^2 < 2\}$. Si $x \in A$ enconces $x^2 < 2 < 4$ de donde $x < 2$, es decir el conjunto A es acotado superiormente. Como $1 \in A$, A es no vacío. El axioma del supremo garantiza que existe un número real, $s = \sup A$ que es la mínima cota superir.

Ejemrcicio 1.1–6. Verifique s que tal número resuelve la ecuación cuadrática $x^2 = 2$.

1.2 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

El espacio vectorial real n–dimensional se define como

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^n\}$$

en el cual están definidas las operaciones de suma y multiplicación por un escalar coordenada a coordedada: Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, dichas operaciones se definen como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \quad (1.2)$$

Se acostumbra llamar a los elementos de $\mathbb{R}^n$ *vectores* y los elementos del campo, en este caso $\alpha \in \mathbb{R}$, *escalares.*

De manera similar se define el espacio vectorial complejo n–dimensional, como

$$\mathbb{C}^n = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^n\}$$

con las operaciones definidas como en (1.2).

Los espacios n–dimensionales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son ejemplos particulares de espacios vectoriales, sobre el campo $\mathbb{R}$ el primero, sobre el campo $\mathbb{C}$ el segundo.

Definición 8. *Sea* $\mathbb{K}$ *el campo* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*. Un espacio vectorial* V *sobre el campo* $\mathbb{K}$ *es un conjunto dotado de dos operaciones, suma y producto por escalares, que satisfacen las siguientes propiedades:*

RESPECTO DE LA SUMA

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$.
3. *Existe un vector* $\mathbf{0}$ *con la propiedad: para todo* $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.
4. *Para todo* $\mathbf{x} \in V$ *existe* $\mathbf{x}^*$ *tal que* $\mathbf{x} + \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

RESPECTO DEL PRODUCTO POR ESCALARES

1. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.
3. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$.
4. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Ejemplo 6. El conjunto de sucesiones de números reales o complejos constituyen un espacio vectorial:

$$c = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{K}, n = 1, 2, \ldots\}$$

con las operaciones de suma y producto por escalares se definen término a término.

Ejemplo 7. Si V es un espacio vectorial y D un conjunto arbitrario, el conjunto de funciones a valores en V, definidas sobre un mismo conjunto D forman un espacio vectorial:

$$V^D = \{f \colon D \to V\}$$

con las operaciones usales de suma de funciones y producto por un escalar.

Ejemplo 8. El conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

donde A es una matriz de m por n y $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Ejemplo 9. El conjunto de matrices de m por n

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n\}.$$

con la operación usual de matrices.

Los ejemplos 1 y 2 son espacios vectoriales de *dimensión infinita*, 3 y 4 son ejemplos de espacios vectoriales de *dimensión finita* en los que es posible encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio, es decir una base.

Definición 9. *Una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores*

$$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$$

1. *Linealmente independiente, es decir si*

   $$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$$

   entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

2. *Genera al espacio, es decir, para todo vector $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tales que*

   $$v = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{f}_n.$$

   .

El número n se llama la dimensión del espacio vectorial V.

Observación 4. Si V es de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, entonces elegida una base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ la aplicación $x\colon V \to \mathbb{K}^n$, o sus componetes, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,donde $x_1(v), x_2(v), \dots, x_n(v)$ son los únicos escalares tales que

$$v = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \ldots + x_n\mathbf{f}_n$$

se conocen como las funciones coordenadas.

Así, dada una función $f\colon V \to X$ entre espacios vectoriales V, X de dimensiones m y n respectivamente, y $x\colon V \to \mathbb{K}^n$, $y\colon W \to \mathbb{K}^m$ funciones coordemadas asociadas a sendas bases

$$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\} \quad \text{de } V, \qquad \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m\} \quad \text{de } W$$

entonces $y \circ f \circ x^{-1}$ es una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Es decir, cuando se trata con espacios vectoriales de dimensión finita es suficiente estudiar los espacios modelo $\mathbb{K}^n$.

1.2.1 El espacio euclideano $\mathbb{E}^n$.

Motivación: el teorema de Pitágoras

El modelo geométrico para el espacio euclideano $\mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano de coordenadas x–y. Cada punto se representa por el segmento dirigido OP del origen O al punto P, y se le asocian mediante sus proyeccciones perpendiculares respecto de dos ejes coordenados perpendiculares. Al segmento dirigido OP, lo llamaremos "el punto P".

Si P, Q son dos puntos en el plano cartesiano, el segmento dirigido PQ tiene una longitud que de acuerdo a la ley de los cosenos (ver Figura 1) es

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ|\cos\theta$$

donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre los vectores OP y OQ.

$$\begin{aligned} 2|OP||OQ|\cos\theta &= |OP|^2 + |OQ|^2 - |PQ|^2, \quad \text{por tanto} \\ \cos\theta &= \frac{|OP|^2 + |OQ|^2 - |PQ|^2}{2|OP||OQ|} \end{aligned}$$

Si ahora introducimos las coordenadas $OP = (x_1, y_1)$, $OQ = (x_2, y_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2|OP||OQ|} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|OP||OQ|} \end{aligned}$$

La cantidad $x_1x_2 + y_1y_2$ se conoce como el producto escalar de los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Esto se generaliza a más dimensiones.

Definición 10. *El espacio euclideano n–dimensional* $\mathbb{E}^n$ *es el espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ *con el producto interior*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{1.3}$$

Proposición 5. *El producto interior es una operación bilineal simétrica:*

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ *y* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$
4. $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

Veamos a manera de ejemplo, veamos la prueba de la propiedad 1,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

de donde es claro que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ es equivalente a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, es decir $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para demostrar la propiedad 2,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 + \cdots (x_n + y_n) z_n \\
&= (x_1 z_1 + y_1 z_1) + (x_2 z_2 + y_2 z_2) + \cdots (x_n z_n + y_n z_n) \\
&= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots x_n z_n) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots y_n z_n) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}
\end{aligned}$$

Un espacio euclidiano general se define como sigue.

Definición 11. *Un producto interior en el espacio vectoria* $\mathbb{R}^n$ *está definido por una operación* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *denotada por* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, *con las propiedades siguientes:*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, *y* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
3. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

El espacio $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ *se llama un espacio euclidiano.*

Observación 5. Una función $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *bilineal* si

$$B(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha B(\mathbf{x},\mathbf{z}) + B(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad \text{y} \quad B(\mathbf{z},\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha B(\mathbf{x},\mathbf{z}) + B(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Se dice simétrica si $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = B(\mathbf{y},\mathbf{x})$. Si B es simétrica, la segunda propiedad anterior es redundante; $B(\mathbf{x},\mathbf{x})$ se llama también una "forma cuadrática". Una forma bilineal se dice definida positiva, si $B(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ y $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En estos térmimos, un producto interior viene dada por una forma bilineal simétrica, definida positiva.

