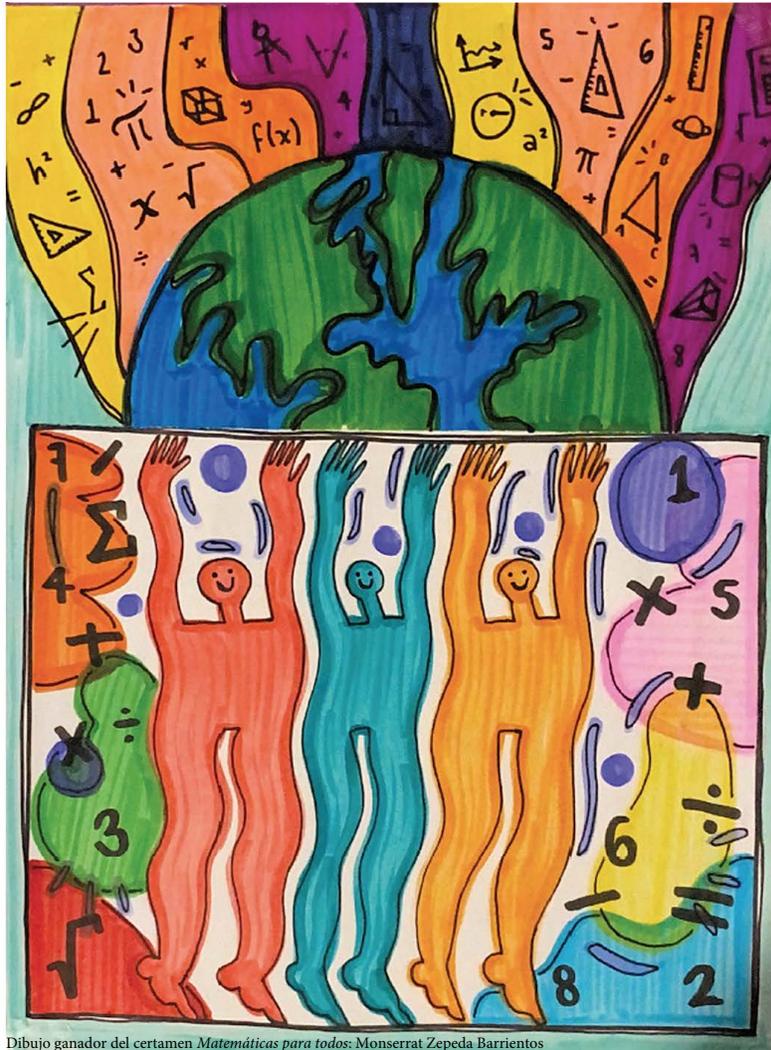


mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

www.doi.org/1024275/uami/dcbi/mix/2023

ISSN: 2007-7874



Dibujó ganador del certamen *Matemáticas para todos*: Monserrat Zepeda Barrientos

Revista de divulgación e investigación del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, dedicada a promover las ideas y la creación de todos aquellos interesados en el quehacer matemático.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Directorio

José Antonio de los Reyes Heredia
Rector General

Verónica Medina Bañuelos
Rectora Unidad Iztapalapa.

Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas
e Ingeniería, UAM-Iztapalapa.

Raúl Montes de Oca Machorro
Jefe del Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa.

Coordinador Editorial
Mario Pineda Ruelas
mpr@xanum.uam.mx

Comité Editorial

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
stbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
celli@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@cimat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

Gustavo Izquierdo Buenrostro
iubg@xanum.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@cimat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

Diseño logo Michael Rivera Arce
Dibujo portada Monserrat Zepeda Barrientos

MIXBA'AL. Vol. 14, No. 1, enero-diciembre de 2023, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: <http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al/>

Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Edificio AT, tercer piso, Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 7 de agosto de 2023. Tamaño del archivo 21.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

A LOS AUTORES

MIXBA'AL, Revista Metropolitana de Matemáticas, es una revista de publicación anual de divulgación e investigación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Los artículos sometidos, pueden ser trabajos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas, por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos; artículos panorámicos sobre un área de investigación; la presentación distinta de algún tema vinculado a la docencia; aplicaciones o aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español impecable, aunque eventualmente podrán aceptarse trabajos en inglés. Éstos deben ser enviados a cualquiera de los editores en formato pdf y en un plazo no mayor a dos semanas, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista; es caso que así sea, se enviará a arbitraje.

Cuando un trabajo reciba arbitraje favorable, se le comunicará al autor y en un plazo no mayor a tres semanas, deberá reenviarlo al editor responsable, atendiendo las sugerencias del árbitro y en el formato oficial que la revista le proporcionará. El trabajo debe estar organizado de la siguiente forma: título, resumen no mayor a 100 palabras, clasificación de la AMS 2020, palabras clave, introducción y en seguida el desarrollo del mismo. Para someter un artículo a la revista, es recomendable enviarlo en el formato oficial de **MIXBA'AL**.

CONTENIDO

- 7 *El problema del barrendero*
Héctor A. Chang-Lara
- 27 *Muchos juegan... ¡yo también quiero jugar!*
Raúl Montes de Oca
- 37 *¿Cómo modelar una población?*
Josué Manik Nava Sedeño
- 53 *Recollements de categorías trianguladas*
Valente Santiago Vargas
- 77 *Modelos ocultos de Markov: una aplicación de estimación Bayesiana para redes de tiempo financieras*
Lizbeth Naranjo Albarrán y Luz J. Rodríguez Esparza
- 101 *Convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier*
Fernando Brambila Paz y Luis A. Díaz Leal Merino
- 113 *Ceros de polinomios aleatorios trigonométricos*
Verania Hernández Orgaz y Liliana Peralta
- 133 *Formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital*
René Benítez López
- 143 *Elementos matemáticos de la mecánica cuántica*
Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada Batalla, Josué I. Rios Cangas



EL PROBLEMA DEL BARRENDERO

HÉCTOR A. CHANG-LARA

RESUMEN. Analizamos una versión discreta del método de balayage propuesto por Hermann Schwarz y rigurosamente demostrado por Henri Poincaré a finales del siglo diecinueve para la resolución de la ecuación de Laplace.

1. UN JUEGO PARA COMENZAR

Para el juego del barrendero necesitamos papel, lápiz, borrador y una calculadora. Comienza dibujando un tablero de dimensiones dos por tres como en la Figura 1. Inicialmente hay un montoncito de arena en la casilla superior izquierda y un bote de basura en la casilla inferior derecha. Te aconsejo que no dibujes el montoncito de arena, pues esto irá cambiando durante el juego. Tampoco necesitas arena de verdad o un bote, la idea es que con la ayuda de la calculadora iremos registrando en el papel como irá cambiando la cantidad de arena en el juego a medida que este transcurre.

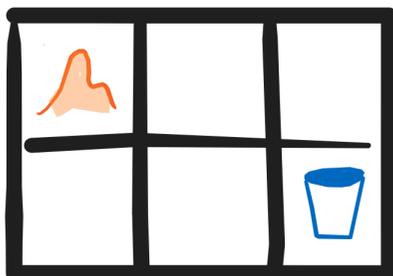


FIGURA 1. El tablero y su configuración inicial

El objetivo es barrer tanta arena como sea posible en el bote, para esto debes escoger en una serie de turnos una de las casillas del tablero y barrerla. Barrer una casilla significa repartir la arena que en ella se encuentra en partes iguales entre sus **cuatro** posiciones adyacentes (arriba, abajo, izquierda y derecha). Ten en cuenta que algunas de ellas se salen del tablero, esta será arena que no podrás recuperar. Por ejemplo, la primera jugada (forzosamente en la esquina superior izquierda) se ve como en la Figura 2.

El reto al que te invito con este rompecabezas es el siguiente: Sin importar el número de turnos que te tardes, ¿cuánta arena puedes meter en el bote? Juega un poco antes de seguir leyendo.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00-01, 00-02, 00A08, 00A09, 00A69, 01A55.

Palabras clave. Laplaciano discreto, Método de balayage, Problema de Dirichlet, Núcleo de Poisson.

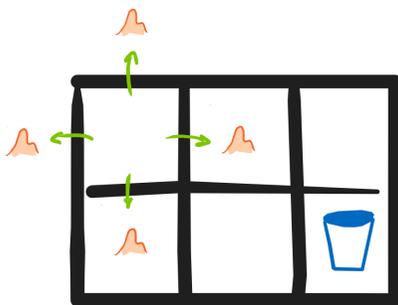


FIGURA 2. La primera jugada

1.1. Algunas estrategias. Para fijar ideas y facilitar la presentación, usaremos la enumeración de las casillas como en la Figura 3 a continuación y diremos que la cantidad inicial de arena es 1. Las unidades (gramos, kilos, centímetros cúbicos, litros, etc.) con las que podríamos medir la arena no son relevantes para nuestro juego y por lo tanto no nos preocuparemos por fijarlas.

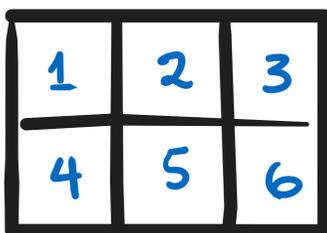


FIGURA 3. Enumeración de las casillas

La primera jugada es forzosamente barrer la casilla 1. Esto manda la mitad de la arena fuera del tablero y deja $1/4$ en las casillas 2 y 4. Luego de esto tenemos distintas posibilidades. Vamos a intentar algunas y ver que logramos.

Nuestra primera estrategia no es muy buena, pero sin embargo es la más sencilla que se nos ocurre y nos permite familiarizarnos con el problema. Proponemos que luego de barrer la casilla 1, procedemos a barrer las casillas 4 y 5 alternadamente, olvidándonos de lo que sucede con el resto del tablero. Ciertamente no es lo mejor que podemos hacer, pues esto siempre va dejando arena en las casillas 1 y 2 las cuales no volveremos a tocar bajo esta propuesta.

Observamos que al comienzo de los turnos pares siempre hay arena en la casilla 4 y la 5 está vacía mientras que al comienzo de los turnos impares (mayores que 1) siempre hay arena en la casilla 5 y la 4 está vacía. Más aún, si denotamos por μ_k la cantidad de arena en la casilla 4 al comienzo del turno $2k$, tenemos lo siguiente: Una vez que barremos la 4, la 5 recibe $\mu_k/4$. Una vez que barremos la 5, tanto el bote como la casilla 4 reciben $\mu_k/16$.

Es decir que $\mu_{k+1} = \mu_k/16$. De forma inductiva descubrimos una fórmula cerrada para μ_k teniendo en cuenta que $\mu_1 = 1/4$

$$\mu_k = \frac{\mu_{k-1}}{16} = \frac{\mu_{k-2}}{16^2} = \dots = \frac{\mu_1}{16^{k-1}} = \frac{1}{4 \times 16^{k-1}}.$$

Cada dos turnos el bote recibe sucesivamente las siguientes cantidades de arena: $\mu_1/16, \mu_2/16, \dots$. Es decir que la cantidad que el bote recibe luego del turno $2k + 1$

está dado por la suma geométrica

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{16} + \frac{\mu_2}{16} + \dots + \frac{\mu_k}{16} &= \frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16^{k-1}} \right), \\ &= \frac{1}{64} \times \frac{1 - \frac{1}{16^k}}{1 - \frac{1}{16}}, \\ &= \frac{1 - \frac{1}{16^k}}{60}. \end{aligned}$$

Notemos que estas sumas son crecientes (lo cual es intuitivo si consideramos que nunca sacamos arena del bote) y tienen como límite $1/60$ cuando $k \rightarrow \infty$. Como resultado de esta serie concluimos que bajo esta estrategia el bote logra recibir por lo menos cualquier cantidad de arena menor que $1/60$, luego de un número suficientemente grande de turnos.

1.1.1. Ejercicio 1. Otra posible estrategia muy sencilla es barrer periódicamente las casillas 1, 2 y 3. Se trata de un caso que podemos analizar de forma similar al anterior y el resultado te lo dejamos como ejercicio. Al final de este artículo encontrarás una sección con las respuestas.

1.2. Simulación. Una vez más, la estrategia en el ejercicio anterior no es óptima, pues va dejando arena en las casillas 4 y 5. Una estrategia que finalmente combina ambas es barrer periódicamente las casillas 1, 2, 3, 4, y 5. Una vez más la cantidad de arena que recibe el bote en este caso debe poder calcularse por medio de una combinación de series geométricas. Sin embargo a estas alturas, y dado que queremos seguir explorando otras estrategias cada vez más complicadas, es sensato que recurramos a una simulación por computadora.

En nuestro programa debemos pensar primero en las variables que deben estar involucradas y como estas interactúan entre sí. Hagamos una lista:

- El turno que indicaremos por k ,
- la distribución de arena al comienzo del turno k en las distintas casillas del tablero. Esto lo denotaremos por $\mu_k(i)$ para $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Las reglas del juego dicen que cuando barremos la casilla 1 en un dado turno k , entonces los valores de μ_{k+1} se definen según

$$\mu_{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, \\ \mu_k(i) + \frac{1}{4}\mu_k(1) & \text{si } i \in \{2, 4\}, \\ \mu_k(i) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si en cambio barremos otra casilla, digamos j , debemos reemplazar la condición en la primera línea ($i = 1$) por $i = j$, y en la segunda línea ($i \in \{2, 4\}$) por las casillas que son adyacentes a j . Por ejemplo, para $j = 2$ se vería en cambio así

$$\mu_{k+1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 2, \\ \mu_k(i) + \frac{1}{4}\mu_k(1) & \text{si } i \in \{1, 3, 5\}, \\ \mu_k(i) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos así con un sencillo ciclo nuestro programa para calcular la arena que recibe el bote cuando barremos periódicamente los nodos 1, 2, 3, 4, y 5. En el siguiente enlace encontrarás una implementación en Python:

<https://colab.research.google.com/drive/1NXb3ZqIz-jKiYc2ARGxHuTSQsL4wCDH3?usp=sharing>

Es muy sencillo tomar este código y modificarlo para ir explorando otras estrategias. Por ejemplo, podríamos ver otra alternativa periódica como 1, 4, 2, 5, 3; ó quizás una completamente aleatoria (ambas implementadas igualmente en el enlace anterior). La sorpresa es que en cualesquiera de estos casos la respuesta parece ser la misma, **¡Incluso para la estrategia aleatoria!**

¿Tiene esto sentido? Si ya has jugado lo suficiente con este modelo sospecharás lo raro que es esta conjetura. Ella sugiere que cuando intentamos barrer todas las casillas, la cantidad de arena que llega al bote es independiente del orden en que estas se hayan barrido. Sin embargo, el modelo que hemos descrito es sensible al orden en que se barren las casillas, por ejemplo observemos lo que sucede en la Figura 4 para dos distintas formas de barrer dos casillas adyacentes. La de arriba deposita más arena en el bote.

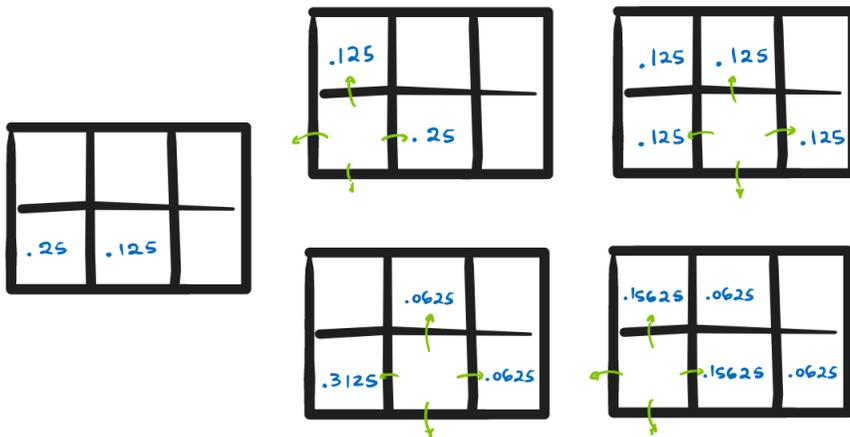


FIGURA 4. El orden de las barridas sí afecta el resultado

El objetivo de este artículo será demostrar la validez de esta conjetura y explorar algunas de sus consecuencias. La idea clave está basada en un principio sencillo y bastante intuitivo (la ley de conservación de la masa) aunque en una primera lectura puede parecer sorprendente su aparición. La presentación está motivada por el método de balayage¹, una técnica sugerida por Hermann Schwarz, y rigurosamente analizada por Henri Poincaré a finales del siglo diecinueve para demostrar la existencia de la ecuación de Laplace con dato de borde fijo [7]. Esperamos así con este breve artículo ofrecer una invitación al análisis de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

2. EL TEOREMA DEL BARRENDERO

Para poder plantear un teorema formal en nuestro problema comenzamos por definir algunos de los ingredientes. Como buenos matemáticos tenemos en mente dar una versión un poco más general.

Modelaremos en primer lugar el tablero usando la retícula \mathbb{Z}^2 con la relación de adyacencia $x \sim y$ cuando $\|x - y\| = 1$. Podemos imaginar que cada uno de los puntos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ no es más que una etiqueta para una casilla cuadrada centrada en (x_1, x_2) de lado 1. Sus casillas adyacentes son las cuatro que son contiguas en las direcciones cardinales, es decir $(x_1 - 1, x_2)$, $(x_1 + 1, x_2)$, $(x_1, x_2 - 1)$, y $(x_1, x_2 + 1)$.

Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ la distribución de arena inicial que buscamos barrer de alguna región $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$. En el juego que encontramos en la introducción el dominio sería el tablero dos por tres menos la casilla 6 donde está el bote, y la distribución de arena

¹Barrer en francés

inicial es aquella que concentra el montoncito en la casilla 1^2

$$(1) \quad \Omega = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\} \quad y \quad \mu = \mathbb{1}_{(0,1)}.$$

Un plan de barridas está dado por una lista de casillas $b_1, b_2, \dots \in \Omega$, las que iremos barriendo en el orden respectivo. Si $\mu_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ denota la distribución de arena luego del k^{mo} turno, se tiene entonces la siguiente fórmula recursiva comenzando de $\mu_0 := \mu$,

$$\mu_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = b_k, \\ \mu_{k-1}(x) + \frac{1}{4}\mu_{k-1}(b_k) & \text{si } x \sim b_k, \\ \mu_{k-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Decimos que el plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Con estas herramientas ya podemos formular nuestro teorema.