1.2.2 Propiedades de los espacios euclidianos

Sea $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclidiano. Se dice que dos vectores $\mathbf{x},\mathbf{y}$ son colineales si $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$, para algún escalar λ; se dicen ortogonales si $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$. En general el ángulo entre dos vectores se define como el único valor $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}$$

Justifiquemos esta definición. Para ello probemos la siguiente desigualdad importante

Proposición 6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea* $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio euclidiano, entonces*

$$|\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \leq \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

y la igualdad se da si y solo si $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *son colineales.*

Demostración.

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Por las propiedades del producto interior, la función cuadrática $q(\lambda)$ satisface

$$0 \leq q(\lambda) = \langle\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y},\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \lambda^2\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo tanto el discriminante

$$4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle^2 - 4\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \leq 0,$$

de donde se sigue la desigualdad. Si $\mathbf{x},\mathbf{y}$ son colineales, evidentemente se da la igualdad. Viceversa, si se da la igualdad entonces $0 = \langle\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y},\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}\rangle$ para algún λ. Por ser el producto interior definido positivo, entonces $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. $\square$

1.3 El espacio normado $\mathbb{R}^n$

Definición 12. *Si* $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio euclidiano, la norma asociada al producto interior* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es*

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$$

Se siguen las siguientes propiedades:

Proposición 7. *Si* $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio euclidiano, la norma satisface las siguientes propiedades:*

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$, *y* $||\mathbf{x}|| = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|||\mathbf{x}||$.
3. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ *(desigualdad del triángulo)*

Demostración.

La primera propiedad es consecuencia directa de la definición de norma, y de la propiedad de positividad definida del producto interior. La segunda propiedad se sigue sacando raiz cuadrada de la identidad $\langle\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}\rangle = \alpha^2\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$. Para probar la desigualdad del triángulo, usando la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\ &\leq \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\ &= ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 \end{aligned}$$

Sacando raiz cuadrada se obtiene la desigualdad. □

Proposición 8 (Identidad del paralelogramo).

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 + = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$$

Demostración.
Sumando las siguientes indentidades se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle &= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\ \langle\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle &= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$

□

Si en vez de sumar restamos las identidades anteriores se obtiene

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2\right)$$

En realidad es cierto el resultado más general:

Proposición 9 (identidad de polarización). *Si* $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una forma bilineal simétrica entonces*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(B(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - B(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y})\right)$$

La identidad anterior permite recuperar la forma bilineal $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a partir de la forma cuadrática $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$

Más en general se tiene,

Definición 13. *Una norma en el espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *con las propiedades*

1. $\nu(\mathbf{x}) \geq 0$, *y* $\nu(\mathbf{x}) = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\nu(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha|\nu(\mathbf{x})$.
3. $\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq \nu(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{y})$.

Observación 6. La norma definida por el producto interior usual (1.3) se llama la norma euclideana.

Ejemplo 10. Las siguientes son normas en $\mathbb{R}^n$ que se utilizan con mucha frecuencia:

1. La norma 1, $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
2. Si $0 < p < 1$, la norma p

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

3. La norma infinito $||\mathbf{x}||_\infty = \max_{1\leq i\ n} |x_i|$.

Ejemplo 11. Si ν es una norma y $f\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \mathbb{R}$ es una función creciente y convexa entonces $f \circ \nu$ es también una norma.

Si ν es una norma, surge la pregunta si ésta proviene de un producto escalar. Vimos que una condición necesaria es que se satisfaga la identidad del paralelogramo. Probemos que también es suficiente.

Proposición 10. *Si ν es una norma en $\mathbb{R}^n$ y*

$$\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2=2(\nu(\mathbf{x})^2+\nu(\mathbf{y})^2)$$

entonces $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2-\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2\right)$ es un producto interior y la norma asociada es la norma ν.

Demostración.

Son evidentes las propiedades de simetría,

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$$

y

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \nu(\mathbf{x})^2 \geq 0, \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \nu(\mathbf{x})^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

Además de

$$\langle -\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

Para $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
4\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle &= \nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
4\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle &= \nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2\\
4\langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle &= \nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2
\end{aligned}$$

restando

$$\begin{aligned}
&4(\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle-\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle-\langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle)=\\
&= \nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&= \nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&\quad -\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&= 2(\nu(\mathbf{x})^2+\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2)-(\nu(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{z})^2)\\
&\quad -\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&= 2(\nu(\mathbf{x})^2+\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2)-2(\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y})^2)\\
&\quad -\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&= 2(\nu(\mathbf{x})^2-\nu(\mathbf{y})^2)+2(\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2)-\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2)\\
&\quad -\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2-\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2\\
&= 2(\nu(\mathbf{x})^2-\nu(\mathbf{y})^2)+(\nu(\mathbf{y}+\mathbf{z})^2+\nu(\mathbf{y}-\mathbf{z})^2)-(\nu(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2)+\nu(\mathbf{x}+\mathbf{z})^2)\\
&= 2(\nu(\mathbf{x})^2-\nu(\mathbf{y})^2)+2(\nu(\mathbf{y})^2+\nu(\mathbf{z})^2)-2(\nu(\mathbf{x})^2)+\nu(\mathbf{z})^2)\\
&= 0
\end{aligned}$$

De aquí se sigue por inducción

$$\langle n\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = n\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

para cualquier n natural. Como $\langle -\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ entonces es cierta la igualdad para $n \in \mathbb{Z}$.

Para p/q racional, ya que $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$q\langle \frac{p}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle p\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = p\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

de donde

$$\langle \frac{p}{q}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \frac{p}{q}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

es decir $\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ para c racional. Como para $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ fijos la función $\phi_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(c) = \langle c\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ es de hecho lineal, entonces es continua. Por lo tanto $\phi(c) = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$, lo que prueba la homogeneidad.

Ejemplo 12. Si $||\mathbf{x}||$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, se puede dar una norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ como sigue

$$||A|| = \sup\{||A\mathbf{x}|| \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$$

equivalentemente

$$||A|| = \sup\{||A\mathbf{x}|| \mid ||\mathbf{x}|| = 1\}$$

donde por supuesto el símbolo $||\cdot||$ tiene diversos significados y se interpreta segú el contexto. Observe la desigualdad importante

$$||A\mathbf{x}|| \leq ||A||||\mathbf{x}||.$$

Se dice que la norma matricial *estś subordinada a la norma en* $\mathbb{R}^n$*.*

Las propiedades de norma en $\mathbb{R}^n$ se heredan para la norma matricial. Por ejemplo, para verificar la desigualdad del triángulo, si $A, B \in R^{n\times n}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$||(A+B)\mathbf{x}|| = ||A\mathbf{x} + B\mathbf{x}|| \leq ||A\mathbf{x}|| + ||B\mathbf{x}|| \leq ||A| + ||B||$$

de donde

$$\sup\{||(A+B)\mathbf{x}|| \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\} \leq ||A|| + ||B||.$$

Ejemplo 13. La norma matricial en $\mathbb{R}^{n\times n}$ subordinada a la norma 1 es el máximo de las 1–normas de las columnas:

$$||A|| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

La norma matricial en $\mathbb{R}^{n\times n}$ subordinada a la norma ∞ es el máximo de las 1–normas de los regnlones:

$$||A|| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

La norma matricial en $\mathbb{R}^{n\times n}$ subordinada a la norma euclideana es el valor absoluto del mayor valor propio de la matriz simétrica AA^t.

Ejemplo 14. $\mathbb{R}^n$ con la norma p no es un espacio euclidiano a menos que $p = 2$.np

1.4 El espacio métrico $\mathbb{R}^n$

Definición 14. *Una distancia d en el espacio $\mathbb{R}^n$ es una función $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con las propiedades siguientes*

1. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$, *y* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *si y solo si* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$
3. $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$

Dada una norma $||\ ||$ en el espacio $\mathbb{R}^n$ podemos definir una distancia como sigue

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

es inmediato verificar las propiedades que definen una distancia.

Ejemplo 15. La distancia discreta se define como

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

la cual distingue simplemente puntos distintos.

Ejemplo 16. Si d es una distancia, entonces

$$\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{1 + d(\mathbf{x},\mathbf{y})}$$

es también una distancia. La ventaja es que la distancia entre cualesquiera dos puntos es menor que 1.

Definición 15. *Sea d una métrica en $\mathbb{R}^n$. La bola abierta con centro en $\mathbf{x}$ y radio δ es*

$$B(\mathbf{x},\delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta\}.$$

Si en vez de la desigualdad estricta $<$ se toma la desigualdad más amplia $\leq$, se tiene la bola cerrada que denotaremos por $B[\mathbf{x},\delta]$. Por $B'(\mathbf{x},\delta)$ denotamos a $B(\mathbf{x},\delta) \setminus \{\mathbf{x}\}$

Observación 7. Recordemos que un conjunto B se dice convexo si $\mathbf{y},\mathbf{z} \in B$ implican $t\mathbf{y} + (1-t)\mathbf{z} \in B$. Si la métrica proviene de una norma, entonces toda bola es convexa. De hecho esta propiedad caracteriza a una métrica proveniente de una norma en $\mathbb{R}^n$.

1.4.1 Topología de $\mathbb{R}^n$

Definición 16. *Una topología en $\mathbb{R}^n$ es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ –llamados abiertos–, con las siguientes propiedades*

1. *$\emptyset$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$.*
2. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto.*
3. *La unión de un número arbitrario de abiertos es abierto.*

Ahora definiremos una topología en $\mathbb{R}^n$ a partir de una métrica. En lo que sigue $A, B, C, D, \ldots$ denotarán subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$.

Definición 17. *Un punto $\mathbf{x} \in D$ se dice interior, si existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\delta) \subseteq D$. El interior de un conjunto,* $\operatorname{int}(()\,D)$ *es el conjunto de sus puntos interiores. Un conjunto D se dice abierto, si* $\operatorname{int}(()\,D) = D$*, es decir, si para todo $\mathbf{x} \in D$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\delta) \subseteq D$.*

La razón del nombre está justificada:

Proposición 11. *La colección de conjuntos abiertos según la definición (17) constituyen una topología en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.
Es evidente que $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ son abiertos. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria en número, de abiertos. Si $\mathbf{x} \in \cup_{i\in I} V_i$ entonces $\mathbf{x} \in V_j$ para algún $j \in I$. Como V_j es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\delta) \subseteq V_j$, de donde $B(\mathbf{x},\delta) \subseteq \cup_{i\in I} V_i$.

Para finalizar, basta ver que la intersección de dos abiertos es un conjunto abierto. Sean V, W abiertos y $\mathbf{x} \in V \cap W$. Luego $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{x} \in W$, ya que por hipótesis existen δ_1, δ_2 positivos tales que $B(\mathbf{x}, \delta_1) \subseteq V$ y $B(\mathbf{x}, \delta_2) \subseteq W$ tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1\}$ entonces $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq V \cap W$. □

Proposición 12. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$, $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$,

Demostración.
Sea $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A \cap B)$ luego existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A \cap B \subseteq A, B$, luego $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Viceversa, si $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $B(\mathbf{x}, \delta_1) \subseteq A$ y $B(\mathbf{x}, \delta_2) \subseteq A$, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A \cap B$ por lo tanto $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

Se ahora $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, si $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(A)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A \subseteq A \cup B$, si $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(B)$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq B \subseteq A \cup B$. En cualquier caso existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq A \cup B$, por lo tanto $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(()\, A \cup B)$. □

Observación 8. Como contraejemplo de que la contención $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$ no se puede mejorar, consideremos en $\mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$. Se tiene: $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int}([0, 2]) = (0, 2) \not\subset (0, 1) \cup (1, 2) = \operatorname{int}([0, 1]) \cup \operatorname{int}([1, 2])$

Observación 9. Para hablar de la diferencial de una función $f \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto $\mathbf{x}$ perteneciente al dominio D de la función, se necesita evaluar la función en punto vecinos a $\mathbf{x}$ de la forma $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ con $\mathbf{h}$ "pequeño, es decir $\mathbf{x}$ deberá ser punto interior de D.

Para verificar que un conjunto es abierto, en ocasiones es más fácil trabajar con vecindades que con bolas según en la definición de abierto.

Definición 18. *Una vecindad N de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto que contiene alguna bola abierta con centro en $\mathbf{x}$.*

Proposición 13. *Un conjunto D es abierto si y solo si para todo $\mathbf{x} \in D$ existe una vecindad N de $\mathbf{x}$ contenida en D.*

Demostración.
Es claro que si D es abierto, la bola $B(\mathbf{x}, \delta)$ de la definición es una vecindad con la propiedad requerida. Viceversa, si $N \subseteq D$ es una vecindad de $\mathbf{x}$ existe una bola $B(\mathbf{x}, \delta)$ contenida en N y por lo tanto en D □

El concepto dual una topología es la de *familia de cerrados*

Definición 19. *Una familia de cerrados en* $\mathbb{R}^n$ *es una familia* $\mathcal{K}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *–llamados cerrados–, con las siguientes propiedades*

1. $\emptyset$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$.

2. *La unión de un número finito de cerrados es cerrados*

3. *La intersección de un número arbitrario de cerrados es cerrado.*

Para construir una familia de cerrados, precisamos de la siguiente

Definición 20. *Se dice que* $\mathbf{x}$ *es un punto de acumulación del conjunto* D*, si toda bola con centro en* $\mathbf{x}$ *intersecta a* D *en puntos distintos de* $\mathbf{x}$*. En otras palabras, si para toda* $\delta > 0$ $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap D \neq \emptyset$*. Al conjunto de todos los puntos de acumulación se denota por* D'*. Un conjunto se dice cerrado, si* $D' \subseteq D$*. La cerradura de un conjunto de denota por* $\overline{D} = D \cup D'$*.*

Observe que si D es cerrado entonces $\overline{D} = D$. Ahora veamos que el término "familia de cerrados" es apropiada.