TEOREMA 1. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que cualesquiera dos planes $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ y $b'_1, b'_2, \dots \in \Omega$ que barren a μ de Ω satisfacen que los siguientes límites existen y son iguales*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu'_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2.$$

Observemos que los valores de interés para los límites son aquellos donde x está en el complemento de Ω . Por hipótesis ya sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu'_i(x) = 0$ si $x \in \Omega$.

Si aplicamos este resultado al caso dado por nuestro problema original donde Ω y μ están dados por (1) , descubrimos que en el límite el bote recibe una cantidad de arena dada por $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k((2, 0))$. El teorema nos garantiza así que sin importar el plan que se haya usado, y siempre que todas las casillas en Ω terminen limpias, la cantidad de arena en el bote será la misma en el límite. Más aún, también nos dice que la cantidad de arena en cualquiera de las demás casillas por fuera del tablero también son independientes del plan de barridas.

En la demostración de este resultado también veremos una forma práctica para calcular el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ por medio de la solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

2.1. Ley de conservación. Una idea útil es llevar el registro de cuánta arena ha salido de una casilla dada x luego de k turnos. Esto lo podemos modelar de forma precisa definiendo las funciones $u_k : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ tales que $u_0 = 0$, y a partir de $k \geq 1$

$$u_k(x) := \begin{cases} u_{k-1}(x) + \mu_{k-1}(b_k) & \text{si } x = b_k, \\ u_{k-1}(x) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

¿Qué quiere decir esta fórmula? Al principio no hemos barrido ninguna casilla y por lo tanto u_0 es idénticamente nula. En el turno k barremos la casilla b_k y por lo tanto debemos sumar al acumulado previo $u_{k-1}(b_k)$, la cantidad de arena en la casilla b_k al comenzar dicho turno, es decir $\mu_{k-1}(b_k)$. Los demás valores de u_k son exactamente los mismos de u_{k-1} . También pudimos haber escrito la recurrencia usando la función indicadora como

$$u_k := u_{k-1} + \mu_{k-1}(b_k) \mathbb{1}_{b_k}.$$

Observemos que para cualquier plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ se tiene necesariamente que u_k permanece nula en el complemento de Ω .

²Dado $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, denotamos por $\mathbb{1}_S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica o indicadora del conjunto, es decir

$$\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si $S = \{x_0\}$ denotamos por conveniencia $\mathbb{1}_{x_0} := \mathbb{1}_{\{x_0\}}$.

La función u_k nos permite dar una fórmula para la **ley de conservación de masa**: En los primeros k turnos, la arena que entra menos la que sale de una casilla x es justamente la diferencia entre las distribuciones μ_k menos μ_0 en x . Teniendo en cuenta que la arena que entra a x está dada por un cuarto de la arena que sacan sus casillas adyacentes tenemos que

$$\underbrace{\mu_k(x)}_{\text{arena final}} - \underbrace{\mu_0(x)}_{\text{arena inicial}} = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{y \sim x} u_k(y)}_{\text{arena que entra}} - \underbrace{u_k(x)}_{\text{arena que sale}}.$$

Esta identidad puede ser rigurosamente demostrada por un clásico argumento inductivo usando las recursiones que definen a μ_k y u_k .

La expresión en el lado derecho juega un rol protagónico en esta presentación y se conoce como el **Laplaciano discreto**. Lo denotaremos de ahora en adelante usando

$$\Delta u(x) := \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} u(y) - u(x).$$

En otras palabras, la ley de conservación de masa dice que

$$\Delta u_k = \mu_k - \mu.$$

Nótese que también podemos reescribir la recurrencia para μ_k usando el Laplaciano como

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \mu_{k-1}(b_k) \Delta \mathbb{1}_{b_k}.$$

Una propiedad fundamental del Laplaciano es su linealidad. Es decir que satisface el principio de superposición: Dadas las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y las funciones $u, v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v.$$

Volviendo al problema del barrendero, pensemos un poco en las consecuencias que podemos deducir de la ley de conservación, dado que los límites propuestos existen. Asumamos que tenemos un plan que barre a μ de Ω tal que los límites $\mu_k \rightarrow \mu_\infty$ y $u_k \rightarrow u$ están bien definidos en todo \mathbb{Z}^2 (lo cual será parte de la demostración). En el límite recuperamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre Ω , donde recordemos se tiene que $\mu_k \rightarrow 0$,

$$\Delta u = -\mu \text{ en } \Omega.$$

Mientras tanto en el complemento de Ω sabemos automáticamente que $u = 0$, dado que las barridas nunca sacan arena de estas casillas. Lo curioso de este sistema de ecuaciones lineales (para las variables $\{u(x)\}_{x \in \Omega}$) es que a simple vista su formulación pareciera ser independiente del plan de barridas. ¡Esta es la clave de la demostración!

Una vez calculada la función u tenemos que en todo \mathbb{Z}^2 se cumple que

$$\mu_\infty = \mu + \Delta u.$$

Finalmente buscamos concluir que μ_∞ es independiente del plan gracias a que u es de hecho independiente del plan.

2.1.1. Ejercicio 2. En nuestro problema original dado por [\[1\]](#), ¿cuál sería el sistema de ecuaciones? ¿Cómo calculamos finalmente la cantidad de arena que recibe el bote $\mu_\infty((2, 0))$?

2.2. Existencia y unicidad de soluciones. En esta sección analizamos la existencia y unicidad de soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones, conocido como el **problema de Dirichlet** o la **ecuación de Poisson con dato de borde cero**

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dado que los valores de u ya se encuentran fijos en el complemento de Ω , las incógnitas restantes en el sistema consisten de los valores de u en Ω . La ecuación $\Delta u = -\mu$ sobre Ω representa así un sistema lineal de $|\Omega|$ ecuaciones y $|\Omega|$ incógnitas.

Tengamos en cuenta uno de los primeros resultados que aprendemos en álgebra lineal: Sea A una matriz cuadrada. Para que el sistema $Ax = b$ tenga soluciones únicas para cualquier b , basta con demostrar bien sea la existencia de soluciones para cualquier b o la unicidad de las soluciones para algún b (en particular $b = 0$). En otras palabras, A es invertible si y solo si logramos verificar que es inyectiva o sobreyectiva.

Nuestra estrategia consistirá en probar la unicidad, o equivalentemente la inyectividad de la transformación lineal $\Delta : V \rightarrow W$ donde

$$V := \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega\},$$

$$W := \{\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\},$$

son espacios vectoriales, ambos de dimensión $|\Omega|$. Tengamos en cuenta que la inyectividad de Δ es equivalente a decir que si $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

entonces necesariamente $u = 0$ en todo \mathbb{Z}^2 .

La idea para establecer dicha inyectividad consiste en el siguiente resultado conocido como el *principio del mínimo*: Si $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es no-negativa en el complemento de Ω y satisface $\Delta u \leq 0$ en Ω entonces u es necesariamente no-negativa en todas partes. En otras palabras no puede alcanzar un mínimo estrictamente negativo en Ω .

Probablemente ya algunos lectores sospechen la conexión del Laplaciano discreto con el Laplaciano continuo el cual involucra las segundas derivadas de una función. En este sentido el principio del mínimo es una manifestación discreta del criterio de la segunda derivada⁴. Vale la pena leer la demostración a continuación teniendo esta idea en mente.

LEMA 2 (Principio del mínimo). *Dado $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito*

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 \text{ en } \Omega, \\ u \geq 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

entonces $u \geq 0$ en todo \mathbb{Z}^2 .

Demostración. Asumamos por contradicción que $\min_{\Omega} u < 0$ y sea $M := \{x \in \Omega : u(x) = \min_{\Omega} u\}$ finito y no vacío. Tomemos $x^* \in M$ para el cual existe algún $y^* \sim x^*$ fuera de M , es decir que $u(x^*) < u(y^*)$. Podríamos decir que u alcanza en x^* un mínimo localmente estricto, dado que por lo menos en un nodo adyacente la desigualdad es estricta. No es difícil probar que siempre es posible encontrar un punto x^* con tales características gracias a que tanto M como su complemento son no vacíos.

Vemos que ahora tenemos una contradicción a partir de evaluar la ecuación $\Delta u \leq 0$ sobre x^*

$$0 < \frac{1}{4} \sum_{y \sim x^*} u(y) - u(x^*) = \Delta u(x^*) \leq 0.$$

La primera desigualdad se debe a que u alcanza su mínimo en x^* , más aún es estricta gracias a la existencia de por lo menos una casilla adyacente y^* donde $u(x^*) < u(y^*)$. La última desigualdad se obtiene de la hipótesis $\Delta u \leq 0$ en Ω . \square

³Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ denotamos por $|\Omega|$ al número de puntos en Ω .

⁴Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función doblemente diferenciable que alcanza su mínimo en x^* entonces $\Delta u(x^*) = u''(x^*) \geq 0$. En general, cuando $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos que $D^2u(x^*)$ es definida no-negativa, es decir que

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En particular $\Delta u(x^*) = \text{tr}(D^2u(x^*)) \geq 0$.

COROLARIO 3 (Existencia y unicidad de soluciones). *Para $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene una única solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Demostración. Buscamos una solución en el espacio vectorial

$$V := \{u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega\},$$

cuya dimensión está dada por $|\Omega| < \infty$. Consideramos también el espacio de funciones $W = \{\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ el cual es isomorfo a V , puesto que tienen la misma dimensión. Basta con demostrar que el operador lineal $\Delta : V \rightarrow W$ es inyectivo, o equivalentemente tiene un núcleo trivial. Por el teorema fundamental del álgebra lineal esto automáticamente nos diría que el operador es biyectivo, y por lo tanto se tiene una única solución para cada sistema de ecuaciones determinado por $\mu \in W$, dado justamente por $u = -\Delta^{-1}\mu$.

La función $u \in V$ pertenece al núcleo de Δ si y solo si

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Gracias al principio del mínimo dado en el Lema [2](#) obtenemos que $u \geq 0$ en \mathbb{Z}^2 . Si aplicamos el mismo razonamiento a $-u$ obtenemos la otra desigualdad de donde concluimos $u = 0$, es decir que el núcleo de Δ es trivial y por lo tanto Δ es biyectiva. \square

2.2.1. Ejercicio 3. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, demuestra que existe una única solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para el sistema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Las funciones que satisfacen $\Delta u = 0$ en Ω se dicen armónicas en Ω . Geométricamente, el valor de u sobre cualquier $x \in \Omega$ es exactamente el promedio de los valores en las casillas adyacentes. Más adelante veremos una fórmula para calcular estas soluciones en términos del núcleo de Poisson que definiremos luego de la demostración del teorema del barrendero. De momento damos la siguiente pista para resolver el ejercicio, si u resuelve el problema que se propone, entonces ¿qué ecuación resolvería $v := u - \varphi$?

2.3. Demostración del teorema del barrendero. Ya estamos listos para demostrar nuestro resultado principal. Algunos pasos en la demostración se explican en términos más intuitivos que rigurosos. Esperamos que esta metodología tenga un mayor alcance pedagógico y esperamos que los lectores más inclinados a los aspectos formales puedan llenar los detalles más técnicos en la demostración.

Demostración del Teorema [1](#). Asumiendo la notación e hipótesis del teorema, definimos de forma recursiva y partiendo de $u_0 := 0$ las funciones $u_k := u_{k-1} + \mu_{k-1} \mathbb{1}_{b_k}$ las cuales son nulas en el complemento de Ω y verifican la ley de conservación. En términos de ecuaciones para estas funciones tenemos que

$$\begin{cases} \Delta u_k = \mu_k - \mu \text{ en } \Omega, \\ u_k = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Definimos también $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Gracias al resultado de existencia y unicidad (Corolario [3](#)) sabemos que u está bien definida y de su construcción queda claro que es independiente de los planes de barridas.

Para concluir la demostración verificaremos los siguientes pasos:

1. $\mu_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ está bien definida.
2. $u_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ está bien definida.
3. $u_\infty = u$.

Con esta estrategia podemos de hecho concentrarnos en un solo plan de barridas y obviar el otro.

Para establecer los primeros dos puntos usaremos que toda sucesión no-decreciente y acotada por arriba, necesariamente tiene un límite.

Para ver el primer punto basta con fijarse en el comportamiento de μ_k en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, ya que sabemos por hipótesis que estas tienden a cero en Ω . Afortunadamente tenemos que en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se tiene que μ_k es una sucesión no-decreciente de funciones tal que $\mu_k - \mu$ está mayorizada por el total de arena que inicialmente está en Ω . La monotonía de μ_k en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se tiene porque ninguna barrida pasa por las casillas en el complemento de Ω , solamente podemos ir sacando arena hacia el complemento. La cota para $\mu_k - \mu$ en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ se debe en cambio a que no podemos depositar más arena en $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ que el total que se encuentra originalmente en Ω . Es decir, que para $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$

$$\mu_0(x) \leq \mu_1(x) \leq \mu_2(x) \leq \dots \leq \sum_{y \in \Omega} \mu(y) + \mu(x).$$

Con este razonamiento ya hemos justificado la existencia del límite en el primer paso.

De la propia construcción de $\{u_k\}_{k \geq 0}$ se puede ver que esta forma una sucesión no-decreciente de funciones, puesto que en cada iteración $u_k - u_{k-1} = \mu_{k-1}(b_k) \mathbb{1}_{b_k} \geq 0$. Basta con probar que $u \geq u_k$ para demostrar el segundo punto (y como bono obtener la mitad de lo que nos hace falta para el tercer punto, $u \geq u_\infty$). Gracias a la linealidad del Laplaciano tenemos que la diferencia $v_k := u - u_k$ satisface

$$\begin{cases} \Delta v_k = \Delta u - \Delta u_k = -\mu - (\mu_k - \mu) = -\mu_k \leq 0 \text{ en } \Omega, \\ v_k = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Del principio del mínimo (Lema [2](#)) se deduce que $v_k \geq 0$ y por lo tanto $u \geq u_k$.

Ahora que sabemos que los límites μ_∞ y u_∞ están bien definidos, y dado que $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω , tenemos que tomando $k \rightarrow \infty$ en el sistema para u_k

$$\begin{cases} \Delta u_\infty = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u_\infty = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Por la unicidad de soluciones del problema lineal (Corolario [3](#)) llegamos a que necesariamente $u_\infty = u$.

Recordemos que de hecho la conservación de masa $\Delta u_k = \mu_k - \mu$ es una igualdad válida en todo \mathbb{Z}^2 . Una vez establecidos los tres pasos concluimos la demostración haciendo notar que de la fórmula anterior se tiene que en el límite μ_∞ se puede calcular a partir de

$$\mu_\infty = \mu + \Delta u_\infty = \mu + \Delta u,$$

una identidad que es independiente del plan de barridas dado que por definición μ y u son independientes del plan. \square

Nuestro teorema garantiza que para cualquier $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ se tiene que si μ puede ser barrido de Ω , entonces la distribución de arena que queda por fuera de Ω es independiente del plan. Queda abierta la pregunta de si podemos en todo caso barrer o no a μ de Ω . Te invitamos a que demuestres el siguiente resultado. En la justificación es útil que pienses en algunas de las técnicas que fueron ilustradas en la demostración anterior.

TEOREMA 4. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito y $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ existe por lo menos un plan $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ que barre a μ de Ω .*

2.3.1. Ejercicio 4. Demuestra el teorema.

2.4. El núcleo de Poisson. Los teoremas anteriores nos permiten dar un sentido riguroso a la siguiente construcción. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito buscamos definir una transformación P_Ω la cual toma una distribución de arena $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \infty)$ (o equivalentemente un vector de $[0, \infty)^{\mathbb{Z}^2}$) y devuelve la distribución de arena μ_∞ que resulta al barrer μ de Ω . En la siguiente definición podemos de hecho considerar distribuciones con valores negativos.

Definición 5. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito, definimos el núcleo de Poisson como la transformación $P_\Omega : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ tal que

$$P_\Omega(\mu) = \mu + \Delta u,$$

donde u es la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observamos que dado $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que el resultado de la transformación vuelve a ser una función $P_\Omega(\mu) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la cual se anula en Ω . Los valores más interesantes son justamente $P_\Omega(\mu)(y)$ para $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$. Por dar un ejemplo ilustrativo que usaremos más adelante tenemos que

$$P_{\{x_0\}}(\mathbb{1}_{x_0})(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si } y \sim x_0, \\ 0 \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$P_{\{x_0\}}(\mathbb{1}_{x_0}) = \frac{1}{4} \sum_{x \sim x_0} \mathbb{1}_x.$$

De la linealidad del problema intuimos que P_Ω también debería ser lineal.

LEMA 6. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $\mu, \nu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha P_\Omega(\mu) + \beta P_\Omega(\nu).$$

Demostración. Sean $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \\ \Delta v = -\nu \text{ en } \Omega, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \\ \Delta w = -(\alpha\mu + \beta\nu) \text{ en } \Omega, \\ w = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

por definición sabemos que

$$\begin{aligned} P_\Omega(\mu) &= \mu + \Delta u, \\ P_\Omega(\nu) &= \nu + \Delta v, \\ P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) &= \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w. \end{aligned}$$

Basta con demostrar que $w = \alpha u + \beta v$ para obtener de esta forma que

$$\begin{aligned} P_\Omega(\alpha\mu + \beta\nu) &= \alpha\mu + \beta\nu + \Delta w, \\ &= \alpha(\mu + \Delta u) + \beta(\nu + \Delta v), \\ &= \alpha P_\Omega(\mu) + \beta P_\Omega(\nu). \end{aligned}$$

Ambas funciones, w y $(\alpha u + \beta v)$, se anulan en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, y además cumplen $\Delta(\alpha u + \beta v) = \Delta w = -(\alpha\mu + \beta\nu)$ en Ω . Por la unicidad de soluciones podemos concluir la identidad esperada. \square

Gracias a esta linealidad observamos que solamente hace falta saber cómo actúa P_Ω sobre las distribuciones puntuales, es decir de la forma $\mathbb{1}_x$, para recuperar su comportamiento sobre una distribución arbitraria, la cuales se descomponen tomando la superposición

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mu(x) \mathbb{1}_x.$$

En otras palabras

$$P_\Omega(\mu) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mu(x) P_\Omega(\mathbb{1}_x).$$

En la literatura es usual definir en cambio al núcleo de Poisson como $P_\Omega : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_\Omega(x, y) := P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y).$$

Es decir, la fracción de arena que recibe un bote en la casilla y cuando se barre de Ω un montoncito en x (con la excepción de que $P_\Omega(x, y) = 0$ si $y \in \Omega$). Incluso podríamos fijarnos exclusivamente en los casos donde $x \in \Omega$ y $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, dado que los otros escenarios son de alguna forma triviales. Cuando $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ no habría nada que barrer en Ω , y si $y \in \Omega$ entonces dicha casilla queda limpia al final de la secuencia de barridas.