Proposición 14. *La colección de conjuntos cerrados según la definición (20) es efectivamente una familia de cerrados según la definición (19)*

Demostración.
La afirmación 1 en (19) es evidente. Consideremos dos cerrados E, F y sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de $E \cup F$. Probemos que si $\mathbf{x}$ no es punto de acumulación de E entonces lo es de F. Como $\mathbf{x} \notin E'$, existe una bola $B(\mathbf{x}, \delta_0) \cap E = \emptyset$. Consideremos una bola agujerada cualquiera $B'(\mathbf{x}, \delta)$. Si $\delta < \delta_0$ entonces $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap E \subset B'(\mathbf{x}, \delta_0) \cap E$ que es vacío, por lo tanto $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap E = \emptyset$, como $B'(\mathbf{x}, \delta)$ debe intersectar a $E \cup F$, entonces $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap F \neq \emptyset$; por lo tanto cualquier bola aguerada de radio menor que δ_0 debe intersectar a F. Si $\delta \geq \delta_0$ entonces $B'(\mathbf{x}, \delta)$ contiene un bola de radio menor que δ_0, por lo tanto $B'(\mathbf{x}, \delta)$ intersecta también a F, es decir $\mathbf{x}$ es punto de acumulación de F que por ser cerrado contiene a $\mathbf{x}$.

Se ahora $\{F_i\}_{i \in I}$ una famila, arbitraria en número, de cerrados. Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de $\bigcap_{i \in I} F_i$, entonces para todo $\delta > 0$ y todo $j \in I$ $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap F_j \subseteq B'(\mathbf{x}, \delta) \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, es decir $\mathbf{x}$ es punto de acumulación de F_j que es cerrado, luego $\mathbf{x} \in F_j$. Como esto sucede para toda j entonces $\mathbf{x} \in \cap \bigcap_{j \in I} F_j$. □

Proposición 15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*,* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$*,*

Demostración.
Si $\mathbf{x} \in \overline{A \cup B}$, entonces $\emptyset \neq B'(\mathbf{x}, \delta) \cap (A \cup B) = (B'(\mathbf{x}, \delta) \cap A) \cup (B'(\mathbf{x}, \delta) \cap B)$ en particular $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap A \neq \emptyset$ y $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap B \neq \emptyset$, por lo que $\mathbf{x} \in \overline{A}$ y $\mathbf{x} \in \overline{B}$, es decir $\mathbf{x} \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Viceversa, sea $\mathbf{x} \in \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\delta > 0$, entonces $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap A \neq \emptyset$ y $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap B \neq \emptyset$ implican $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, es decir $\mathbf{x} \in \overline{A \cup B}$.

Vemos la segunda contención: Sea $\mathbf{x} \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dada cualquier bola de radio positivo δ, $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap A \neq \emptyset$ y $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap A \neq \emptyset$ de donde $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ es decir $\mathbf{x} \in \overline{A \cap B}$. Para ver que la igualdad no es cierta en general, condiere $A = [0, 1)$, $B = (1, 2]$ entonces $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, entanto que $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$. □

Observación 10. Para hablar del límite de una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto $\mathbf{x}$, se necesita evaluar la función en puntoa arbitrariamente cercanos a $\mathbf{x}$, sin posiblemente tener que evaluar en $\mathbf{x}$, o sea, $B'(\mathbf{x}, \delta) \cap D$ debe ser no vacío para cualquier $\delta > 0$ y $\mathbf{x}$ deberá ser punto interior de D.

Existe una dualidad entre conjuntos abiertos y cerrados, la cual se basa en la siguiente propiedad

$$\boxed{B(\mathbf{x}, \delta) \cap F = \emptyset \Longleftrightarrow B(\mathbf{x}, \delta) \subset F^c}$$

Proposición 16. *Un conjunto F es cerrado si y solo si F^c es abierto.*

Demostración.
Supongamos que F es cerrado y sea $\mathbf{x} \in F^c$, entonces $\mathbf{x}$ no es punto de acumulación, luego existe $\delta_0 > 0$ con la propiedad $B'(\mathbf{x}, \delta_0) \cap F = \emptyset$, es decir $B'(\mathbf{x}, \delta_0) \subset F^c$. Como $\mathbf{x} \notin F$, también $B(\mathbf{x}, \delta_0) \subset F^c$ es decir F^c es abierto.

Viceversa, supongamos que F^c sea abierto y sea $\mathbf{x}$ un punto de acumulación de F, Si $\mathbf{x} \notin F$, entonces $\mathbf{x} \in F^c$. En tal caso, por ser F^c abierto, existiría una bola $B(\mathbf{x}, \delta) \subset F^c$ y $\mathbf{x}$ no sería punto de acumulación de F, por lo tanto $\mathbf{x} \in F$ y F es cerrado. □

Ejemplo 17. Toda bola abierta (cerrada) es un conjunto abierto (cerrado).

En efecto, probemos que $B(\mathbf{x}, \delta)$ es abierto. Si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$ queremos encontrar $\delta' > 0$ con la propiedad $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < \delta' \Longrightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta$. Estimemos

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < \delta$$

sugiere tomar

$$d(\mathbf{y},\mathbf{z}) < \delta - d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta'.$$

Precisemos: como $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta$, entonces $\delta' = \delta - d(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$, luego si $d(\mathbf{y},\mathbf{z}) < \delta'$ entonces

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}) < d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta - d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta.$$

Veamos ahora que $B[\mathbf{x},\delta]$ es cerrado. Oberve que su punto de acumulación lo constituyen $B(\mathbf{x},\delta)$ y $\partial B(\mathbf{x},\delta) \equiv \{\mathbf{y} \mid d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta\}$. En efecto, sea $\mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{x},\delta)$ entonces $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta$. Consideramos cualquier bola $B'(\mathbf{y},\epsilon)$ entonces a lo largo del segmento abierto, $\mathbf{z}_t = t\mathbf{y} + (1-t)x$, $0 < t < 1$

$$d(\mathbf{y},\mathbf{z}_t) = |1-t|||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| < \epsilon \tag{1.4}$$

si $t < 1, t \approx 1$; por otro lado

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z}_t) = ||\mathbf{x} - t\mathbf{y} - (1-t)x|| = |t|||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| < ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| < \delta$$

es decir para t suficientemente cercano a 1, $z_t \in B'(\mathbf{y},\epsilon) \cap B(\mathbf{x},\delta)$ por lo que $\mathbf{y}$ es punto de acumulación de $B(\mathbf{x},\delta)$. Por lo tanto $B[\mathbf{x},\delta]$ es cerrado.