2.4.1. *Ejercicio 5.* Demuestra que si $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ entonces

$$P_\Omega(x, y) = \mathbb{1}_x(y).$$

Por otro lado, para $x \in \mathbb{Z}^2$ y $y \in \Omega$ se tiene que

$$P_\Omega(x, y) = 0.$$

Gracias a la interpretación de núcleo de Poisson en términos del problema del barrendero es natural pensar que dados $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ finitos, se tiene que al barrer primero a Ω_1 y luego a Ω_2 , se obtiene lo mismo que al barrer solamente Ω_2 . En términos precisos tenemos el siguiente resultado. Puedes dar una demostración usando ideas parecidas a las que usamos para demostrar la linealidad.

LEMA 7. *Dados $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{Z}^2$ finitos se cumple que*

$$P_{\Omega_2} = P_{\Omega_2} \circ P_{\Omega_1}.$$

2.4.2. *Ejercicio 6.* Demuestra el lema.

Como consecuencia de la linealidad y el lema anterior tenemos la siguiente interpretación dual del núcleo de Poisson.

LEMA 8. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito. Para $y \in \mathbb{Z}^2$ fijo, la función $u(x) := P_\Omega(x, y) = P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y)$ es la solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \mathbb{1}_y \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Demostración. La condición de borde se sigue del Ejercicio 5. Para $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$

$$P_\Omega(x, y) = \mathbb{1}_x(y) = \mathbb{1}_y(x).$$

Para verificar la ecuación usamos el Lema 7 con $\Omega_1 = \{x\} \subseteq \Omega$ y $\mu = \mathbb{1}_x$ tal que

$$P_\Omega(\mathbb{1}_x) = P_\Omega(P_{\{x\}}(\mathbb{1}_x)) = P_\Omega\left(\sum_{z \sim x} \frac{1}{4} \mathbb{1}_z\right) = \frac{1}{4} \sum_{z \sim x} P_\Omega(\mathbb{1}_z).$$

En otras palabras $\Delta_x P_\Omega(x, y) = 0$. □

El núcleo de Poisson nos ofrece así una solución particular de la ecuación $\Delta u = 0$ en Ω . Notemos por otro lado que las condiciones de borde de la forma $\mathbb{1}_y$ son suficientes para reconstruir cualquier otra condición de borde arbitraria gracias al principio de superposición. En otras palabras hemos llegado a la siguiente fórmula de representación.

COROLARIO 9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^2$ finito. La solución $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

puede escribirse en términos del núcleo de Poisson como

$$u(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega} \varphi(y) P_{\Omega}(x, y).$$

2.4.3. *Ejercicio 7.* Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula el núcleo de Poisson para $\Omega = [1, n] \times \{0\} \cap \mathbb{Z}^2$.

3. PROBLEMA CONTINUO

Las herramientas que hemos desarrollado hasta este punto son una interpretación discreta de un método que a finales del siglo diecinueve logró dar respuesta a uno de los problemas más importantes en la teoría de funciones analíticas: La posibilidad de encontrar soluciones al problema de Dirichlet. En esta sección daremos un breve vistazo al modelo continuo resaltando sus analogías con el modelo discreto. Finalmente observaremos como aún hoy en día las técnicas que hemos descrito en esta nota se utilizan en matemáticas puras y distintas aplicaciones prácticas.

3.1. El Laplaciano. El Laplaciano de una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ doblemente diferenciable está dado por

$$\Delta u(x_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0).$$

Este aparece motivado de forma geométrica cuando consideramos la diferencia entre los promedios de u en una esfera⁵ de radio $r \rightarrow 0^+$ y su valor en el centro⁶

$$(2) \quad \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x) = \frac{r^2}{2n} \Delta u(x_0) + o(r^2).$$

Recordemos que para $v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene algo muy parecido aunque mucho más sencillo,

$$\Delta v(x_0) = \frac{1}{4} \sum_{x \sim x_0} v(x) - v(x_0).$$

Es decir la diferencia entre el promedio de v en los nodos adyacentes a x_0 y el propio valor de $v(x_0)$. En el caso discreto no tenemos que preocuparnos por el límite cuando el radio tiende a cero porque de hecho tenemos a la mano “el radio más pequeño”.

Veamos rápidamente la demostración de la identidad (2). Tomando el cambio de variables $x = x_0 + r\theta$ y usando la expansión de Taylor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x), \\ &= \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} \left(r D u(x_0) \cdot \theta + \frac{r^2}{2} \theta \cdot D^2 u(x_0) \theta + o(r^2) \right) dS(\theta). \end{aligned}$$

La integral del primer término en el lado derecho se cancela por la simetría impar del integrando sobre la esfera.

⁵Denotamos las bolas y las esferas respectivamente como

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}, \\ \partial B_r(x_0) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}. \end{aligned}$$

Si omitimos el centro es porque asumimos que este es el origen ($x_0 = 0$).

⁶El término $o(r^2)$ representa una función que tiende a cero más rápido que r^2 , es decir $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{o(r^2)}{r^2} = 0$.

Para el segundo término tenemos que

$$\int_{\partial B_1} \theta \cdot D^2 u(x_0) \theta dS(\theta) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \int_{\partial B_1} \theta_i \theta_j dS(\theta).$$

Los términos con $i \neq j$ se cancelan igualmente por simetría impar. Restan así los términos donde $i = j$ para los cuales se tiene que una vez más por simetría

$$\int_{\partial B_1} \theta_1^2 dS(\theta) = \dots = \int_{\partial B_1} \theta_n^2 dS(\theta) = \frac{1}{n} \int_{\partial B_1} \sum_{i=1}^n \theta_i^2 dS(\theta) = \frac{|\partial B_1|}{n}.$$

Dado que $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 = 1$ para $\theta \in \partial B_1$.

Como conclusión tenemos que cuando reunimos los términos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) dS(x) &= \frac{r^2}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) + o(r^2), \\ &= \frac{r^2}{2n} \Delta u(x_0) + o(r^2). \end{aligned}$$

Ciertamente la fórmula que hemos demostrado es ilustrativa desde el punto de vista geométrico pero poco práctica para calcular. En ese caso se suele usar en cambio la suma de las segundas derivadas.

Si aproximamos a las derivadas de una función usando los cocientes incrementales obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + (\varepsilon/2)e_i) - u(x - (\varepsilon/2)e_i)}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial_i u(x + (\varepsilon/2)e_i) - \partial_i u(x - (\varepsilon/2)e_i)}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon e_i) - 2u(x) + u(x - \varepsilon e_i)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \frac{1}{2n} \sum_{y \sim_\varepsilon x} (u(y) - u(x))$$

donde tomamos $y \sim_\varepsilon x$ si y es de la forma $x \pm \varepsilon e_i$. Hemos descubierto así la segunda analogía entre los Laplacianos discretos y continuos.

Otras propiedades que igualmente se cumplen para el Laplaciano continuo son el principio del mínimo y la existencia de un núcleo de Poisson (o la medida armónica) para un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y bajo ciertas hipótesis. Para aquellos lectores que ya han tomado un curso de ecuaciones diferenciales parciales, seguramente ya se habían encontrado con algunas de estas ideas en sus cursos. Para los que aún no lo han hecho esperamos haber alimentado la curiosidad para embarcar el viaje en una hermosa disciplina de las matemáticas.

Apenas vimos un modelo que enfatiza una ley de conservación o un fenómeno de difusión. Las conexiones con distintas áreas son de hecho abundantes, tanto en física (electromagnetismo, mecánica de fluidos, mecánica estadística, cuántica, etc), biología (dinámica de poblaciones), geometría (flujos geométricos, superficies mínimas), probabilidad (modelos estocásticos, finanzas), optimización (penalización por gradiente), y pare usted de contar. Una amena referencia que ilustra las conexiones con probabilidad y redes eléctricas es *Random Walks and Electric Networks* por Peter G. Doyle y J. Laurie Snell [5].

3.2. Un breve vistazo a la historia del balayage. Las ecuaciones diferenciales nacieron a partir de la formulación matemática de distintos procesos y modelos físicos. Gracias a la teoría mecánica de Newton podemos entender la evolución de sistemas de cuerpos representados por parámetros puntuales que describen distintas configuraciones (posiciones, velocidades, ángulos, etc.). Sin embargo, no todos los

fenómenos naturales pueden ser descritos puntualmente por una cantidad finita de parámetros, pensemos en cambio en fluidos como lo son los líquidos o los gases, la descripción de una membrana en reposo, o incluso modelos poblacionales donde la gran cantidad de individuos hace poco práctico hacer seguimiento de cada uno de los agentes. En estos casos son necesarias las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). La importancia de las EDPs en física fue reconocida tan pronto como el cálculo diferencial e integral fue establecido durante los siglos diecisiete y dieciocho. Tengamos en cuenta que incluso hasta mediados del siglo diecinueve podría decirse que, física, matemáticas e ingenierías formaban parte de una misma disciplina.

Durante el siglo diecinueve las matemáticas comenzaron a establecer las bases axiomáticas del cálculo, reemplazando las motivaciones físicas e intuitivas por demostraciones rigurosas. En esta división entre matemáticas puras y las ciencias aplicadas, las EDPs habitaban una zona fronteriza, siendo muy aplicadas a fenómenos reales para merecer el análisis abstracto. Sin embargo, no tardaría en llegar el momento en que se descubriese que las EDPs juegan un rol protagónico dentro de las mismas bases abstractas de las matemáticas.

Podemos decir que fue en el análisis de funciones complejas, y en particular la tesis de Riemann en 1851, donde las EDPs hacen su primera aparición dentro de las matemáticas. Las simetrías de los números complejos son una poderosa herramienta que (contradictorio a su nombre) simplifican el cálculo real. El punto de partida son las funciones de la forma $f = u + iv$ diferenciables de los complejos en sí mismo los cuales identificamos por $z = x + iy$. Para que la definición de la derivada sea consistente en este caso es necesario que las partes real e imaginaria de f satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De esta forma descubrimos adicionalmente que u y v son funciones armónicas dado que

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \end{aligned}$$

Un punto clave en célebre teorema del mapeo de Riemann, uno de los resultados más importantes en análisis complejo y geometría de superficies, consiste en la posibilidad de encontrar soluciones para la ecuación de Laplace en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con un dato de borde continuo φ

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = \varphi \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hasta ese momento, la resolución de dicha ecuación no era realmente una prioridad en el análisis matemático. Con ella se modela por ejemplo la distribución de temperatura en una placa dada por Ω y por lo tanto su resolución era palpable. Riemann teniendo en cuenta que tales justificaciones no serían suficientes para los estándares que se estaban estableciendo para ese entonces justificó la resolución de la ecuación haciendo notar que esta es la ecuación de punto crítico cuando buscamos minimizar el funcional \mathcal{D} de Dirichlet

$$u \mapsto \mathcal{D}[u] := \int_{\Omega} \|Du\|^2 dx.$$

Dado que dicho funcional es no-negativo, quedaba “claro” que donde se alcanzara el mínimo, bajo la restricción $u = \varphi$ en $\partial\Omega$, tendría que encontrarse la solución buscada.

Veamos rápidamente que queremos decir con esta idea de la ecuación de punto crítico. Sea $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que $\eta = 0$ en $\partial\Omega$. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ realiza el mínimo de $\mathcal{D}[u]$ bajo la restricción $u = \varphi$ en $\partial\Omega$ entonces $f(\varepsilon) := \mathcal{D}[u + \varepsilon\eta]$ alcanza su

⁷Un funcional es una función que es evaluada a su vez sobre otra función

mínimo en $\varepsilon = 0$. Usando que en los mínimos de una función se tiene que al derivada se anula encontramos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} \|D(u + \varepsilon\eta)\|^2 dx, \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} (\varepsilon^2 \|D\eta\|^2 + 2\varepsilon Du \cdot D\eta + \|Du\|^2) dx, \\ &= 2 \int_{\Omega} Du \cdot D\eta dx, \\ &= -2 \int_{\Omega} \eta \Delta u dx. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene usando integración por partes y el hecho que $\eta = 0$ en $\partial\Omega$. Dado que dicha identidad debe ser cierta para η arbitraria se deduce que $\Delta u = 0$ en Ω .

Weierstrass hizo notar que este razonamiento aún carecía de rigor matemático. No cualquier función no negativa (o en general acotada por debajo) debe tener necesariamente un mínimo, por ejemplo pensemos en la función exponencial en los reales. De hecho, en 1871 Friedrich Prym encontró un caso para $\Omega = B_1$ donde existe una función continua φ en la circunferencia pero sin embargo para cualquier función continua que satisfice $u = \varphi$ en ∂B_1 se tiene que $\mathcal{D}[u] = \infty$. Quedaba definitivamente abierta la validez del análisis complejo que tantos avances había logrado en múltiples áreas de las matemáticas.

Simultáneamente a esta crisis, Hermann Schwarz, otro prominente matemático reconocido por sus trabajos en análisis complejo, había propuesto un ingenioso método para resolver la ecuación de Laplace en un dado dominio $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ que se descompone en otros más sencillos Ω_1 y Ω_2 . Gracias los trabajos de Fourier, Gauss, Green y Poisson entre otros, se conocen fórmulas de representación para la solución de la ecuación de Laplace con un dato de borde dado cuando el dominio es por ejemplo un rectángulo o una bola, con esto nos referimos a esta clase de “dominios sencillos”. Cuando en cambio tenemos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ se tiene que la solución del problema de Dirichlet se recupera en el límite cuando, partiendo de una función u_0 tal que $u_0 = \varphi$ en $\partial\Omega$, resolvemos alternadamente los problemas

$$\begin{cases} \Delta u_{2k+1} = 0 \text{ en } \Omega_1, \\ u_{2k+1} = u_{2k} \text{ en } \bar{\Omega} \setminus \Omega_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_{2k} = 0 \text{ en } \Omega_2, \\ u_{2k} = u_{2k-1} \text{ en } \bar{\Omega} \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Heurísticamente, comenzamos con un candidato u_0 que a pesar de tomar los valores deseados en la frontera puede no tener el Laplaciano que necesitamos. En cada iteración lo que vamos haciendo es justamente “barrer el Laplaciano” de la función dada en el sub-dominio donde sabemos exactamente como resolver la ecuación de Laplace.

Esta idea se generaliza sin problema al caso donde Ω es la unión de más de dos subdominios, incluso una cantidad numerable de ellos. No solamente desde un punto de vista práctico esta metodología ofrece una idea útil, sino también desde el teórico. Tengamos en cuenta que cualquier dominio se descompone como unión de bolas (por ser un conjunto abierto). Esta última observación en el caso numerable probablemente no tendría mucho valor práctico a la hora de calcular soluciones, sin embargo fue clave en el análisis de Poincaré.

Felizmente (y casi cuarenta años después de la tesis de Riemann) Henri Poincaré completó el análisis riguroso de este método, hoy conocido como balayage que se traduce como barrer [7]. La idea consiste en tomar una sucesión de bolas $B_1, B_2, \dots \subseteq \Omega$ tales que para cualquier $x \in \Omega$ se cumple que x pertenece a un número infinito de bolas de la sucesión. Comenzando con una función continua $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$u_0 = \varphi$ en Ω , definimos las iteraciones $u_k : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{en } B_k, \\ u_k = u_{k-1} & \text{en } \bar{\Omega} \setminus B_k. \end{cases}$$

El reto consiste en demostrar que $u_k \rightarrow u$ donde $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, doblemente diferenciable en Ω y satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{en } \bar{\Omega} \setminus B_k. \end{cases}$$

A pesar de las similitudes que podemos encontrar con el problema del barrendero, el tratamiento en el caso continuo es mucho más delicado, pensemos por un momento algunos de los obstáculos que nos encontraremos en este escenario. Mientras que para sistemas lineales de dimensión finita con igual número de incógnitas que de ecuaciones, la biyectividad es equivalente a la inyectividad esto no necesariamente se cumple en sistemas de dimensión infinita como el que tenemos en el caso de la EDP. Por otro lado, la convergencia puntual de $u_k \rightarrow u$ no es suficiente para decir que u hereda las ecuaciones que satisface la sucesión, es necesario tener un control más estricto de las soluciones. Abordar estos aspectos de forma rigurosa, usando por ejemplo el principio del mínimo y la desigualdad de Harnack, es lo que hace de la demostración de Poincaré uno de los avances más significativos de su época en el análisis de EDPs.

Ya entrado el siglo veinte, Oskar Perron encontraría una útil y profunda interpretación al método de Balayage [6]. Cuando adicionalmente pedimos que $\Delta u_0 \leq 0$ obtenemos que $\{u_k\}$ es una sucesión decreciente de funciones super-armónicas, es decir que también satisfacen $\Delta u_k \leq 0$ (en un cierto sentido débil). Por lo tanto podemos decir que u es el ínfimo de una familia de funciones super-armónicas. Más aún, por el principio del mínimo sabemos que cualquier función super-armónica que tenga el mismo dato de borde que la solución u debe necesariamente mayorizar la solución u . El método de Perrón dice así que la solución del problema de Dirichlet se obtiene justamente como la envolvente inferior de la familia de funciones super-armónicas que toman el dato de borde prescrito. Mucho más recientemente a partir de los años ochenta, estas ideas basadas en el principio de comparación han motivado la teoría de soluciones viscosas [4], las cuales son una de las áreas de investigación activas hoy en día en el análisis de EDPs.

Los esfuerzos por seguir analizando el funcional de Dirichlet, su posibilidad de encontrar mínimos, y cuando estos resuelven una ecuación diferencial son parte de otra historia muy interesante en la cual no haremos mayores comentarios. Solamente quisiéramos hacer notar que, teniendo en mente esta otra dirección, Hilbert propuso dos de sus veintitrés famosos problemas que guiarían el desarrollo de las matemáticas en el siglo veinte. En particular, mucho en el desarrollo del análisis funcional y de la teoría de la medida fue consecuencia de estas preguntas. Recomendamos el artículo de H. Brezis y F. Browder para información más detallada al respecto [1].

Uno de los aspectos que salta a la vista de esta breve historia es la retroalimentación entre la práctica intuición física con la abstracción y el desarrollo del análisis moderno. No vemos como algo negativo haber encontrado que la demostración de Riemann estaba incompleta, más bien representó la oportunidad de profundizar y consolidar aspectos que llevaron al desarrollo del análisis que hoy conocemos. Significó que el problema era mucho más interesante de lo que sospechábamos inicialmente. Por el otro lado, la intuición tampoco es una herramienta que debe ser descartada sino todo lo contrario. De hecho así lo manifestó en múltiples ocasiones el mismo Poincaré.

Esta interconexión entre matemáticas y física sigue muy presente hoy en día. Por poner un ejemplo famoso, la conjetura de Poincaré, la cual plantea una propiedad topológica abstracta para describir a las esferas, pudo ser resuelta gracias al programa de Richard Hamilton quien propuso en los años ochenta un flujo parabólico (el que describe la evolución del calor) para la métrica. Grigori Perelman es quien logra

finalmente concluir a comienzos del siglo veintiuno el plan trazado por Hamilton. Su demostración, entre varios aspectos profundos de análisis, propone un cuidadoso control de la entropía del flujo, es decir una cantidad que originalmente conocemos por sus motivaciones en termodinámica y que a simple vista no es natural relacionar con geometría (aunque quizás no para Perelman y otros cuantos).

En el mundo práctico el método de balayage ha sido redescubierto en múltiples ocasiones. Hoy en día los métodos numéricos para resolver problemas de aprendizaje por refuerzo pueden ser considerados una adaptación de las iteraciones de Schwarz. De hecho, el mismo principio de programación dinámica en la teoría de control óptimo es también una manifestación de esta teoría. En la siguiente charla [2] discuto con mayor detalle las interconexiones con la teoría de control óptimo.

4. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

4.1. Ejercicio 1. En este caso obtenemos la serie

$$\frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) = \frac{1}{56}.$$

4.2. Ejercicio 2. Tenemos que si denotamos por u_i al valor de u en la casilla i , entonces el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} -u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 = -1, \\ \frac{1}{4}u_1 - u_2 + \frac{1}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_5 = 0, \\ \frac{1}{4}u_2 - u_3 = 0, \\ \frac{1}{4}u_1 - u_4 + \frac{1}{4}u_5 = 0, \\ \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 - u_5 = 0. \end{cases}$$

La cantidad de arena que recibe el bote en el límite está dada así por

$$\mu_\infty((2, 0)) = \frac{1}{4}u_3 + \frac{1}{4}u_5 \sim 0,066.$$

4.3. Ejercicio 3. La existencia y unicidad de la solución u es equivalente a encontrar una única función $v := u - \varphi$ tal que

$$\begin{cases} \Delta v = -\mu \text{ en } \Omega, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$$

donde $\mu = \Delta\varphi$. Sabemos que v existe de forma única gracias al Corolario [3]

4.4. Ejercicio 4. Sea $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ un plan que recorre cada casilla un número infinito de veces. Por ejemplo, cualquier plan periódico donde aparezcan todas las casillas de Ω . Esta condición implica que para cada $x \in \Omega$, existe un número infinito de sub-índices tales que $\mu_k(x) = 0$. Basta probar así que $\mu_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$ existe para deducir que $\mu_\infty = 0$ en Ω , es decir que $b_1, b_2, \dots \in \Omega$ barre a μ de Ω .

Definimos u_k y u exactamente como en la demostración del Teorema [1]. Recordemos que u_k es no-decreciente y (por el principio del mínimo) acotada por u , por lo tanto $u_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ está bien definida. Dado que $\mu_k = \mu + \Delta u_k$ tenemos que la existencia del límite para μ_k queda demostrada por la existencia del límite para u_k .

4.5. Ejercicio 5. Sea $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ y $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mathbb{1}_x \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dado que $-\mathbb{1}_x = 0$ en Ω , puesto que $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, tenemos que necesariamente $u = 0$ y por lo tanto

$$P_\Omega(x, y) = P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y) = \mathbb{1}_x(y) + 0 = \mathbb{1}_x(y).$$

Por otro lado, para $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria sea $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Si $y \in \Omega$ entonces

$$P_\Omega(\mu)(y) = \mu(y) + \Delta u(y) = \mu(y) - \mu(y) = 0.$$

En particular $P_\Omega(x, y) = P_\Omega(\mathbb{1}_x)(y) = 0$.

4.6. Ejercicio 6. Sea $\mu : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria y $u, v, w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu \text{ en } \Omega_1, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_1. \\ \Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) \text{ en } \Omega_2, \\ v = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \\ \Delta w = -\mu \text{ en } \Omega_2, \\ w = 0 \text{ en } \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

por definición sabemos así que

$$\begin{aligned} P_{\Omega_1}(\mu) &= \mu + \Delta u, \\ P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)) &= P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v, \\ P_{\Omega_2}(\mu) &= \mu + \Delta w. \end{aligned}$$

Basta con demostrar que $w = u + v$ para obtener de esta forma que

$$P_{\Omega_2}(\mu) = \mu + \Delta w = \mu + \Delta u + \Delta v = P_{\Omega_1}(\mu) + \Delta v = P_{\Omega_2}(P_{\Omega_1}(\mu)).$$

Ambas funciones, w y $(u + v)$, se anulan en $\mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$, veamos entonces que $\Delta(u + v) = \Delta w = -\mu$ en Ω_2 para concluir por unicidad la identidad esperada.

En $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ tenemos que $P_{\Omega_1}(\mu) = 0$ y por lo tanto $\Delta(u + v) = -\mu + P_{\Omega_1}(\mu) = -\mu$. En el complemento $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ usamos que $\Delta v = -P_{\Omega_1}(\mu) = -(\mu + \Delta u)$ y por lo tanto $\Delta(u + v) = -\mu$. Esto concluye la demostración.

4.7. Ejercicio 7. Calcularemos $P_\Omega(x, y)$ en los casos no triviales los cuales están dados por $x \in \Omega = [1, n] \times \{0\}$ e $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Omega$ tal que es adyacente a por lo menos una casilla de Ω . En cada uno de los casos a continuación fijaremos y y denotaremos por $p_i := P_\Omega((i, 0), y)$ para $i \in [0, (n + 1)]$.

Caso 1: Si $y = (n + 1, 0)$ tenemos que p_i satisface

$$p_0 = 0, \quad p_{n+1} = 1, \quad p_{i+1} + p_{i-1} = 4p_i.$$

Para esta recurrencia se tiene el polinomio característico $P(x) = x^2 - 4x + 1$ cuyas raíces son $r_\pm = 2 \pm \sqrt{3}$. Por lo tanto

$$p_i = A_+ r_+^i + A_- r_-^i.$$

De las condiciones de borde vemos que

$$A_+ = -A_- = \frac{1}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}.$$

Es decir que para $i \in \{0, 1, \dots, n, (n + 1)\}$

$$P_\Omega((i, 0), (n + 1, 0)) = \frac{r_+^i - r_-^i}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}$$

y en los demás casos sería cero.

El caso $y = (0, 0)$ es simétrico y da como resultado

$$P_\Omega((i, 0), (0, 0)) = \frac{r_+^{n+1-i} - r_-^{n+1-i}}{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}.$$

Caso 2: Si $y = (j, 1)$ con $j \in [1, n]$ tenemos que p_i satisface para $i \neq j$

$$p_0 = 0, \quad p_{n+1} = 0, \quad p_{i+1} + p_{i-1} = 4p_i.$$

Para $i = j$ se tiene en cambio que

$$p_{j+1} + p_{j-1} + 1 = 4p_j.$$

Para analizar este caso partimos el intervalo $[1, n]$ en los sub-intervalos $[1, j]$ y $[j, n]$ y procedemos como en el caso anterior, siendo p_j un parámetro por ser fijado. Tenemos de esta forma que

$$p_i = \begin{cases} A(r_+^i - r_-^i) & \text{si } i \in [0, j], \\ B(r_+^{n+1-i} - r_-^{n+1-i}) & \text{si } i \in [j, (n+1)]. \end{cases}$$

Para que las fórmulas coincidan en $i = j$ requerimos que

$$B = A \frac{r_+^j - r_-^j}{r_+^{n+1-j} - r_-^{n+1-j}}.$$

Finalmente la relación $p_{j+1} + p_{j-1} + 1 = 4p_j$ determina el coeficiente $A = 1/(4a - b - c)$ donde

$$a = r_+^j - r_-^j, \quad b = r_+^{j-1} - r_-^{j-1}, \quad c = \frac{r_+^j - r_-^j}{r_+^{n+1-j} - r_-^{n+1-j}} (r_+^{n-j} - r_-^{n-j}).$$

El caso restante $y = (j, -1)$ es muy similar al anterior.

AGRADECIMIENTOS. Esta presentación ha formado parte de distintas charlas del autor y más recientemente del taller de ecuaciones diferenciales parciales para la EMALCA-México 2021 organizada por la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco [3]. El trabajo de H. Chang-Lara ha sido generosamente financiado por el proyecto CONACyT-MEXICO A1-S-48577.

REFERENCIAS

- [1] Haim Brezis and Felix Browder. Partial differential equations in the 20th century. Adv. Math., 135(1):76–144, (1998).
- [2] Héctor A. Chang-Lara. Introducción a las soluciones viscosas: Browniano vs. eikonal. <https://youtu.be/yg4qx5DYGm0> Cibercoloquio latinoamericano, 25 de febrero del 2021.
- [3] Héctor A. Chang-Lara. Taller de ecuaciones diferenciales parciales elípticas. <http://personal.cimat.mx:8181/~hector.chang/omalca2021/> EMALCA 2021, organizada por la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- [4] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27(1):1–67, (1992).
- [5] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. Random walks and electric networks, volume 22 of Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America, Washington, DC, (1984).
- [6] Oskar Perron. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Z., 18(1):42–54, (1923).
- [7] H. Poincaré. Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique. Amer. J. Math., 12(3):211–294, (1890).

Héctor A. Chang-Lara,

Centro de Investigación en Matemáticas,

Unidad Guanajuato,

Área de matemáticas básicas,

Jalisco S/N, Col. Valenciana CP: 36023 Guanajuato, Gto, México,

Apartado Postal 402, CP 36000.

e-mail: hector.chang@ciimat.mx



MUCHOS JUEGAN...¡YO TAMBIÉN QUIERO JUGAR!

RAÚL MONTES-DE-OCA

RESUMEN. Se presentará un ejemplo de un juego bipersonal, estático, no cooperativo, con información completa y de suma cero conocido como *el juego de los volados*. Este ejemplo servirá para motivar los conceptos e ideas principales que aparecen en juegos finitos, incluyendo la noción de equilibrio de Nash dada a través de la idea de mejor respuesta de cada jugador, presentando como meta final el enunciado del teorema de Nash acerca de la existencia de puntos de equilibrio en juegos finitos. Con todo esto, se espera que estudiantes de la licenciatura en matemáticas y áreas afines se introduzcan y se interesen en el fascinante mundo de la teoría de juegos.

1. INTRODUCCIÓN

De manera general, un *juego* es cualquier situación estratégica gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizado por la interdependencia estratégica entre los jugadores ([6], [8], [9], [14], [15]).

La teoría de juegos está relacionada con diversos problemas de *toma de decisiones* que aparecen en áreas como:

- Organización industrial/empresarial.
- Medicina.
- Administración de recursos.
- Finanzas/Portafolios.
- Subastas.

Véase, por ejemplo, [4].

El principal *objetivo* de este trabajo consiste en introducir y motivar a estudiantes de matemáticas y áreas afines en la teoría de juegos. Para alcanzar este objetivo, usaremos como hilo conductor un ejemplo de un juego bipersonal, estático, con información completa, no cooperativo y de suma cero ampliamente utilizado en la literatura de juegos y que es conocido como el *juego de los volados* ([6], [15]). Con este ejemplo motivaremos las ideas básicas de: *estrategias puras* y *estrategias mixtas*, de *mejores respuestas*, así como la noción de *punto de equilibrio* o *equilibrio de Nash*. Posteriormente, se presentará el enunciado del teorema de Nash ([11]) acerca de la existencia de puntos de equilibrio en juegos finitos. También se comentará acerca de la demostración de este teorema, ligando a ésta con la noción de punto fijo de la correspondencia de mejores respuesta de ambos jugadores y con el teorema de punto fijo de Kakutani ([7]).

Elegimos el juego de los volados para desarrollarlo debido a que éste motiva, de manera bastante clara, la noción de estrategia mixta a diferencia de otros ejemplos

2010 *Mathematics Subject Classification*. 91A10.

Palabras clave. Juegos finitos, juegos no cooperativos, equilibrio de Nash, juego de los volados.

clásicos como el dilema del prisionero ([6], [14]) que no trataremos aquí.

Como una referencia complementaria se propone el libro de Siegfried ([13]) el cual toca aspectos históricos y conceptuales de los juegos incluyendo, en particular, ideas acerca de la contribución de Von Neumann a la teoría de juegos las cuales no comentaremos en este trabajo.

Es importante mencionar que el trabajo está escrito manteniendo en un mínimo la notación para que las ideas queden de la forma más intuitiva posible, pero, de manera estratégica, se dan referencias adecuadas para cubrir completamente la parte formal del tema.

El trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2 se describe con detalle el juego de los volados dejando abierta la solución del juego para una sección posterior. En la Sección 3 se desarrolla la teoría básica de juegos bipersonales siguiendo el artículo [12], estableciendo la solución de un juego como un punto de equilibrio. Posteriormente, en la Sección 4 se expone la solución del juego de los volados y en la Sección 5 se presenta el enunciado del teorema de Nash comentando su relación con el teorema de Kakutani. En la Sección 6 se dan algunos comentarios generales y la conclusión del trabajo constituye la Sección 7.

2. UN EJEMPLO

Los juegos a los que nos referiremos aquí ([6], [8], [9], [14], [15]) cuentan con las siguientes características: (i) tienen un *número finito* de jugadores e igualmente hay un *número finito* de posibles decisiones para cada jugador; (ii) son *estáticos*, es decir, cada jugador toma una sola decisión y cada jugador no tiene conocimiento de la decisión tomada por los otros jugadores antes tomar su propia decisión; (iii) se trata con *juegos no cooperativos*, es decir, la unidad de análisis es el participante individual en el juego que se preocupa por hacer lo mejor posible por sí mismo, sujeto a reglas y posibilidades claramente definidas; y también (iv) se supondrá que cada jugador es *racional*, es decir, supondremos que cada jugador siempre dará su mejor respuesta y que cada jugador cuenta con *información completa*, es decir, se supone que cada jugador conoce las decisiones que tomará, así como las decisiones de los demás jugadores y espera que cualquiera de sus oponentes tome su mejor decisión.

2.1. El juego de los volados ([15] p. 71). Se tienen dos jugadores, cada uno de ellos posee una moneda de un peso donde, como es común, la moneda tiene en una cara un águila (A) y un sol (S) en la otra. Los jugadores eligen una cara de su moneda, es decir, escogen A o S y colocan la moneda del lado de la cara elegida sobre una mesa, de forma simultánea. Si las caras elegidas fueron dos águilas o dos soles, el Jugador 1 gana un peso (y el Jugador 2 pierde un peso), mientras que si las caras elegidas fueron un águila y un sol, el Jugador 2 se lleva un peso (y el Jugador 1 pierde un peso). Obsérvese que en este juego lo que gana un jugador es lo que pierde el otro; a los juegos con esta característica se les conoce como *juegos de suma cero* ([9]).

En el Cuadro 1, se da una representación de este juego conocida como la *forma normal* del juego y en ésta se especifican: los jugadores, las decisiones (o estrategias puras) de que dispone cada jugador y los pagos de cada jugador. Nótese que en los dos números que aparecen en los cuadros, el primero de ellos representa el pago que recibe el Jugador 1 y el segundo número es el pago del Jugador 2.

Una vez establecido el juego se tiene la siguiente pregunta obvia: ¿qué decisión deberá adoptar cada jugador para obtener su máximo beneficio?

		Jugador 2	
		A	S
Jugador 1	A	1,-1	-1,1
	S	-1,1	1,-1

CUADRO 1. Forma normal del juego de los volados

Primero, considérese las parejas (A, A) , (S, S) , (A, S) y (S, A) , donde la primera coordenada corresponde a la decisión tomada por el Jugador 1 y la segunda coordenada indica la decisión tomada por el Jugador 2. Nótese que ninguna de ellas es solución, debido a que:

- en (A, A) al Jugador 2 le convendría más tomar la decisión S ;
- en (A, S) al Jugador 1 le convendría más tomar la decisión S ;
- en (S, A) al Jugador 1 le convendría más tomar la decisión A ;
- en (S, S) al Jugador 2 le convendría más tomar la decisión A .

Entonces, ¿cuál es la solución? Para presentar ésta necesitamos extender la clase de las posibles decisiones o estrategias puras que puede tomar cada jugador, de hecho, como veremos después la solución de este juego se alcanza en la clase de las estrategias mixtas las cuales combinan adecuadamente las posibles estrategias puras de cada jugador. Entonces a continuación estableceremos un poco de teoría y posteriormente, en la Sección 4, ofreceremos la solución del juego de los volados.

3. UN POCO DE TEORIA DE JUEGOS BIPERSONALES

3.1. Modelo básico. En esta sección daremos la teoría básica de juegos finitos bipersonales, tomada esencialmente del artículo [12], aunque también puede encontrarse en textos como el [14]. De forma breve, tenemos:

- 2 jugadores;
- cada Jugador i tiene asociado un conjunto finito Π_i de *estrategias puras*. Por simplicidad y para cubrir el caso del ejemplo de los volados supongamos que cada uno de los conjuntos Π_1 y Π_2 tienen dos estrategias puras, es decir:

$$\Pi_1 = \{a, b\} \text{ y } \Pi_2 = \{\alpha, \beta\};$$

- cada Jugador i , tiene asociada una *función de pago* u_i , donde $u_i : \Pi_1 \times \Pi_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

3.2. Estrategias mixtas para el Jugador $i, i = 1, 2$. Esta clase de estrategias son vectores de forma:

$$(\eta, 1 - \eta),$$

con $0 \leq \eta \leq 1$ y se tiene la interpretación de que el Jugador i toma una de sus estrategias puras con probabilidad η y la otra con probabilidad $1 - \eta$. Nótese que los casos especiales cuando $\eta = 0$ y $\eta = 1$ dan como resultado las estrategias puras correspondientes al jugador en cuestión.