Observación 11. Consideremos ahora el rayo z_t, $t > 1$, $t \approx 1$. Por (1.4) $\mathbf{z}_t$ está en $B(\mathbf{y},\epsilon)$ para t cercano a 1. en tanto que

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z}_t) = ||\mathbf{x} - t\mathbf{y} - (1-t)x|| = |t|||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| > ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| > \delta$$

luego también, $\mathbf{z}_t \in B(\mathbf{x},\delta)^c$, es decir $\mathbf{z}_t \in B'(\mathbf{y},\epsilon) \cap B(\mathbf{x},\delta)^c$ y $\mathbf{y}$ es también punto de acumulación de $B(\mathbf{x},\delta)$. Diremos entonces que $\mathbf{y}$ es un *punto frontera*

Definición 21. *La frontera de un conjunto D es*

$$\partial D = \{\mathbf{y} \mid \forall \epsilon > 0 \quad B'(\mathbf{y},\delta) \cap D \neq \emptyset \ y \ B'(\mathbf{y},\delta) \cap D^c \neq \emptyset\}$$

Equivalentemente $\mathbf{y}$ *es punto de acumulación de D y de su complemento.*

Finalizamos este capítulo mencionando el teorema fundamental de la topología de los espacios de dimensión finita.

Definición 22. *Dos normas ν_1, ν_2 en $\mathbb{R}^n$ se dicen equivalentes, si existen números $\alpha, \beta > 0$ tales que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se satisface*

$$\alpha\nu_1(\mathbf{x}) \leq \nu_2(\mathbf{x}) \leq \beta\nu_1(\mathbf{x})$$

Observe que la relación así definida es simétrica, pues efectivamente, la desigualda anterior es equivalente a

$$\frac{1}{\beta}\nu_2(\mathbf{x}) \leq \nu_1(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{\alpha}\nu_2(\mathbf{x}).$$

También, si ν_1, ν_2 son normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ entonces toda bola abierta según la norma ν_1 es también una bola abierta según la norma ν_2 con el mismo centro. En efecto, sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ entonces

$$B_{\nu_1}(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \nu_1(\mathbf{y}-\mathbf{x}) < \delta\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \nu_2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) < \frac{\delta}{\alpha}\} = B_{\nu_2}(\mathbf{x}, \frac{\delta}{\alpha})$$

En particular

Teorema 1.4.1. *Dos normas equivalentes definen la misma topología en $\mathbb{R}^n$.*

La demostración del siguiente resultado será pospuesto para más adelante

Teorema 1.4.2. *Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes*

Demostremos sin embargo el siguiente resultado más débil: Toda norma ν es subordinada a la norma–1: En efecto, sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las funciones coordenadas, entonces

$$\nu(\mathbf{x}) = \nu(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\nu(\mathbf{x}_i) \leq K \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = K||\mathbf{x}||_1$$

donde $K = \max\{\nu(\mathbf{x}_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Capítulo 2

Propiedades topológicas de los conjuntos

En esta sección introducimos las ideas de densidad, conexidad y compacidad de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Conexidad

Definición 23. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice* disconexo *si A es la unión ajena de conjuntos no vacios abiertos relativos a A. Un conjunto se dice conexo si no es disconexo.*

Ejemplo 18. El intervalo abierto (a, b) es conexo.

Proposición 17. *1.](a)] Si A es conexo y es x es punto de acumulación de A entonces $A \cup \{p\}$ es conexo.*

(b) Si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conexos y $\cap_{i \in I} G_i \neq \emptyset$ entonces $\cup_{i \in I} G_i$ es conexo.

(c) Si A es conexo entonces $\overline{A}$ es conexo.

Ejemplo 19. Los intervalos $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ son conexos.

Proposición 18. *Los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son intervalos.*

2.2 Compacidad

Capítulo 3

Convergencia y continuidad

En este capítulo introducimos el concepto convergencia de sucesiones de en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$ y continuidad tanto local como global. En el siguiente capítulo veremos como la conjunción de propiedades de continuidad junto con propiedades topológicas del dominio como conexidad, compacidad nos dan los resultados más fuertes del Análisis.

3.1 Convergencia

Una sucesión (x_n) es una regla que permite asociar a cada número natural n un real x_n. Formalmente, no es sino una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Conviene tener cierta flexibilidad en la notación y convenimos que las sucesiones se comienzan a contar desde algún número finito conveniente ya sea cero o 1, en cuyo caso esribiremos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o bien $(x_n)_{n=k}^{\infty}$.

Definición 24. *Una sucesión (x_n) se dice convergente a $l \in \mathbb{R}$ si para todo número positivo ϵ sucede que $|x_n - l| < \epsilon$ para n suficientemente grande. En otras palabras, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|x_n - l| < \epsilon$*

Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \qquad \text{o bien} \qquad x_n \to l$$

si la sucesión (x_n) converge a l

Ejemplo 20. La sucesión dada por $x_n = 1/n$ converge a 0 ya que

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

Luego dado $\epsilon > 0$ basta tomar $N > 1/\epsilon$ y natural. Así, si $n > N$ entonces $n > N > 1/\epsilon$ que implica $1/n < \epsilon$.

Una sucesión convergente solo puede tener un límite

Proposición 19. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *y* $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ *entonces* $l = m$.

Demostración.
Si $l \neq m$ podemos suponer que $l > m$. Sea $\epsilon = l - m > 0$ luego existe N_1, N_2 naturales tales que si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - l| < \epsilon/2$, y si $n \geq N_2$ entonces $|x_n - m| < \epsilon/2$. Por lo tanto si $n > \max(N_1, N - 2)$ sucede que

$$l - m = |l - m| \leq |x_n - l| + |x_n - m| < \epsilon = l - m$$

lo cual es una contradicción. □

Decimos que la sucesión (x_n) es *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para toda n. Intuitivamente, una sucesión convergente debe acumularse alrededor de su límite y casi todos los términos de la sucesión estarán contenidos en una bola de radio fijo quedando fuera de ellos un número finito que pueden acotarse en valor absoluto. En resumen

Proposición 20. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Para $\epsilon = 1$ existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - l| < 1$ de aquí que $|x_n| < l + \epsilon$ para $n \geq N$, si $K = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|)$ entonces $|x_n| \leq \max(1 + \epsilon, K)$ para toda n. □

Es claro que el recíproco no es cierto en general. La sucesión $x_n = (-1)^n$ es acotada pero no es convergente.

Consideremos ahora sucesiónes en $\mathbb{R}^p$. Para ello consideremos una norma ν en $\mathbb{R}^p$.