3.3. Función de pago sobre las estrategias mixtas. Se extiende la función de pago u_i a la clase de las estrategias mixtas de la siguiente manera: tómesese $0 \leq \theta \leq 1$ y $0 \leq \gamma \leq 1$. Entonces, en términos de la teoría de la probabilidad ([1]) podemos pensar que tenemos dos elementos aleatorios:

$$X = \begin{cases} a & \text{con probabilidad } \theta \\ b & \text{con probabilidad } 1 - \theta \end{cases}$$

y

$$Y = \begin{cases} \alpha & \text{con probabilidad } \gamma \\ \beta & \text{con probabilidad } 1 - \gamma \end{cases}$$

donde se supone que X y Y son independientes, con vector conjunto dado por:

$$(X, Y) = \begin{cases} (a, \alpha) & \text{con probabilidad } \theta \cdot \gamma \\ (a, \beta) & \text{con probabilidad } \theta \cdot (1 - \gamma) \\ (b, \alpha) & \text{con probabilidad } (1 - \theta) \cdot \gamma \\ (b, \beta) & \text{con probabilidad } (1 - \theta) \cdot (1 - \gamma) \end{cases}$$

y usando la función de pago u_i sobre las estrategias puras, tenemos la función de pago conjunta aleatoria dada por:

$$u_i(X, Y) = \begin{cases} u_i(a, \alpha) & \text{con probabilidad } \theta \cdot \gamma \\ u_i(a, \beta) & \text{con probabilidad } \theta \cdot (1 - \gamma) \\ u_i(b, \alpha) & \text{con probabilidad } (1 - \theta) \cdot \gamma \\ u_i(b, \beta) & \text{con probabilidad } (1 - \theta) \cdot (1 - \gamma). \end{cases}$$

De aquí se obtiene que la esperanza de $u_i(X, Y)$ está dada por:

$$E[u_i(X, Y)] = u_i(a, \alpha)\theta \cdot \gamma + u_i(a, \beta)\theta \cdot (1 - \gamma) + u_i(b, \alpha)(1 - \theta) \cdot \gamma + u_i(b, \beta)(1 - \theta) \cdot (1 - \gamma).$$

En este sentido la fórmula anterior se puede pensar como el *pago esperado* del Jugador i y de hecho, esta fórmula se usará como la extensión de la *función de pago* para el Jugador i sobre la clase de las estrategias mixtas, con la notación:

$$U_i((\theta, 1 - \theta), (\gamma, 1 - \gamma)) := E[u_i(X, Y)].$$

Por otro lado, es fácil verificar la siguiente igualdad realizando los productos involucrados en el lado derecho de ésta:

$$(1) \quad U_i((\theta, 1 - \theta), (\gamma, 1 - \gamma)) = (\theta, 1 - \theta) \begin{pmatrix} u_i(a, \alpha) & u_i(a, \beta) \\ u_i(b, \alpha) & u_i(b, \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix}.$$

También, a la matriz

$$\begin{pmatrix} u_i(a, \alpha) & u_i(a, \beta) \\ u_i(b, \alpha) & u_i(b, \beta) \end{pmatrix}$$

la llamaremos la *matriz de pagos* del Jugador i .

Nota

Como es común, se supone que los pagos esperados U_i definidos en (1), son una representación de las preferencias de individuos racionales, por tanto el *objetivo* de un individuo consiste en *maximizar* su función de pago esperada (véase la Sección 1.3 y la Nota 4.9 del libro [15]).

Esto será utilizado en en la siguiente subsección.

3.4. Mejores respuestas. Sean Σ_1 y Σ_2 los conjuntos de estrategias mixtas para los jugadores 1 y 2, respectivamente y $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Entonces, tenemos:

- $r_1 \in \Sigma_1$ es una *mejor respuesta mixta* del Jugador 1 a la estrategia mixta $s_2 \in \Sigma_2$ de su oponente si

$$U_1(r_1, s_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} U_1(q_1, s_2);$$

- $r_2 \in \Sigma_2$ es una *mejor respuesta mixta* del Jugador 2 a la estrategia mixta $s_1 \in \Sigma_1$ de su oponente si

$$U_2(s_1, r_2) = \max_{q_2 \in \Sigma_2} U_2(s_1, q_2);$$

- Para las estrategias mixtas $s_1 \in \Sigma_1$ y $s_2 \in \Sigma_2$, considere:

$$\Gamma(s_1, s_2) = \left\{ (r_1, r_2) \in \Sigma : U_1(r_1, s_2) = \max_{q_1 \in \Sigma_1} U_1(q_1, s_2) \text{ y } U_2(s_1, r_2) = \max_{q_2 \in \Sigma_2} U_2(s_1, q_2) \right\}.$$

Entonces la *correspondencia de mejores respuestas* de ambos Jugadores está dada por la función:

$$(s_1, s_2) \rightarrow \Gamma(s_1, s_2).$$

3.5. Puntos de equilibrio. Un perfil de estrategias mixtas $(s_1^*, s_2^*) \in \Sigma$ es un *punto de equilibrio* o un *equilibrio de Nash* si: para el Jugador 1, s_1^* es una mejor respuesta para s_2^* , y para el Jugador 2, s_2^* es una mejor respuesta para s_1^* .

Nota

Es importante notar que para $s_1^* \in \Sigma_1$ y $s_2^* \in \Sigma_2$, tenemos que (s_1^*, s_2^*) es un *punto de equilibrio* $\iff (s_1^*, s_2^*)$ es un *punto fijo* de la correspondencia de mejores respuestas, donde punto fijo en este caso significa que:

$$(s_1^*, s_2^*) \in \Gamma(s_1^*, s_2^*).$$

4. SOLUCIÓN DEL JUEGO DE LAS MONEDAS

En esta sección, presentaremos la solución del juego de los volados dado en la Sección 2, y para dar ésta seguiremos las definiciones de mejores respuestas, mejor respuesta conjunta y punto de equilibrio dadas en la sección anterior. Primero comenzaremos por dar las matrices de pago que corresponden a cada jugador:

$$\text{Jugador 1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{Jugador 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como ya comentamos, el punto de equilibrio *no* se alcanza en las estrategias puras, entonces lo buscaremos en la clase de las estrategias mixtas, para esto tómesese: $0 \leq \theta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$. Entonces, de (1) tenemos para el Jugador 1:

$$\begin{aligned} U_1((\theta, 1 - \theta), (\gamma, 1 - \gamma)) &= (\theta, 1 - \theta) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} \\ &= (2\gamma - 1)(2\theta - 1). \end{aligned}$$

Ahora construiremos la *función de las mejores respuestas* (BR_1) que el Jugador 1 puede darle al Jugador 2. Para ilustrar cómo se obtiene esta función considere, por ejemplo, que el Jugador 2 decide tomar una estrategia mixta con $\gamma > 1/2$, entonces $2\gamma - 1 > 0$ y la recta dada por $(2\gamma - 1)(2\theta - 1)$, como función de $\theta \in [0, 1]$ tiene pendiente positiva, por lo que el máximo de $U_1((\theta, 1 - \theta), (\gamma, 1 - \gamma))$ se alcanza en $\theta = 1$. Por tanto, para $\gamma > 1/2$ se tiene que $BR_1(\gamma) = 1$. Los demás casos para describir la función BR_1 se obtienen de manera similar.

Por tanto, la función BR_1 queda dada por:

$$BR_1(\gamma) = \begin{cases} \theta = 0 & \text{si } \gamma < 1/2 \\ \theta = 1 & \text{si } \gamma > 1/2 \\ 0 \leq \theta \leq 1 & \text{si } \gamma = 1/2 \end{cases}$$

Siguiendo lo anterior, de manera análoga obtenemos para el Jugador 2:

$$\begin{aligned} U_2((\theta, 1 - \theta), (\gamma, 1 - \gamma)) &= (\theta, 1 - \theta) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} \\ &= -(2\gamma - 1)(2\theta - 1). \end{aligned}$$

y la correspondiente funcion BR_2 queda dada por:

$$BR_2(\theta) = \begin{cases} \gamma = 1 & \text{si } \theta < 1/2 \\ \gamma = 0 & \text{si } \theta > 1/2 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 & \text{si } \theta = 1/2 \end{cases}$$

Trazando las gráficas de BR_1 y BR_2 , tenemos:

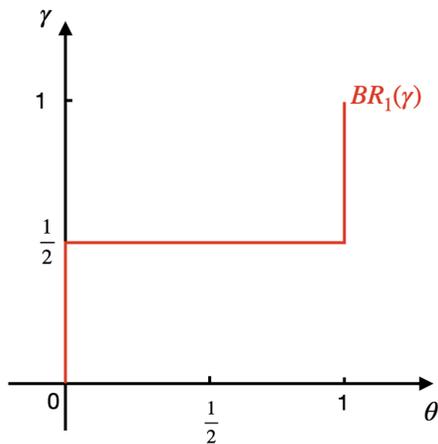


FIGURA 1. Mejor respuesta del Jugador 1

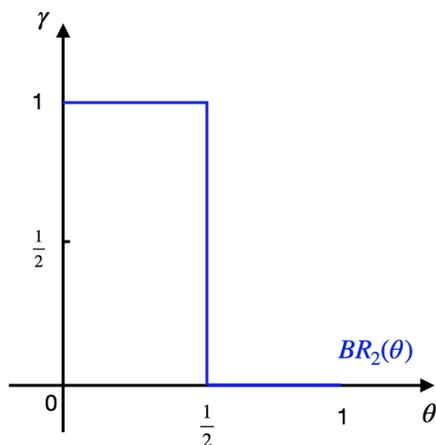


FIGURA 2. Mejor respuesta del Jugador 2

Entonces, la mejor respuesta conjunta queda dada por la intersección de las dos gráficas anteriores, es decir:

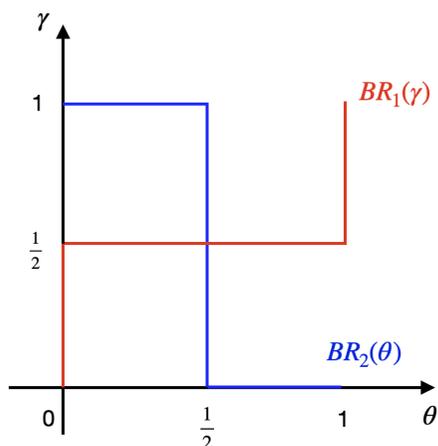


FIGURA 3. Mejor respuesta conjunta.

Por tanto, por lo presentado en la Sección 3, el *punto de equilibrio* s^* del juego se alcanza para $\theta^* = \gamma^* = 1/2$ y está dado por:

$$s^* = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2)) \quad y \quad U_1(s^*) = U_2(s^*) = 0.$$

5. EXISTENCIA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

Comenzaremos por dar un resultado que se puede establecer a partir del material que se estudia en los cursos de cálculo.

Una aplicación del teorema del valor intermedio ([10] ejercicio 3, p. 91). Sea $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Entonces ρ tiene un punto fijo, es decir, existe $x^* \in [0, 1]$ tal que $\rho(x^*) = x^*$. Para demostrar esto, sea $g(x) = \rho(x) - x$, $x \in [0, 1]$. Entonces, g es continua y

- $g(0) = \rho(0) \geq 0$;
- $g(1) = \rho(1) - 1 \leq 0$.

Si $g(0) = 0$ (resp. $g(1) = 0$), entonces el punto fijo es $x^* = 0$ (resp. $x^* = 1$). Por otro lado, si $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$, entonces, por el teorema del valor intermedio ([10], p. 90) existe $x^* \in [0, 1]$ tal que $g(x^*) = 0$, i.e. $\rho(x^*) = x^*$. La gráfica que a continuación se presenta en la Figura 4 ilustra esta situación.

El resultado anterior forma parte de una serie de teoremas de punto fijo como son los teoremas de Brouwer ([5]) y de Kakutani ([7]). De hecho, el teorema de Brouwer extiende el resultado relacionado con el teorema del valor intermedio antes dado y a su vez el teorema de Kakutani extiende el de Brouwer. Para revisar el teorema de Kakutani y la teoría relacionada con éste se sugiere consultar el libro de Berge [3].

Por otro lado, cabe señalar que las ideas que hemos dado en la Sección 3 de juegos bi-personales se pueden extender al caso de n jugadores, con n un entero positivo fijo mayor igual a 2 y con un número finito de estrategias puras. En este contexto, J. Nash estableció en 1950 ([11]) el siguiente teorema:

Teorema de Nash: Cada juego finito tiene un punto de equilibrio.

Notas

Esencialmente, la demostración dada en [11] está basada en el teorema de Kakutani y exhibe que la correspondencia de mejores respuestas de los jugadores, en el caso de juegos cooperativos, finitos y n -personales tiene un punto fijo. Otra demostración del teorema Nash, basada directamente en el teorema de Brouwer, es presentada en [12]. Como un comentario adicional, cabe mencionar que una aplicación reciente del teorema de Kakutani en el estudio de la existencia de puntos de equilibrio para cierta clase de juegos dinámicos es presentada en [2].

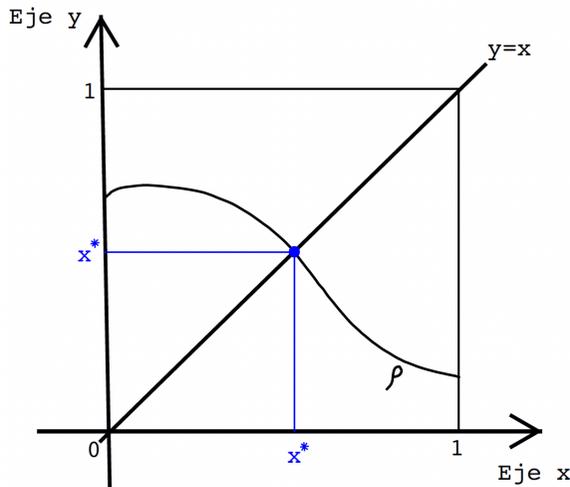


FIGURA 4. Punto fijo: $\rho(x^*) = x^*$

6. COMENTARIOS FINALES

6.1. Algunas extensiones de juegos finitos. En la literatura de juegos ([6], [8], [9], [14], [15]) es posible encontrar algunas generalizaciones de los modelos considerados en este

trabajo. Algunas de estas generalizaciones se pueden contrastar con lo hecho aquí, por ejemplo:

- **Tipo de información:** información completa e información incompleta.
- **Número de participantes:** juegos bipersonales y juegos n -personales, $n \geq 3$.
- **Número de estrategias:** juegos finitos (cada jugador tiene un número finito de estrategias puras posibles) y juegos infinitos (cada jugador tiene un número infinito de estrategias posibles).
- **Tipos de relación entre los jugadores:** juegos no cooperativos y juegos cooperativos.
- **Tipos de pagos:** juegos de suma cero y juegos de suma no nula.
- **Por el número de movimientos:** juegos estáticos y juegos multipasos.

7. CONCLUSIÓN.

Finalmente, como se puede observar la teoría de juegos representa un tema de las matemáticas que modela la toma de decisiones. El estudio de esta teoría se puede iniciar con los conocimientos de los cursos de nivel medio y avanzado de una licenciatura en matemáticas o áreas afines. En un nivel más profundo, las perspectivas de esta teoría, incluyendo sus muy diversas aplicaciones, son muy amplias. Por esto, se invita muy enfáticamente al lector a adentrarse en el atractivo mundo de la teoría de juegos.

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece las sugerencias y los comentarios hechos por un árbitro anónimo que contribuyeron a mejorar la presentación del artículo.

REFERENCIAS

- [1] Ash, R. B., *Real Analysis and Probability*, Academic Press, 1972.
- [2] Becerril-Borja, R. and Montes-de-Oca, R., *Incomplete information and risk sensitive analysis of sequential games without a predetermined order of turns*, Kybernetika (Prague), 57, 2, 312-331, 2021.
- [3] Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1963 (reprinted by Dover Publications, Inc., Mineola, New York 1997).
- [4] Bhuiyan, B. A., *An overview of game theory and some applications*, Philosophy and Progress, LIX-LX, 111-128, 2016.
- [5] Brouwer, L. E. J., *Über abbildung von mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71, 1, 97-115, 1911.
- [6] Fudenberg, D. and Tirole, J., *Game Theory*, The MIT Press, 1991.
- [7] Kakutani, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Mathematical Journal, 8, 457-459, 1941.
- [8] Kolokoltsov, V. N. and Malafeyev, O. A., *Understanding Game Theory: Introduction to the Analysis of Many Agent Systems with Competition and Cooperation*, World Scientific, 2010.
- [9] Leyton-Brown, K. and Shoham, Y., *Essentials of Game Theory: A Concise Multidisciplinary Introduction*, Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning, Morgan and Claypool Series, 2, 1, 1-88, 2008.
- [10] Marsden, J. E., *Elementary Classical Analysis*, Freeman and Company, 1974.
- [11] Nash, J., *Equilibrium points in n -person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 1, 48-49, 1950.
- [12] Nash, J., *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics, 54, 2, 286-295, 1951.
- [13] Siegfried, T., *A Beautiful Math: John Nash, Game Theory, and the Modern Quest for a Code of Nature*, Joseph Henry Press, 2006.
- [14] Tadelis, S., *Game Theory: an Introduction*, Princeton University Press, 2013.
- [15] Webb, J. N., *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*, Springer, 2007.

Raúl Montes-de-Oca,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, CDMX, México.
e-mail: `momr@xanum.uam.mx`



¿CÓMO MODELAR UNA POBLACIÓN?

JOSUÉ MANIK NAVA SEDEÑO

RESUMEN. En varias disciplinas científicas, existen diferentes alternativas para modelar matemáticamente algún fenómeno temporal, por lo que podría preguntarse cuál es el modelo “correcto”. Este artículo examina el problema ecológico del crecimiento de una población con reproducción sexual, mediante tres modelos deterministas. Aun cuando la tasa de cambio poblacional es equivalente en todos los modelos examinados, observamos que en un modelo la población siempre tiende a un valor constante, en otro un comportamiento caótico en el cambio de la población, y en un tercero encontramos una fuerte dependencia de la evolución de la población en la distribución inicial de individuos.

INTRODUCCIÓN

Durante mucho tiempo, la biología fue una ciencia completamente cualitativa y descriptiva, y aún lo es en gran medida. Se hacen observaciones, se experimenta al cambiar de manera controlada alguna condición, y se obtienen conclusiones a partir del cambio entre ambas observaciones experimentales. En tiempos recientes, la biología se ha vuelto una disciplina mucho más cuantitativa, no sólo a través del análisis estadístico de datos experimentales, sino también a través de un estudio más teórico gracias a modelos matemáticos y de aprendizaje de máquina [1].

Una rama de estudio clásica en biología es la dinámica de poblaciones, es decir, cómo aumenta y disminuye el número de un conjunto de individuos. Esta rama aborda problemas importantes en varias subdisciplinas, tales como la conservación de especies en ecología [8], la deriva genética en biología evolutiva [1], y de la progresión tumoral en la biomedicina [18], por mencionar algunos ejemplos. Existen varias herramientas matemáticas que podrían usarse para modelar una población, tales como ecuaciones diferenciales y procesos estocásticos, entre otros. Puede resultar difícil identificar qué herramienta matemática es la más indicada para estudiar una población en específico, sobre todo sabiendo que cada modelo puede resultar en predicciones diferentes.

A continuación se presentarán tres modelos poblacionales basados en las mismas suposiciones generales, pero formulados a través de ecuaciones en diferencias, ecuaciones diferenciales ordinarias, y ecuaciones diferenciales parciales. Se explorarán las similitudes y diferencias en las predicciones de cada modelo, y como se relacionan los comportamientos predichos con los sistemas biológicos reales.

MODELO DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Supongamos que estamos estudiando un organismo que sólo se reproduce en una fecha específica en cierto periodo de tiempo, y muere inmediatamente después, tal como las cigarras [4]. Esto define generaciones secuenciales bien definidas, pues todos los individuos de cierta generación sólo son descendencia de los individuos de la generación pasada, ya que las generaciones anteriores ya han muerto.

En este caso, podemos considerar la evolución de una población en generaciones discretas. Sea $n \in \mathbb{N}_0$ la generación (ordenadas por números naturales, incluido el cero), y sea $u_n : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{R}_+$ la densidad poblacional (el número de individuos por unidad de área) en la generación n , descrita por un número positivo. Bajo

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35Q92, 37N25, 39A60, 92D25, 97M10.

Palabras clave. Biología matemática, sistemas dinámicos, modelación, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias finitas.

los supuestos anteriores, podemos modelar este fenómeno mediante la *ecuación en diferencias finitas*:

$$(1) \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

donde $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ es una función tal que $f(u_n)$ representa la densidad de crías de los individuos de la generación n . Cabe mencionar que la solución a la Ec. [1](#) es la función u_n ; sin embargo, en general no es posible encontrar a la función u_n de manera explícita.

Adicionalmente, necesitamos especificar el tamaño de la población para una generación de referencia (una generación que hemos observado originalmente), a la que arbitrariamente llamaremos la generación cero:

$$(2) \quad u_0 = U,$$

donde $U \in \mathbb{R}_+$ es la densidad poblacional de la generación cero. A la Ec. [2](#) le llamamos la *condición inicial*. Para encontrar numéricamente la densidad poblacional en cada generación, no es necesario encontrar a u_n explícitamente como función de n , pues a partir de las Ecs. [1](#) y [2](#) vemos que la densidad u para cada n está dada por:

$$\begin{aligned} u_0 &= U, \\ u_1 &= f(u_0) = f(U), \\ u_2 &= f(u_1) = f(f(U)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

es decir, sólo basta iterar f n veces para obtener la densidad poblacional de la generación n .

En este caso, el modelaje consiste en justificar una forma funcional específica para la función f . Recordando que queremos modelar una población animal (que, en muchos casos, se reproducen sexualmente), hacemos las siguientes suposiciones, conocidas en ecología como el *efecto Allee* [10](#):

1. La densidad de crías es aproximadamente igual a la densidad de padres, con cierta diferencia que también depende de la densidad de los padres.
2. Si la población es muy pequeña, la endogamia produce un deterioro de la población que provoca su disminución.
3. Si la población es lo suficientemente grande, la población crece.
4. Si la población es demasiado grande, la competencia excesiva entre individuos provoca su disminución.
5. Si la población es cero, no hay individuos que se reproduzcan y la población permanece cero (no existe la generación espontánea).

La primera suposición nos permite reescribir la Ec. [1](#) como:

$$(3) \quad u_{n+1} = u_n + g(u_n),$$

donde $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ nos indica la diferencia entre una generación y la siguiente. Si $g(u_n) > 0$, la siguiente generación será más grande que la anterior, si $g(u_n) < 0$, la siguiente generación será menor que la anterior y si $g(u_n) = 0$ la siguiente generación tendrá el mismo tamaño que la anterior. De acuerdo a las suposiciones, la función g debe cumplir:

$$(4a) \quad g(x) < 0, \quad x < a, \quad x > b$$

$$(4b) \quad g(x) > 0, \quad a < x < b,$$

$$(4c) \quad g(x) = 0, \quad x = 0,$$

donde $0 < a < b$.

Aunque cualquier función g que cumpla con las condiciones anteriores resultaría en un modelo adecuado, por simplicidad consideremos la siguiente forma polinomial:

$$(5) \quad g(x) = cx(x-a)(b-x),$$

donde $c \in \mathbb{R}_+$ es un parámetro que representa la fecundidad de los individuos. Nuestro modelo poblacional es entonces:

$$(6) \quad u_{n+1} = u_n + cu_n(u_n - a)(b - u_n).$$

De la Ec. 5 vemos que si la condición inicial $u_0 = U$, $U \in \{0, a, b\}$, entonces $g(U) = 0$ y, por la Ec. 3, $u_1 = u_0 = U$ y en general:

$$(7) \quad u_n = U \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

éstas son soluciones constantes en n , y se les llama *soluciones de equilibrio*, pues la población no cambia (está “equilibrada”). Para encontrar las soluciones de equilibrio en ecuaciones dadas por la Ec. 3 basta con encontrar las raíces de la función g . Sin embargo, para ecuaciones en general, debemos suponer que la solución de equilibrio existe, es decir, que existe una solución $u_n = x \forall n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$, y sustituir en la Ec. 1, lo que define la ecuación algebraica

$$(8) \quad x = f(x).$$

Vemos, entonces, que encontrar las soluciones de equilibrio es equivalente a encontrar las intersecciones entre la identidad, $y = x$ y la curva $y = f(x)$.

Resulta conveniente que podamos encontrar las soluciones de equilibrio y cualquier otra solución de manera gráfica usando el *método de cobwebbing*, el cual consiste en lo siguiente 7:

1. Graficar $y = x$ y $y = f(x)$ en el plano. Las intersecciones de estas dos curvas corresponden a las soluciones de equilibrio.
2. Elegimos un valor U para la condición inicial sobre el eje x .
3. Dibujamos una línea vertical desde este punto hasta la curva $y = f(x)$. Esto corresponde a $f(U)$ en el eje y y, por lo tanto, al valor de u_1 , pues $u_1 = f(u_0) = f(U)$.
4. Dibujamos una línea horizontal desde el extremo de la línea vertical en $y = f(x)$, hasta la identidad $y = f(x)$. Dado que esta línea se encuentra en $y = u_1$, al tocar la identidad, garantizamos que $x = u_1$ también.
5. Iteramos los dos pasos anteriores n veces, con lo que obtenemos los valores de la solución para cada n , pues al extender líneas verticales hasta $y = f(x)$ siempre obtenemos el valor de la solución para el siguiente valor de n y el extender líneas horizontales hasta la identidad nos permite identificar este valor en el eje x para continuar con la evaluación.

Como vemos en la Fig. 1, si empezamos con una condición inicial U cercana a a (pero no exactamente a), la solución se aleja del valor de a . Por otro lado, dependiendo de si la condición inicial está a la derecha o a la izquierda de a , la solución toma valores cada vez más parecidos a las soluciones de equilibrio $u_n = 0$ y $u_n = b$. Se dice que una solución de equilibrio es *inestable*, cuando las soluciones se alejan de la solución de equilibrio, aun con condiciones iniciales arbitrariamente cercanas a la solución de equilibrio. Por otro lado, una solución de equilibrio es *estable* si las soluciones no se alejan de la solución de equilibrio, para toda condición inicial en cierta vecindad de la solución de equilibrio. Vemos entonces que, para este valor de c , $u_n = 0$ y $u_n = b$ son soluciones de equilibrio estables, mientras que $u_n = a$ es una solución de equilibrio inestable. Observemos que en 0 y b la identidad atraviesa a $f(x)$ de arriba hacia abajo, mientras que en a , la identidad atraviesa a $f(x)$ de abajo hacia arriba. Dado que la derivada nos dice la pendiente de una función en un punto, esto sugiere que la estabilidad tiene que ver con la relación entre la pendiente de la identidad y de $f(x)$ en el punto de equilibrio.

Heurísticamente, los individuos se reproducen moderadamente, es decir, tienen unas cuantas crías por individuo. Si la población es muy pequeña, la densidad de crías decrece en cada generación, pues los individuos no encuentran pareja o por efectos de endogamia, hasta extinguirse. Por otro lado, si la población es lo suficientemente grande, poco a poco van habiendo más crías en cada generación, hasta llegar a un punto

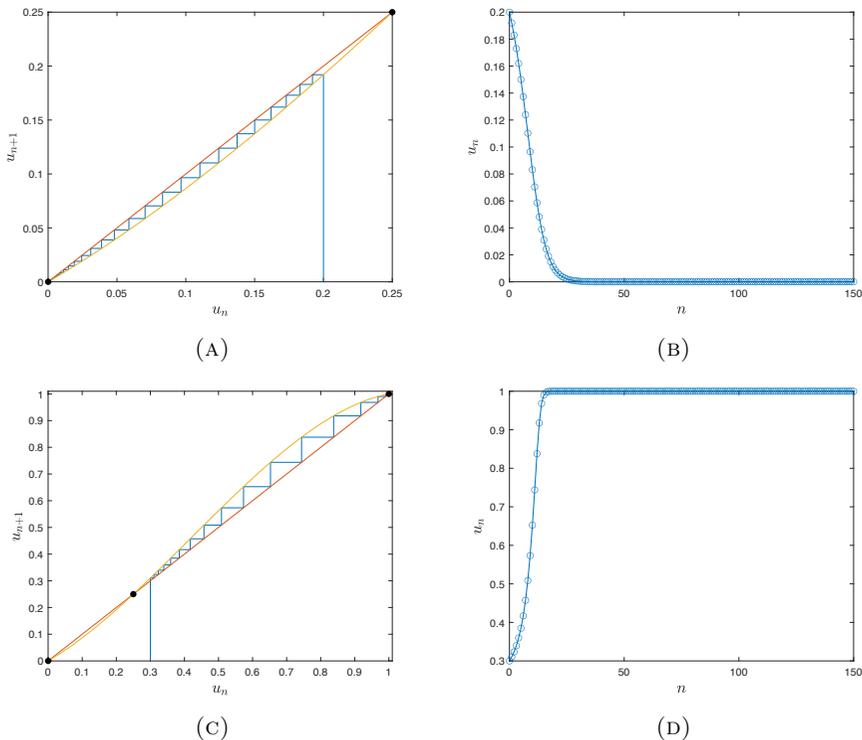


FIGURA 1. Soluciones gráficas y numéricas de la Ec. 6 con $c = 1$ en MATLAB. Las Figs. (a) y (c) muestran el método de cobwebbing [7]. Las Figs. (b) y (d) muestran las soluciones numéricas de u_n como función de n . Las condiciones iniciales son $u_0 = 0.2$ para las Figs. (a) y (b) y $u_0 = 0.3$ para las Figs. (c) y (d). En negro se muestran los puntos de equilibrio. Los valores de los parámetros son $a = \frac{1}{4}$ y $b = 1$ en todos los casos. Las líneas verticales desde el eje horizontal en los diagramas de cobwebbing representan la evaluación desde la condición inicial sobre el eje, al valor de la población en la primera generación, u_1 .

“ideal”, donde ya no pueden seguir creciendo por falta de recursos, y la población se equilibra.

Sin embargo, no siempre se obtiene este comportamiento, sino que depende de qué tan prolíficos sean los individuos, es decir, del valor de c . La Fig. 2 muestra el caso cuando los individuos son demasiado prolíficos. Vemos que, cuando la población es pequeña, pero lo suficientemente grande, la población crece rápidamente en cada generación. Sin embargo, la población es tan prolífica que, en algún punto, los individuos tienen demasiadas crías, más de lo que es sostenible. Por esta razón, las crías sufrirán por falta de recursos, lo que llevará a la muerte, canibalismo, o ausencia de descendencia para muchos de ellos. Consecuentemente, la generación posterior será más pequeña y por lo tanto no sufrirá de escasez, lo que, aunado a su gran fecundidad, resultará en una población demasiado grande para ser sostenible y el ciclo se repetirá. En este caso, la solución de equilibrio $u_n = b$ se vuelve inestable, pues aun cuando la solución pasa muy cerca del punto de equilibrio, eventualmente se aleja por varias generaciones antes de volver a acercarse. En este caso, la identidad atraviesa a $f(x)$ en b de arriba hacia abajo también, pero de manera muy extrema, casi ortogonalmente. Es posible mostrar que un punto de equilibrio de una ecuación en diferencias finitas es estable si la pendiente de $f(x)$ en el punto de equilibrio no es demasiado extrema;

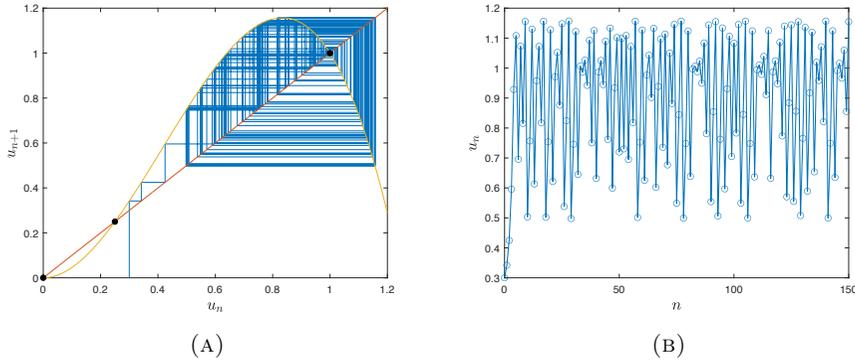


FIGURA 2. Soluciones gráficas y numéricas de la Ec. 6 con $c = 4$ en MATLAB. (a) Método de cobwebbing. (b) Solución numérica de u_n como función de n . En negro se muestran los puntos de equilibrio. La condición inicial es $u_0 = 0.3$. Los valores de los parámetros son $a = \frac{1}{4}$ y $b = 1$.



(A) Escarabajo de la harina *Tribolium castaneum*.



(B) Moscardón *Lucilia cuprina*.

FIGURA 3. Insectos cuyas poblaciones pueden ser modeladas a través de ecuaciones en diferencias finitas. Imágenes de Wikipedia.

es decir, si se cumple la desigualdad:

$$(9) \quad \left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| < 1,$$

donde x^* es el valor del punto de equilibrio y $|\cdot|$ es el valor absoluto.

Matemáticamente, valores de c muy grandes resultan interesantes, pues las soluciones son *caóticas*, lo cual quiere decir que la tendencia de las oscilaciones es prácticamente impredecible (para la mayoría de los casos) y que la forma de oscilar de dos soluciones con condiciones iniciales arbitrariamente cercanas se vuelve completamente diferente para tiempos largos, entre otras características [16].

Es fácil rechazar estos comportamientos “exóticos” como efectos matemáticos originados sólomente por nuestra elección de modelo; sin embargo, este tipo de comportamientos es realista siempre y cuando la población estudiada cumpla con las suposiciones que hicimos al principio de esta sección. De hecho, se ha comprobado experimentalmente que los comportamientos aquí discutidos se observan en varias especies de insectos (Fig. 3), tales como el escarabajo de la harina [5] y los moscardones [15].

MODELO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El modelo de ecuaciones en diferencias finitas fue propuesto bajo la suposición de que las generaciones no se traslapaban y por lo tanto podían ser enumeradas con

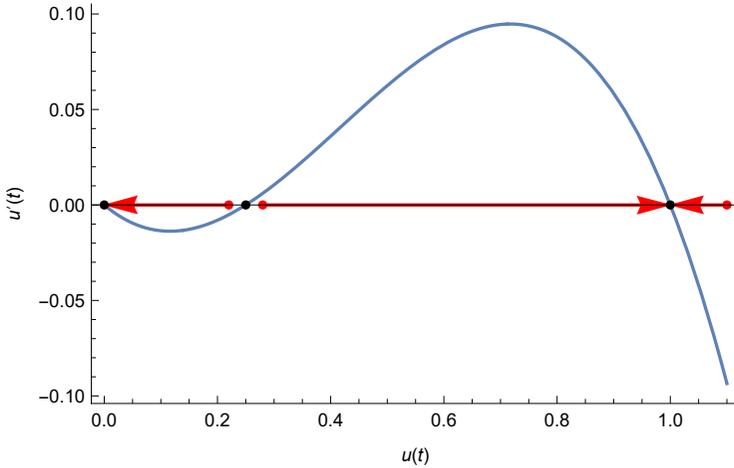


FIGURA 4. Gráfica de $\frac{du}{dt}$ como función del valor de u . La cúbica corresponde al lado derecho de la Ec. [11](#). Las líneas rojas indican si la función $u(t)$ es creciente o decreciente para cada rango de posibles valores de las condiciones iniciales. Los puntos negros denotan puntos de equilibrio. Los valores de los parámetros son $K = 1$, $a = \frac{1}{4}$ y $b = 1$. Gráfica hecha en Mathematica.

números naturales. Consideremos ahora el caso en el cual los organismos son capaces de reproducirse continuamente.

Supongamos que el intervalo de tiempo en el cual la población puede cambiar es $\tau \in \mathbb{R}_+$, y que la generación cero marca el tiempo cero. Bajo estas hipótesis, el tiempo y las generaciones están conectadas a través de la ecuación

$$(10) \quad t := n\tau.$$

Mediante esta relación *reescalamos* la Ec. [6](#), es decir, toda expresión que involucre a n la multiplicaremos por τ para convertir generaciones en tiempo real. Este procedimiento resulta en la ecuación

$$u(t + \tau) = u(t) + cu(t) [u(t) - a] [b - u(t)],$$

donde usamos la notación $u(t)$ para la densidad poblacional reescalada. Restando $u(t)$ y dividiendo entre τ , podemos aproximar la expresión resultante mediante la ecuación diferencial ordinaria:

$$(11) \quad \frac{d}{dt}u = Ku(u - a)(b - u),$$

donde la dependencia en t se ha omitido por facilidad de notación, y K es una constante que resulta de la razón c/τ , y la cual puede pensarse como una tasa de reproducción por unidad de tiempo. A este proceso, mediante el cual aproximamos a una ecuación diferencial al disminuir cada vez más los incrementos de una ecuación en diferencias se le conoce como el *límite continuo*.