Definición 25. *Una sucesión* $(\mathbf{x}_n)$ *en* $\mathbb{R}^p$ *se dice convergente a* $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ *si para todo número positivo* ϵ *sucede que* $\nu(\mathbf{x}_n - \mathbf{l}) < \epsilon$ *para* n *suficientemente grande. En otras palabras, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N$ *entonces* $\nu(\mathbf{x}_n - \mathbf{l})| < \epsilon$

Como es de esperarse la noción de convergencia no depende de la norma en $\mathbb{R}^p$ ya que si ν_1, ν_2 son normas en $\mathbb{R}^p$ entonces son equivalentes, por lo que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha\nu_1 \leq \nu_2 \leq \beta\nu_1$ de modo que

$$\nu_1(\mathbf{x}_n - \mathbf{l}) < \epsilon \Longrightarrow \nu_2(\mathbf{x}_n - \mathbf{l}) < \beta\epsilon \quad \text{y} \quad \nu_2(\mathbf{x}_n - \mathbf{l}) < \epsilon \Longrightarrow \nu_1(\mathbf{x}_n - \mathbf{l}) < \alpha^{-1}\epsilon$$

Si $(\mathbf{x}_n)$ es una sucesión en $\mathbb{R}^p$ están definidas las sucesiones componentes $(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn})$. Se tiene entonces

Proposición 21. *La sucesión* $(\mathbf{x}_n)$ *converge a* $\mathbf{l} = (l_1, k_2, \ldots, l_p)$ *is y solo si las* p *sucesiones reales* x_{jn} *convergen a* l_j *para* $j = 1, 2, \ldots, p$.

Suponga que $(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{l}$ entonces

$$|x_{jn} - l_j| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{l}||$$

lo cual muestra que $x_{jn} \to l_j$. Supongamos ahora que $x_{jn} \to l_j$ para $j = 1, 2, \ldots, p$, luego existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces

$$|x_{jn} - l_j| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{p}}$$

luego usando la norma euclideana

$$||\mathbf{x}_n - \mathbf{l}||^2 = \sum_{j=1}^{p} |x_{jn} - l_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{\epsilon}{p} = \epsilon.$$

□

Por el resultado anterior es suficiente considerar sucesiones de números reales.

Si (x_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ y $n_1 < n_2 < \cdots$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales podemos considerar la sucesión construída a partir de la primera $u_k = x_{n_k}$ que denotaremos simplemente por (x_{n_k}) la cual se dice una *subsucesión* de (x_n). Formalmente n_k, $k = 1, 2, \ldots$ no es sino una sucesión creciente $n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y vista la sucesión original como una función $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, una subsucesión no es sino una composición $\mathbf{x} \circ n$ con la regla $x \circ n(k) = x_{n_k}$.

Lema 1. *Si* (x_n) *converge a* l *entonces cualquier subsucesión converge* l.

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$, luego existe N natural tal que si $n \geq N$ entonces $||x_n - l|| < \epsilon$. Si ahora (x_{n_k}) es una subsucesión entonces si $k \geq N$ entonces $n_k \geq n_N$ por ser n_k creciente, pero $n_N \geq N$ (¿Por qué?) luego $n_k > N$ y por lo tanto $||x_{n_k} - l|| < \epsilon$. □

El siguiente resultado nos dice que para la convergencia no importa si se omite un número finito de términos

Corolario 1. *Si Si* (x_n) *congerve a* l *y* K *es cualquier natural entonces la sucesión* $(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots)$ *converge a* l.

Las siguiente propiedad es muy útil para probar la *no convergencia*

Proposición 22. *Si* (x_n) *es una sucesión en* $\mathbb{R}$ *que no converge a* l *entonces existe una vecindad* V *de* l *y una subsucesión* (x_{n_k}) *tal que ninguno de sus términos está contenido en* V.

En cuanto a las operaciones algebraicas entre sucesiones están bien definidas la suma, resta, producto de dos sucesiones (x_n), (y_n) término a término:

$$(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n), \quad (x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n)$$

Si además $y_n \neq 0$ para toda n está bien definida

$$(x_n)/(y_n) = (x_n/y_n).$$

Si $y_n \neq 0$ para n suficientemente grande entonces $(x_n)/(y_n)$ está bien definida para n grande.

Teorema 3.1.1. *Si* $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$ *entonces*

$$(x_n) \pm (y_n) \to x \pm y, \qquad (x_n)(y_n) \to xy$$

Si además $y \neq 0$ *entonces*

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} \to \frac{x}{y}, \qquad (y_n^{-1}) \to y^{-1}$$

Si $(c_n) \to c$ *y* $(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{l}$ *entonces* $(c_n)(\mathbf{x}_n) \to c\mathbf{l}$.

3.1.1 Criterios de convergencia

En general probar que una sucesión es convergente es menos difícil que probar que converge a un límite. En esta sección veremos algunos criterios para probar convergencia.

Proposición 23. *Sea* (x_n) *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *monótona creciente*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots,$$

entonces (x_n) *es convergente si y solo si es acotada superiormente. En tal caso* $x_n \to \sup\{x_n\}$.

Demostración.
Ya hemos visto que si la sucesión es convergente entonces es acotada. Supongamos que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente. Sea $l = \sup\{x_n\}$. Por definición de supremo, dado $\epsilon > 0$ existe x_N tal que $l - \epsilon < x_N \leq l$ y como $l < l + \epsilon$ entonces $l - \epsilon < x_N < l + \epsilon$, y como la sucesión es monótona, si $n \geq N$ entonces $x_N \leq x_n$ lo cual implica que $l - \epsilon < x_N \leq x_n \leq l < l + \epsilon$, es decir $|x_n - l| < \epsilon$. □

Existe un resultado análogo cuando se tiene una sucesión monótona decreciente.

En la demostración del siguiente teorema es conveniente distinguir entre la sucesión $(\mathbf{x}_n)$ y el conjunto formado por los términos de la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$. Por ejemplo los términos de la sucesión $x_n = (-1)^n$ son $\{-1, 1\}$ que es finito.

Teorema 3.1.2 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión en $\mathbb{R}^p$ acotada contiene una subsucesión convergente.*

Demostración.
Si los términos de la sucesión forman un conjunto finito, necesariamente x_n es constante para una infinidad de índices n con lo cual puede formarse una subsucesión constante y por lo tanto convergente, así, supongamos que existe una infinidad de términos. Como la sucesión es acotada existe un rectángulo

$$R_0 = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \cdots [a_p, b_p]$$

que contiene a todos lo términos de la sucesión. Sea $d(R_0) = \max(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$ al que llamaremo su diámetro. Dividamos el rectángulo por los puntos medios en 2^p subrectángulos. Por lo menos uno de ellos contiene un número finito de términos (en caso contrario habría un número total finito). Sea éste R_1, luego $d(R_1) = \frac{1}{2} d(R_0)$. Elija n_1 tal que $x_{n_1} \in R_1$. Por inducción suponga que se han elegido rectángulos R_k por el proceso de subdivisión y se han elegido $x_{n_k} \in R_k$ y $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ con $d(R_k) < \frac{1}{2^k} d(R_0)$ y en R_k hay una infinidad de términos. Al subdividir R_k en 2^p rectángulos al menos uno de ellos contiene una infinidad distintos de x_{n_k} elija entonces $n_{k+1} > n_k$ con la propiedad de que $x_{n_{k+1}} \in R_{k+1}$. Por la propiedad de los intervalos anidados se sigue que $\cap_{k=0}^{\infty} R_k \neq \emptyset$ sea $\mathbf{l}$ en dicha intersección, veremos que la subsucesión asíconstruída converge a $\mathbf{l}$.