Notemos que la Ec. [11](#) nos indica que el valor de la derivada de la función $u(t)$ depende del valor de la función misma y no del tiempo específico en el cual la función alcance este valor. Recordando también que la derivada de una función puede interpretarse como su pendiente en ese punto vemos que, cuando el lado derecho de la Ec. [11](#) es positivo, la función $u(t)$ es creciente, mientras que si es negativo, la función es decreciente. Esto nos permite examinar el comportamiento de $u(t)$ como función de los valores que toma; en específico, como función de la condición inicial $u(0) = U$ (ya que, en principio, ésta puede tener cualquier valor positivo, dependiendo de nuestras observaciones experimentales).

Como vemos en la Fig. 4 la solución $u(t)$ es creciente siempre que tome valores en el intervalo (a, b) y es decreciente cuando tiene valores en los intervalos $(0, a)$ y (b, ∞) . Vemos además que los valores 0 , a y b son los ceros de la parte derecha de la Ec. 11. La derivada de la función $u(t)$ debe ser cero cuando toma estos valores específicos. A primera vista podría pensarse que estos puntos corresponden a mínimos o máximos de la función. Sin embargo, la Ec. 11 revela que la derivada de la función $u(t)$ depende sólo del valor que toma u pero no del tiempo específico cuando la función alcanza este valor. Dicho de otra forma, si $\frac{d}{dt}u = 0$, esto debe cumplirse para cualquier $t \in \mathbb{R}$, y no sólo para un t en específico, como sucede para un máximo, mínimo, o punto de inflexión. Por lo tanto, la única opción es que la función $u(t) = U$ para toda t , es decir, que sea constante, siempre que la condición inicial $u(0)$ sea igual al valor de uno de estos tres puntos. Al igual que en el modelo anterior, a estas soluciones especiales les llamamos *soluciones de equilibrio*.

Como vemos en las Figs. 4 y 5, las soluciones con condiciones iniciales menores, pero arbitrariamente cercanas a a , son decrecientes. Por otro lado, las soluciones con condiciones iniciales mayores a a , pero menores a b , son crecientes, por lo que tenderán a alejarse de a mientras el tiempo aumenta. Decimos, entonces, que $u(t) = a$ es una *solución de equilibrio inestable*. La situación es contraria cuando consideramos a las soluciones de equilibrio $u(t) = 0$ y $u(t) = b$: las soluciones con condiciones iniciales menores a las soluciones de equilibrio son crecientes, mientras que con condiciones iniciales mayores a las soluciones de equilibrio son decrecientes, por lo que, mientras pasa el tiempo, estas soluciones $u(t)$ toman valores cada vez más cercanos a las soluciones de equilibrio. Por esta razón, $u(t) = 0$ y $u(t) = b$ son llamadas *soluciones de equilibrio estables*.

Nos gustaría tener un criterio con el cual poder discriminar soluciones de equilibrio estables de inestables. Es fácil ver que un punto de equilibrio es estable si la solución $u(t)$ es decreciente cuando ésta tiene valores mayores al punto de equilibrio, y creciente cuando tiene valores menores al punto de equilibrio. Por otro lado, un punto de equilibrio debe ser inestable si no cumple con estos requerimientos. Matemáticamente, esto se traduce al siguiente criterio: consideremos una ecuación diferencial $\frac{d}{dt}u = f(u)$, con solución de equilibrio $u(t) = U$, con U una constante tal que $f(U) = 0$, esta solución de equilibrio es estable si

$$(12) \quad \frac{df}{du}(U) < 0,$$

es decir, si la función $f(u)$ atraviesa al eje x en U de arriba hacia abajo. Observando las soluciones numéricas a la Ec. 11 con distintas condiciones iniciales, comprobamos el comportamiento que predice este criterio (Fig. 5): observamos que, siempre que la población tenga un tamaño inicial menor a a , la población se extingue, mientras que en cualquier otro caso, la población alcanza un tamaño “ideal” igual a b , el cual prácticamente no cambia después de un tiempo suficientemente largo.

Podríamos preguntarnos si existen soluciones oscilatorias como en el modelo anterior, es decir, si sería posible que un crecimiento demasiado rápido de la población “rebasara” a un punto de equilibrio. La respuesta es que no es posible tener oscilaciones cuando el modelo consta de una sola ecuación diferencial ordinaria.

En el caso de las ecuaciones en diferencias finitas, la solución cambia en “saltos” de un tiempo al siguiente, por lo que un crecimiento muy rápido podría resultar en superar al punto de equilibrio y provocar oscilaciones. En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el cambio no se da en saltos, sino de manera continua en el tiempo. Esto quiere decir que, cuando una población se acerca cada vez más a un punto de equilibrio, ésta debe cambiar cada vez más lentamente (pues se acerca a un punto donde la derivada, o razón de cambio, es cada vez más cercana a cero). Es decir, al acercarse a un punto de equilibrio, las soluciones se van “frenando” cada vez más, lo que resulta en un crecimiento o decrecimiento monótono hacia el punto de equilibrio. De hecho, la solución nunca alcanza el valor del punto de equilibrio, sino

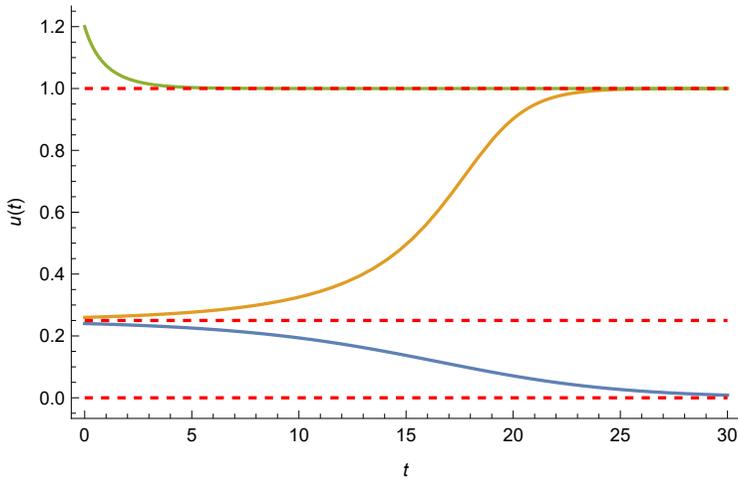


FIGURA 5. Soluciones de la Ec. [11](#) con diferentes condiciones iniciales en Mathematica. Las líneas rojas punteadas son las soluciones de equilibrio. La curva azul corresponde a la solución con $u(0) = 0.24$, la naranja a la solución con $u(0) = 0.26$, y la verde a aquella con $u(0) = 1.2$. Los valores de los parámetros fueron $K = 1$, $a = \frac{1}{4}$, y $b = 1$.

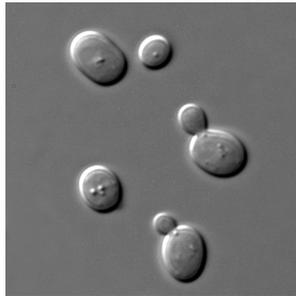


FIGURA 6. La dinámica de crecimiento poblacional de la levadura de la cerveza puede ser modelada a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Imagen de Wikipedia.

que tiende asintóticamente a éste (sólo se alcanza el valor del punto de equilibrio en casos patológicos tales como en la famosa ecuación $\frac{d}{dt}u = u^{\frac{1}{3}}$ [16](#), la cual va más allá del objetivo de este artículo).

Vemos, entonces, que el comportamiento del modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias es más simple que el del modelo de ecuaciones en diferencias finitas: las soluciones sólo pueden converger monótonamente a un punto de equilibrio o diverger monótonamente a más/menos infinito.

Varias poblaciones de organismos pueden ser descritas a través de ecuaciones diferenciales. En específico, los organismos unicelulares, tales como la levadura ([Fig. 6](#)), se reproducen rápidamente de manera asíncrona y pueden reproducirse sexualmente.

MODELO DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

La mayoría de los individuos biológicos, tales como bacterias, animales, o seres humanos, no están inmóviles, sino que se mueven constantemente en su entorno. En la ausencia de estímulos y señales externas, tales como concentraciones de químicos, campos eléctricos, e interacciones con otros individuos, los organismos típicamente

se mueven aleatoriamente, es decir, sin preferencia en dirección [13]. A este tipo de movimiento se le conoce como *comportamiento difusivo*.

Tomando esto en cuenta, los modelos presentados en las ecuaciones anteriores implícitamente suponen que todos los individuos están homogéneamente distribuidos en todo el espacio y que se mueven de manera aleatoria y uniforme, o estudian la cambio en el tamaño total de la población en todo el espacio, una vez que ésta ya se encuentra bien establecida. Bajo estas suposiciones, el movimiento aleatorio no afecta a la densidad de individuos en el espacio, pues inicialmente todos se encuentran en la misma proporción en todo lugar y su movimiento aleatorio no tiene un efecto significativo en la densidad poblacional en promedio. Es por esta razón que la población puede ser descrita sólo en función del tiempo y no es necesario considerar el espacio que éstos ocupan.

Sin embargo, en la mayoría de poblaciones de individuos móviles, la población no comienza distribuida uniformemente. Quisiéramos investigar entonces si existe algún comportamiento poblacional que no haya sido tomado en cuenta al ignorar la dependencia espacial.

Por simplicidad, supongamos que la población vive en un espacio unidimensional. Sea $u(n, r)$ la densidad poblacional al tiempo $n \in \mathbb{N}$ en una posición $r \in \mathbb{Z}$. Ahora, supongamos que en cada tiempo, hay cambio en la población por nacimientos/muertes, y migración de individuos provenientes de posiciones adyacentes de manera aleatoria. En una dimensión, cada posición r tiene sólo dos posiciones adyacentes: $r + 1$ y $r - 1$. Además, si el movimiento de todos los individuos es completamente aleatorio (la dirección de movimiento es una variable aleatoria uniforme discreta), entonces en promedio la mitad de todos los individuos se moverá a la derecha y la otra mitad a la izquierda. Denotando por $f[u(n, r)]$ la densidad de individuos al tiempo n en la posición r después de los eventos de nacimiento y muerte, el modelo poblacional con movimiento aleatorio en promedio está dado por

$$(13) \quad u(n + 1, r) = f[u(n, r)] + \frac{1}{2}u(n, r + 1) + \frac{1}{2}u(n, r - 1).$$

A este tipo de modelo con espacio y tiempo discreto se le conoce como *ecuaciones en diferencias parciales* o *red de mapeo acoplado* [9], y pueden heredar las características caóticas de las ecuaciones en diferencias finitas [20]. Aun cuando este tipo de modelos es increíblemente simple de simular en una computadora (pues consta sólo de sumas de entradas de una matriz), y que también es posible realizar predicciones analíticas [3], procederemos al límite continuo puesto que comúnmente hay más familiaridad con las ecuaciones diferenciales. Supongamos que la longitud de tiempo entre cada paso de tiempo discreto es $\tau \in \mathbb{R}_+$ y que la distancia entre cada posición discreta es $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, de tal manera que el tiempo y espacio reescalados están dados por $t := n\tau$ y $x := r\varepsilon$. Aplicando este reescalamiento a la Ec. [13], restando $u(t, x)$ de ambos lados de la igualdad, asociando este último término con los términos provenientes de la migración y multiplicándolo por $1 = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$, y dividiendo de ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{\tau}$, obtenemos la ecuación

$$\frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \frac{1}{\tau}f[u(t, x)] + \frac{\varepsilon^2}{2\tau} \frac{u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

Elijiendo a $f(x) = g(x)$, con $g(x)$ dada por la Ec. [5], podemos aproximar la ecuación anterior cuando $\tau, \varepsilon \ll 1$ mediante la *ecuación diferencial parcial*

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial t}u = Ku(u - a)(b - u) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}u,$$

donde la dependencia en t y x está implícita. Como en el caso anterior, $K = \frac{c}{\tau}$ y a la constante $D = \frac{\varepsilon^2}{2\tau}$ se conoce como *coeficiente de difusión* [6].

Para caracterizar el comportamiento de las soluciones de la Ec. [14], primero tenemos que tomar en cuenta dos aspectos importantes. Uno, al igual que en el modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias necesitamos una condición inicial, es decir, el

valor de la solución en $t = 0$. Sin embargo, como la solución $u(t, x)$ es una función $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ se conoce como el *dominio*, la condición inicial es también una función, es decir, $u(0, x) = U(x)$, $U : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$. Segundo, el dominio Ω puede ser un intervalo acotado o no acotado $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Debemos especificar cómo se comporta la solución en a y b . Si $a = \infty$ y/o $b = \infty$, opcionalmente pueden definirse condiciones de frontera asintóticas.

Las *condiciones de frontera de Dirichlet* especifican el valor de la solución en una frontera. Matemáticamente, si $\ell \in \mathbb{R}$ es una de las fronteras del dominio, las condiciones de frontera de Dirichlet dictan que $u(t, \ell) = C$ para alguna $C \in \mathbb{R}_+$ y $\forall t > 0$. En modelos poblacionales, comúnmente $C = 0$; es decir, las condiciones de Dirichlet indican que la población no puede sobrevivir en las fronteras. Esto modela condiciones adversas, tales como serían las costas para una población de animales terrestres, o un cultivo bacteriano con antibiótico en las paredes, por ejemplo.

Las *condiciones de frontera de Neumann* dictan el valor de las primeras derivadas espaciales en la frontera, es decir, tienen la forma $\frac{\partial}{\partial x} u(t, \ell) = C$. Dado que podemos pensar en las primeras derivadas espaciales como el *gradiente*, las condiciones de Neumann en modelos poblacionales nos indican si hay inmigración/emigración de individuos hacia/desde el dominio. Comúnmente se toman condiciones de Neumann con $C = 0$. Esto modela fronteras físicas, tales como muros, cercas, montañas, etc, que impiden la entrada y salida de individuos por las fronteras.

En muchos casos, el comportamiento de las soluciones depende fuertemente de las condiciones iniciales y de frontera. Además, las herramientas matemáticas necesarias para poder estudiar las soluciones de manera teórica son un poco avanzadas [14]. Aquí se comentarán dos casos interesantes.

Para el primer ejemplo, supongamos un dominio infinito, sin fronteras. Como condición inicial, supongamos una población bien establecida en el límite izquierdo, pero ausente en el límite derecho. Matemáticamente, consideramos una condición inicial $u(0, x) = U(x)$ tal que

$$(15a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = b,$$

$$(15b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0,$$

donde b corresponde a la solución de equilibrio estable de la ecuación diferencial ordinaria (Ec. [11]).

Dado que la población es más o menos homogénea en $x \rightarrow -\infty$, debe comportarse como dicta la ecuación diferencial ordinaria, y debe mantenerse estable. Lo mismo pasa en el límite $x \rightarrow \infty$, pues $u(t) = 0$ también es una solución de equilibrio de la ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, en cierto punto intermedio debe haber un cambio de la población de tamaño b a tamaño 0, y en esta región, la ecuación diferencial ordinaria deja de ser una buena aproximación, y debemos considerar a la Ec. [14]. Recordemos que este modelo espacial es muy similar al de ecuaciones diferenciales ordinarias, con la característica adicional de que los individuos se mueven aleatoriamente en el modelo espacial. Por lo tanto, algunos individuos de la parte poblada se moverán a la parte vacía, se reproducirán, y empezarán a colonizar cada vez más regiones del espacio. Podemos imaginarnos entonces que la región con una población establecida empezará a “invadir” la región sin población establecida. A este comportamiento se le conoce como *ola invasiva*. Entonces, supondremos que la solución consiste en una ola que va avanzando de la parte poblada a la parte sin poblar, es decir, la solución será idéntica en todo tiempo excepto por un desplazamiento con velocidad v . Matemáticamente, proponemos el siguiente Ansatz

$$(16) \quad u(t, x) = \phi(x - vt),$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, es decir, la solución depende de x y de t exclusivamente a través de la nueva variable independiente $z := x - vt$. Usando la regla de la cadena, vemos que este cambio de variable transforma las derivadas parciales en derivadas ordinarias

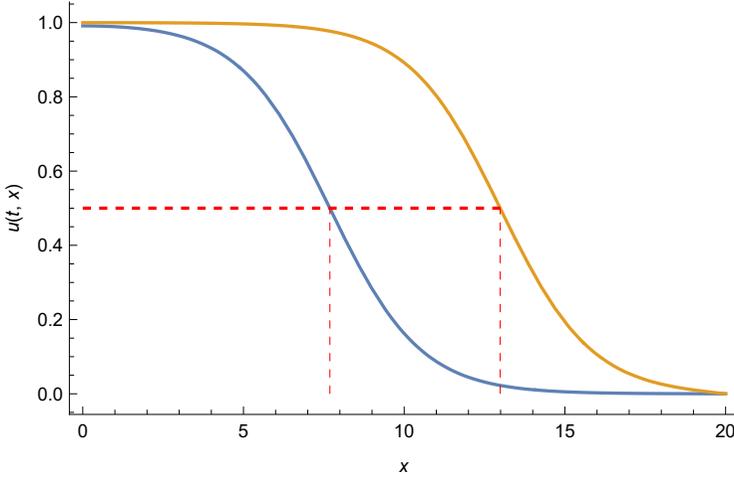


FIGURA 7. Soluciones de ola invasiva de la Ec. [14](#) en Mathematica. Se muestran las soluciones $u(t, x)$ para dos instantes de tiempo diferentes, $t_1 = 15$ (línea azul) y $t_2 = 30$ (línea naranja). Las líneas rojas punteadas indican el valor de x en el cual ambas curvas alcanzan el valor $\frac{1}{2}$; numéricamente se encuentran $x_1 = 7.689$ para la primera curva y $x_2 = 12.987$ para la segunda curva. La velocidad de invasión calculada por simulaciones es $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \approx 0.3532$. El valor de los parámetros es $K = 1$, $D = 1$, $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$. De acuerdo a la Ec. [20](#), la velocidad de invasión teórica es $v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.3536$.

$$(17a) \quad \frac{\partial}{\partial t} u = -v \frac{d}{dz} \phi,$$

$$(17b) \quad \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{d}{dz} \phi.$$

Usando el Ansatz y las identidades anteriores, transformamos la ecuación diferencial parcial (Ec. [14](#)) en la ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera

$$(18a) \quad -v \frac{d}{dz} \phi = K \phi (\phi - a)(b - \phi) + D \frac{d^2}{dz^2} \phi,$$

$$(18b) \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) = b,$$

$$(18c) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = 0,$$

donde usamos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} z = \infty$, dado que $z = x - vt$. El problema, entonces, se reduce “sólo” a resolver la ecuación diferencial ordinaria y encontrar una constante v tal que:

1. $\phi(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{R}$, puesto que las densidades poblacionales no pueden ser negativas, y
2. $\phi(z)$ cumpla con las condiciones de frontera.