□

El siguiente criterio es uno de los más útiles para probar la convergencia de una sucesión sin conocer el límite.

Definición 26. *Una sucesión* (x_n) *en* $\mathbb{R}$ *se dice de Cauchy, si para todo número positivo* ϵ *existe* N *natural tal que si* $n, m \geq N$ *entonces* $|x_n - x_m| < \epsilon$*.*

Es evidente que toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco apela a la completez de los número reales. En la búsqueda de un recíproco probemos primero un resultado parcial.

Proposición 24. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración.
Porque para $\epsilon = 1$ existe N natural tal que si $n, m \geq N$ entonces $|x_n - x_N| < 1$ o bien $|x_n| \leq |x_N| + 1$, finalmente

$$|x_n| \leq \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |x_N| + 1).$$

□

Lema 2. *Si* (x_n) *es de Cauchy y* (x_{n_k}) *es alguna subsucesión convergente a* l *entonces la sucesión* (x_n) *tiende a* l*.*

Demostración.
Tenemos

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l|$$

Dado $\epsilon > 0$ sean N, K naturales tales que $|x_n - x_m| < \epsilon$ par $n, m \geq N$ y $|x_{n_k} - l| < \epsilon$ para $k \geq K$. Por lo tanto tomando $n \geq N$, escoja $k \geq K$ y x_{n_k} luego de la desigualdad anterior

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < 2\epsilon.$$

□

La sucesión así construída es convergente ya que

3.2 Continuidad local

En la sección §1 de dió la definición del límite de una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en base a sendas normas en el dominio y contradominio. De acuerdo al teorema fundamental (**??**) todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, por ello vamos a reformular la definición de continuidad de una función en términos de vecindades.

Definición 27. *Sea* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in D$. *Decimos que* f *es continua en* $\mathbf{x} \in D$, *si para toda vecindad* V *de* $f(\mathbf{x})$ *existe una vecindad* U *de* $\mathbf{x}$ *tal que* $f(U \cap D) \subseteq V$.

A menudo encontraremos conjuntos de la forma $U \cap D$ donde U es una vecindad de $\mathbf{x} \in D$, o un conjunto abierto o cerrado en $\mathbb{R}^n$. Hablamos entonces de propiedades *relativas a* D.

Definición 28. *Sea* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto arbitrario. Un subconjunto* A *de* D *se dice:*

(a) abierto relativo a D *si existe un abierto* U *en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $A = U \cap D$.

(b) cerrado relativo a D *si existe un cerrado* E *en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $A = E \cap D$.

(c) una vecindad de $\mathbf{x} \in D$ relativa a D *si existe una vecindad* N *de* $\mathbf{x}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $A = N \cap D$.

Ejemplo 21. Consideremos en $\mathbb{R}$, $D = [0, 1]$. El conjunto $U = [0, 1/2)$ no es abierto en $\mathbb{R}$ pero es abierto relativo a $[0, 1]$ pues $[0, 1/2) = (-1, 1/2) \cap [0, 1]$, por ejemplo, aunque también $[0, 1/2) = (-1/2, 1/2) \cap [0, 1]$. Cualquier conjunto de la forma $[0, \delta)$ es una vecindad de 0 que además es abierta relativa a D.

Ejemplo 22. Consideremos en $\mathbb{R}$, $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$. El conjunto $U = (-1/2, 1/2)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y es abierto relativo a D. El conjunto $[0, 1)$ no es abierto en $\mathbb{R}$ pero es abierto relativo a D. El conjunto $F = [-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$ es cerraddo relativo a D ya que $[-1/2, 0) \cup (0, 1/2] = [-1/2, 1/2] \cap D$.

La siguiente proposición caracteriza la continuidad cuando el punto $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación.

Proposición 25. *Si* x *es punto de acumulación de* D *entonces* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* $\mathbf{x} \in D$ *si y solo si* $\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$.

La siguiente es una definición equivalente de continuidad en un punto.

Proposición 26. $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continua en* $\mathbf{x} \in D$ *si y solo si para toda sucesión* $(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{x}$ *sucede que* $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$.

Notación Denotemos en lo sucesivo $\overline{n} = \{1, 2 \ldots, \}$.

Ejemplo 23. Sea $i \in \overline{n}$, $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la i–ésima proyección: $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$. Entonces π_i es continua en cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, porque

$$|\pi_i(\mathbf{x}) - \pi_i(\mathbf{y})| = |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2} = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_{(2)}$$

Ejemplo 24. Sea $i \in \overline{n}$, δ_i el i–ésimo vector básico canónico. Observe que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

La i–ésima inyección $\theta_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se define como $\theta_i(x_i) = x_i \delta_i$. Entonces θ_i es continua en cualquier $x_i \in \mathbb{R}$, porque

$$||\theta_i(y_i) - \theta_i(x_i)||_{(2)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}(y_j - x_j)^2} = |x_i - y_i|.$$

La relación entre proyecciones e inyecciones es la siguiente: Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \theta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta(\pi_i(\mathbf{x}))$$

o bien, si $I_{\mathbb{R}^n} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota la función identidad en $\mathbb{R}^n$,

$$I_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \circ \pi_i$$

En particular, si $g \colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entonces componiendo a la izquierda por g la identidad anterior,

$$g = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \circ g_i \tag{3.1}$$

donde $g_i = \pi_i \circ g \colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{n}$ son las funciones componentes. Una pregunta natural es cómo caracterizar la continuidad de g en términos de la continuidad de sus funciones componentes g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

El siguiente resultado es una de las herramientas más útiles para determinar si una función es continua.

Proposición 27. *Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $\mathbf{x} \in D$, $g\colon E \subseteq\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ continua en $\mathbf{y} \in E$. Si $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, entonces $g \circ f\colon f^{-1}(E) \cap D \to \mathbb{R}^k$ es continua en $\mathbf{x}$. Si además $\mathbf{x}$ es punto de acumulación de $f^{-1}(E) \cap D$, $\mathbf{y}$ es punto de acumulación de E entonces* $\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{x}} g(f(\mathbf{u})) = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{y}} g(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x}))$

En particular, una función $g\colon D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, si y sólo si cada una de sus funciones componentes $g_i = \pi_i \circ g$ son continuas ahí. En efecto, siendo g continua en $\mathbf{x}$ se sigue que cada $f_i = \pi \circ f$ es composición de funciones continuas, y si cada una de las componentes f_i es continua, por la identidad (3.1), f es continua.

Ejemplo 25. La función $g(x, y, z) = (xy, x^2 - y^2, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ es una función continua en todo punto de su dominio natural:

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ya que cada una de las funciones componentes es continua: g_1 y g_2 son funciones polinomiales, g_3 es composición de una función polinomial con la función raíz cuadrada.

La función $g(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en todo su dominio natural

$$D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0\}$$

como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$ (¿por qué?) se puede *extender* a g de manera continua a (x,y)=(0,0) definiendo $g(0, 0) = 0$.

3.3 Continuidad global

Definición 29. *Una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice continua en D si es continua en cada punto $\mathbf{x} \in D$.*

Hablamos de *continuidad global* de la función en D.

Proposición 28. *Para una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) f es continua en D.

(b) Para todo abierto V de $\mathbb{R}^n$ $f^{-1}(V)$ es abierto relativo a D.

(c) Para todo cerrado F de $\mathbb{R}^n$ $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a D.

(d) Para todo $A \subseteq D$, sucede que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Demostración.
Suponga que f es continua en D y V abierto en $\mathbb{R}^n$, sea $U = f^{-1}(V)$; probemos que U es abierto en D. Si $\mathbf{x} \in U$, como f es continua en $\mathbf{x}$ y V es vecindad de $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ entonces existe una vecindad $U_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^m$ que podemos suponer abierta relativa a D, tal que $f(U_{\mathbf{x}}) \subseteq V$ de ahí que $U_{\mathbf{x}} \subset f^{-1}(V)$. Probemos que $U = \bigcup_{\mathbf{x}\in U} U_{\mathbf{x}}$, así U será abierto por ser unión de abiertos. Naturalmente $U \subset \bigcup_{\mathbf{x}\in U} U_{\mathbf{x}}$, por otro lado $U_{\mathbf{x}} \subset f^{-1}(V) = U$ de donde $\bigcup_{\mathbf{x}\in U} U_{\mathbf{x}} \subset U$ y hemos terminado. Probemos que (b) implica (c). Sea F cerrado en $\mathbb{R}^n$, luego $Y - F$ es abierto; por (b) y (B.4), $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ y es abierto, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado.

□

Observación 12. La imagen de un abierto, bajo una función continua, no es necesariamente abierto. Por ejemplo en $\mathbb{R}$, si $f(x) = x^2$, $f(-1, 1) = [0, 1)$.

El siguiente resultado muestra que las operaciones entre funciones continuas es también continua

Proposición 29. *Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $k\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continuas en D entonces son continuas en D:*

$$f \pm g, \qquad kf, \quad \frac{f}{k}$$

esta última, siempre que $k(\mathbf{x}) \neq 0$ para toda $\mathbf{x} \in D$. Si además $h\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ es continua en D' entonces

$$h \circ f$$

es continua en $D \cap f^{-1}(U)$.

3.4 Continiudad uniforme

Con el fin de apreciar el concepto de *continuidad uniforme* vamos a parafrasear la definición de continudad global (29) en los siguientes términos

Proposición 30. *Una funciń $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en D si y solo si: Para cada $\mathbf{x} \in D$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$||\mathbf{x}' - \mathbf{x}|| < \delta \quad \textit{implica} \quad ||f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})|| < \delta$$

Hacemos notar que la cantidad δ depende en general de $\mathbf{x}$ y de ϵ como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 26. Mostrar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ queremos hacer

$$|x'^2 - x^2| = |x' + x||x' - x| < \epsilon$$

siempre que $|x' - x| < \delta$. Tenemos que $|x' - x| < \delta$ implica $|x'| < |x| + \delta$ y por la desigulad del triángulo $|x' + x| \leq |x'| + |x| < 2|x| + \delta$, de donde

$$|x' + x||x' - x| < (2|x| + \delta)\delta$$

Si ahora queremos que $(2|x| + \delta)\delta < \epsilon$, resolvemos primero la igualdad cuya solución es $\delta_0 = |x| + \sqrt{|x| + \epsilon}$. Basta entonces tomar $\delta < \delta_0$ de donde es evidente que δ depende de $\mathbf{x}$ y de ϵ.

Cuando la elección de δ depende tan sólo de ϵ pero no de $\mathbf{x}$ hablamos de *continuidad uniforme*. Esta propiedad se refleja en la siguiente definición en el orden de los cuantificadores

Proposición 31. *Una función $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en D si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$||\mathbf{x}' - \mathbf{x}|| < \delta \quad \textit{implica} \quad ||f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})|| < \delta$$

Ejemplo 27. Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces es uniformemente continua.

En efecto si δ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ es la base canónica en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i\delta_i$, $\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^m x_i'\delta_i$ entonces

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})|| &= ||f(\mathbf{x}' - \mathbf{x})|| \\ &= ||\sum_{i=1}^m (x_i' - x_i) f(\delta_i)|| \leq \sum_{i=1}^m |x_i' - x_i| ||f(\delta_i)|| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |x_i' - x_i| M = M||\mathbf{x}' - \mathbf{x}||_{(1)} \end{aligned}$$

donde M es una cota superior del conjunto finito $\{||f(\delta_i)||, i = 1, 2, \ldots, m\}$. En la última igualdad hemos usado la definición de la norma 1 $\square$

Apéndice

En esta sección revisaremos algunos conceptos de la teoría de conjuntos que son de utilidad en el Análisis.

3.4.1 Imagen inversa, imagen directa

Sea $f\colon X \to Y$ una función. En lo sucesivo $A, B, C, \ldots$ denotará a subconjuntos de X y $U, V, W, \ldots$ a subconjuntos de Y.

Definición 30. *La imagen de A bajo f es*

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ existe } x \in X \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Proposición 32. *Son ciertas las siguientes afirmaciones*

(A.1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(A.2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cup f(B)$.

(A.3) Si $A \subset B$ *entonces* $f(A) \subset f(B)$.

(A.4) Si $A \subset B \subset X$ *entonces* $f(B - A) \supset f(B) - f(A)$.

La igualdad no es cierta en general para (b). Como contraejemplo considere la función real $y = x^2$, $A = [-1, 0], B = [0, 1]$ entonces $f(A \cap B) = f(0) = 0$ en tanto que $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$.

Definición 31. *La imagen inversa de U bajo f es*

$$f^{-1}(U) = \{\mathbf{x} \in X \mid f(x) \in U\}.$$

$A = f^{-1}(U)$ *si y sólo si* $f(A) = V$.

Proposición 33. *Son ciertas las siguientes afirmaciones*

(B.1) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(B.2) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(B.3) Si $U \subset V$ *entonces* $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

(B.4) Si $A \subset B \subset X$ *entonces* $f^{-1}(B - A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$.

Observe que no hay relación general entre $f(X - A)$ y $Y - f(A)$

Proposición 34. *Además*

(C.1) $f(f^{-1}(U)) = U \cap f(X)$, $f^{-1}(f(A) = A$