En general, no es posible encontrar una solución explícita, pero afortunadamente en el caso particular de la Ec. [14](#) (y en general, siempre que $f(u)$ sea un polinomio de tercer orden), es posible encontrar la velocidad de invasión v usando un segundo Ansatz

$$(19) \quad \frac{d}{dz} \phi = B \phi (\phi - b),$$

donde $B \in \mathbb{R}$ es una constante por determinar. Observando cuidadosamente la Ec. [19](#), este segundo Ansatz simplemente expresa que $\phi(z) = 0$ y $\phi(z) = b$ son soluciones de equilibrio, la primera estable y la segunda inestable. Puede parecer

contraintuitivo, pero las condiciones de frontera requieren que $\phi(z)$ tome valores cada vez más cercanos a 0, y por consecuencia cada vez más diferentes a b , mientras z crece, lo cual corresponde a la estabilidad e inestabilidad de las soluciones de equilibrio, respectivamente.

Derivando la Ec. 19 para obtener la segunda derivada, y sustituyendo las expresiones para las derivadas en la Ec. 18a, agrupando los términos con la misma potencia en ϕ , y comparando los términos de la misma potencia en ambos lados de la igualdad, llegamos a que la velocidad de invasión v está dada por 12¹

$$(20) \quad v = \sqrt{\frac{KD}{2}}(b - 2a).$$

En la Fig. 7 se puede apreciar que el valor teórico de la velocidad de invasión es bastante cercano al valor encontrado resolviendo la ecuación de manera numérica. Esto es notable, sobre todo dado que, por razones computacionales, las soluciones no fueron calculadas en un dominio infinito, sino en el intervalo $[0, 20]$ con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 20$.

La Ec. 20 tiene interpretaciones biológicas interesantes:

1. Una población bien establecida en cierta región del espacio, pero no en otras, tiende a moverse con cierta velocidad v .
2. Si $b > 2a$, es decir, si el tamaño óptimo de la población es al menos el doble del tamaño crítico debajo del cual la población tiende a extinguirse, entonces la población *invade* o coloniza nuevas áreas donde antes no se encontraba, con velocidad proporcional al coeficiente de difusión y a la tasa de crecimiento K .
3. Si $b = 2a$, es decir, si el tamaño óptimo de la población es exactamente el doble del tamaño crítico, la población no invade, y se queda restringida a su rango original. Es decir, tiende a una solución de equilibrio.
4. Si $b < 2a$, es decir, si el tamaño óptimo de la población es comparable al tamaño crítico, el rango de la población se encoge, es decir, empieza a desaparecer de áreas en las cuales se encontraba previamente. Esto sucede porque la población es demasiado sensible a cambios importantes en la densidad poblacional, y el movimiento de individuos fuera de la población establecida es suficiente para llevar a la población por debajo de este tamaño crítico.

Estas consecuencias son importantes para las iniciativas de protección de especies en peligro de extinción, por ejemplo. No basta con reproducir a la especie y reintroducirla a su hábitat en grandes números, también es necesario aumentar el tamaño óptimo de la población, o reducir el tamaño crítico, por ejemplo, conservando las fuentes de alimento y agua en condiciones óptimas, y/o reduciendo la actividad de depredadores en el área.

Un ejemplo de un organismo que muestra comportamiento invasivo en la naturaleza, el cual puede ser modelado a través de ecuaciones diferenciales parciales, es el enrollador de hojas (Fig. 8).

Para el segundo ejemplo, supongamos que tenemos una población de tamaño mayor o igual al tamaño óptimo, con $b > 2a$. En este caso, sin embargo, no supondremos que ya se encuentra establecida en toda una semirecta, sino que se encuentra mayormente restringida a una región determinada, es decir, a un subintervalo finito de \mathbb{R} . Esto es más realista puesto que el espacio disponible para una población siempre es finito. La pregunta es ¿la población sobrevivirá independientemente del tamaño del intervalo inicialmente poblado?

Responder esta pregunta de manera teórica es un poco complicado. De la Ec. 14 puede comprobarse fácilmente que $u(t, x) = 0 \forall t, x$ es una solución de equilibrio independientemente del valor de los parámetros K , a , b y D . Dado que las soluciones

¹El valor de la velocidad de invasión reportado en el texto citado es incorrecto, sin embargo el valor aquí reportado fue calculado correctamente por el alumno Alam Ponce Quiñones, de la Facultad de Ciencias de la UNAM en su tesis de licenciatura, en revisión.



FIGURA 8. Las polillas del género *Choristoneura* son una plaga de las coníferas del continente americano. Su propagación a través del bosque es una ola invasiva. Imagen del dominio público.

de la Ec. 14 se mantienen ordenadas en el tiempo, para que una población sobreviva, debe mostrarse que la solución de onda viajera puede ser alcanzada a partir de la condición inicial. De lo contrario sólo puede tender a la solución trivial, $u(t, x) = 0$.

Dado que esta prueba no es posible de manera exacta para la mayoría (si no es que para todas) las condiciones iniciales, las condición inicial crítica que separa a aquellas condiciones iniciales que resultan en extinción de las que resultan en supervivencia se suele realizar de manera numérica.

Aquí nos limitamos a proporcionar un par de ejemplos en los cuales una población sobrevive, y en donde se extingue, en el límite de tiempos “largos”. En la Fig. 9a podemos observar dos soluciones obtenidas de manera numérica con diferentes condiciones iniciales. En un caso, la mayoría de la población se encuentra inicialmente contenida en un intervalo de longitud seis. Después de cierto tiempo, la población alcanza su tamaño óptimo en un intervalo de longitud considerablemente mayor. En este caso, la población sobrevive y se propaga. En el segundo caso, la mayoría de la población se encuentra inicialmente contenida en un intervalo de longitud dos. Al pasar un poco de tiempo, la población es tan pequeña en todo el espacio, que eventualmente se extingue. En la Fig. 9b vemos que, si definimos a la familia de condiciones iniciales

$$u(0, x) = 2 \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right],$$

parametrizada por σ (con μ fija igual a la posición del máximo de la población), el valor crítico del parámetro $\sigma_{\text{crit}} \approx 4.4483$ divide al conjunto de condiciones iniciales que resultan en supervivencia, de las que resultan en extinción, cuando el valor de los demás parámetros está fijo.

Aun cuando las poblaciones tienen la misma constante de difusión, tasa de reproducción, tamaños de población óptimo y crítico, y distribuciones iniciales mayores al tamaño óptimo en cierta región, una se extingue y la otra prospera, puesto que como se observa en la Fig. 9b el máximo del perfil poblacional para $\sigma < \sigma_{\text{crit}}$ tiende a cero, mientras que para $\sigma > \sigma_{\text{crit}}$ tiende a uno en el límite de tiempos largos. ¿Por qué?

En el primer caso, la población se encuentra presente en una región extendida, por lo que varios individuos se moverán a regiones con una población ya establecida, lo que estabilizará a la población en esta región. Sólo una pequeña fracción de la población en los extremos se moverá a regiones sin colonizar, por lo que no habrá una pérdida importante de individuos en la región inicialmente colonizada.

En el segundo caso, la población es densa, pero espacialmente restringida. Cuando el tiempo pasa, la densidad empieza a disminuir hacia su tamaño óptimo, pero los individuos se empiezan a dispersar rápidamente hacia otros lugares, lo cual hace que la población decrezca aún más. La pérdida de individuos por dispersión es más rápida que el aumento por reproducción, por lo que la población se extingue.

Con este ejemplo vemos que la extensión espacial inicial de la población puede provocar la extinción de una población que prosperaría bajo otras circunstancias. Esto es importante, pues el pronóstico es exactamente opuesto al que habríamos obtenido

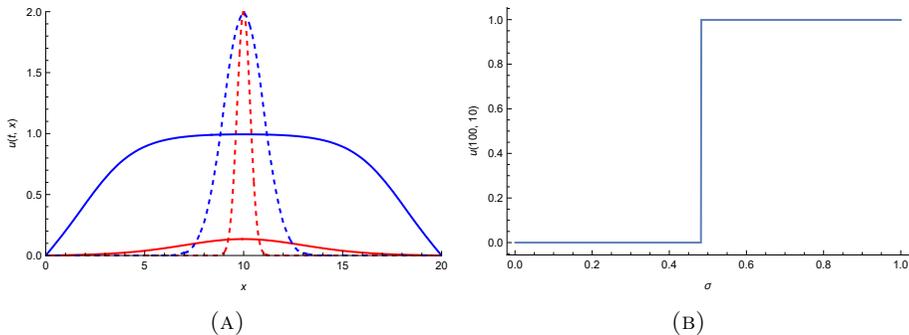


FIGURA 9. Comportamiento de la Ec. 14 con poblaciones iniciales localizadas. Las condiciones iniciales usadas son reescalamientos de la función de densidad de la distribución normal con media μ y desviación estándar σ , denotada por $f_{\mathcal{N}}(x; \mu, \sigma)$. (a) Dos soluciones con diferentes condiciones iniciales a tiempos distintos. Las líneas azules corresponden a la solución para diferentes instantes de tiempo $t = 0$ (línea punteada) y $t = 20$ (línea continua) con condición inicial $u(0, x) = 2\sqrt{2\pi}f_{\mathcal{N}}(x; 10, 1)$. Las líneas rojas corresponden a la solución para $t = 0$ (línea punteada) y $t = 7$ (línea continua) con condición inicial $u(0, x) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{9}}f_{\mathcal{N}}(x; 10, \frac{1}{3})$. (b) Valor de la solución en el centro del dominio para tiempos largos. Se evaluó $u(t, x)$ en $t = 100$ y $x = 10$ con condición inicial $u(0, x) = 2\sqrt{2\pi\sigma^2}f_{\mathcal{N}}(x; \mu, \sigma)$ como función del parámetro σ . El valor de los parámetros en todos los casos es $K = 1$, $D = 1$, $a = \frac{1}{4}$ y $b = 1$. Se usaron condiciones de frontera de Dirichlet $u(t, 0) = u(t, 20) = 0$ en todos los casos. Gráficas hechas en Mathematica.

si hubiéramos ignorado el espacio y usado el modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este resultado también es de importancia en ecología, pues para que una población sobreviva, no sólo es importante que tenga muchos individuos, también es necesario que se encuentre presente en un rango lo suficientemente amplio. Por lo tanto, para especies vulnerables, podría ser importante introducir colonias en un área amplia para asegurar su supervivencia.

CONCLUSIONES

Todos los modelos poblacionales expuestos hasta el momento están fundamentados en los mismos principios generales; específicamente, que la población necesita una cantidad mínima de individuos para sobrevivir, y que una vez superado este mínimo, la población crece hasta alcanzar un nivel de saturación. Sin embargo, cada uno difiere en su formulación matemática (ecuaciones en diferencias, ecuaciones diferenciales ordinarias, y ecuaciones diferenciales parciales), lo cual también se traduce en suposiciones adicionales (poblaciones homogéneas con generaciones diferenciadas, poblaciones homogéneas con generaciones continuas, y poblaciones no homogéneas, respectivamente).

Para mantener el tema a un nivel introductorio y breve, el contenido del texto se limitó a modelos deterministas, es decir, modelos cuyas trayectorias temporales son idénticas si las condiciones iniciales también lo son, y macroscópicos, lo cual quiere decir que se modela el comportamiento de toda la población en conjunto, en lugar de modelar el comportamiento de cada individuo que compone a la misma. Es posible obtener información y predicciones adicionales, así como observar comportamientos interesantes y diferentes, al considerar modelos probabilistas, como procesos estocásticos, y microscópicos, tales como autómatas celulares, entre otros [2, 17].

Cada modelo presenta comportamientos particulares y diferentes a los demás, y hasta predicciones contradictorias entre sí. Por esta razón es que existe una gran discusión respecto al “realismo” de un modelo y de comportamientos artificiales de los mismos (*model artifacts*, en inglés) [19].

Sin embargo, esto es una manera negativa de juzgar el valor de un modelo. Como ya lo hemos comentado, las predicciones del modelo son realistas para poblaciones específicas que cumplen con las suposiciones biológicas particulares a cada tipo de modelo.

Para responder a la pregunta que titula a este artículo ¿cómo modelar una población?, la respuesta depende del organismo a modelar. Como hemos visto, un modelo discreto como las ecuaciones en diferencias finitas son adecuados para modelar el crecimiento de una población con generaciones separadas y bien diferenciadas. Un modelo continuo sin espacio, como las ecuaciones diferenciales ordinarias, son adecuados cuando los individuos se reproducen continuamente, el espacio no se considera importante y la población se encuentra localizada en un área suficientemente grande. Un modelo espacio-temporal, como las ecuaciones diferenciales parciales, son útiles cuando queremos estudiar la propagación de una especie, o la ecología de una especie aislada.

No existe un modelo “superior” al tratar de modelar un fenómeno biológico. Un buen modelo se obtiene al empatar las suposiciones subyacentes a cada metodología matemática con las características biológicas del sistema modelado, y al identificar y reconocer las diferencias entre ambos cuando no se tiene este empate.

REFERENCIAS

- [1] Bonhomme, M., Blancher, A., Cuartero, S., Chikhi, L. & Crouau-Roy, B. *Origin and number of founders in an introduced insular primate: estimation from nuclear genetic data*. Mol. Ecol., 17, no.4, 1009–1019, 2008.
- [2] Böttger, K., Hatzikirou, H., Voss-Böhme, A., Cavalcanti-Adam, E.A., Herrero, M.A. & Deutsch, A. *An emerging allee effect is critical for tumor initiation and persistence*. PLoS Comput. Biol., 11 no.9, e1004366, 2015.
- [3] Cherati, Z.R. & Motlagh, M.R.J. *Control of spatiotemporal chaos in coupled map lattice by discrete-time variable structure control*. Phys. Lett. A, 370, no.3-4, 302–305, 2007.
- [4] Cooley, J.R., Simon, C. & Marshall, D.C. *Temporal separation and speciation in periodical cicadas*. Bioscience, 53, no.2, 151–157, 2003.
- [5] Cushing, J.M. Costantino, R.F., Dennis, B., Desharnais, R.A. & Henson, S.M. *Nonlinear population dynamics: Models, experiments and data*. J. Theor. Biol., 194, no.1, 1–9, 1998.
- [6] Deutsch, A. & Dormann, S. *Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation: Characterization, Examples, and Analysis*. Birkhäuser, 2018.
- [7] Iannelli, M. & Pugliese, A. *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer, 2014.
- [8] Jentsch, P.C., Bauch, C.T. & Anand, M. *Fire mitigates bark beetle outbreaks in serotinous forests*. Theor. Ecol., 14, no.4, 611–621, 2021.
- [9] Kaneko, K. *Overview of coupled map lattices*. Chaos, 2, no.3, 279–282, 1992.
- [10] Kramer, A.M., Dennis, B., Liebhold, A.M. & Drake, J.M. *The evidence for allee effects*. Popul. Ecol., 51, no.3, 341–354, 2009.
- [11] May, R.M. *Uses and abuses of mathematics in biology*. Science, 303, no.5659, 790–793, 2004.
- [12] Mikhailov, A.S. *Foundations of synergetics I: Distributed active systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [13] Mitchell, J.G. *The energetics and scaling of search strategies in bacteria*. Am. Nat., 160, no.6, 727–740, 2002.
- [14] Murray, J.D. *Mathematical biology: I. An introduction*. Springer, 2002.
- [15] Nicholson, A.J.. *Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance*. Aust. J. Zool., 2, no.1, 1–8, 1954.
- [16] Strogatz, S.H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, CRC press, 2018.
- [17] Sun, G.Q. *Mathematical modeling of population dynamics with allee effect*. Nonlinear Dynam., 85, no.1, 1–12, 2016.
- [18] Vaghi, C., Rodallec, A., Fanciullino, R., Ciccolini, J., Mochel, J.P, Mastri, M., Poignard, C., Ebos, J.M.L. & Benzekry, S. *Population modeling of tumor growth curves and the reduced gompertz model improve prediction of the age of experimental tumors*. PLoS Comput. Biol., 16, no.2, e1007178, 2020.

- [19] Van Liedekerke, P., Palm, M.M., Jagiella, N. & Drasdo, D. *Simulating tissue mechanics with agent-based models: concepts, perspectives and some novel results*. *Comp. Part. Mech.*, 2, no.4, 401–444, 2015.
- [20] Xu, L., Zhang, G., Han, B., Zhang, L., Li, M.F. & Han. Y.T. *Turing instability for a two-dimensional logistic coupled map lattice*. *Phys. Lett. A*, 374, no.34, 3447–3450, 2010.

Josué Manik Nava Sedeño,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Circuito exterior, Ciudad Universitaria.
C.P. 04510 Ciudad de México.
e-mail: `manikns@ciencias.unam.mx`



RECOLLEMENTS DE CATEGORÍAS TRIANGULADAS

VALENTE SANTIAGO VARGAS

RESUMEN. En la literatura se encuentran dos definiciones de recollement de categorías trianguladas y es bien conocido para los expertos que estas dos nociones son equivalentes. En este artículo probaremos la equivalencia de las dos definiciones. También daremos una prueba detallada de que un funtor entre categorías trianguladas que es fiel y pleno y que poseé adjunto izquierdo y derecho puede completarse a un recollement, dicho resultado se encuentra en el artículo [5] de E. Cline, B. Parshall, L. Scott.

1. INTRODUCCIÓN

En esta sección introduciremos la noción de categoría triangulada. Un ejemplo de tal noción, son las categorías derivadas, las cuales fueron inventadas por A. Grothendieck y J. L. Verdier en la década de los años 60. Actualmente, las categorías derivadas se han convertido en una herramienta importante en muchas ramas de la matemática como: geometría algebraica, geometría algebraica no conmutativa, teoría de representaciones, física-matemática, etc. En un intento de axiomatizar las propiedades de la categoría derivada, A. Grothendieck y J.L. Verdier introdujeron la noción de categoría triangulada. Durante largo tiempo, las categorías trianguladas se situaron en un extremo del álgebra homológica. Sin embargo, esta visión cambió debido a los trabajos de D. Happel en los años 80, llegando a ser de gran importancia en la teoría de representaciones y en otras áreas como ya comentamos arriba. Recordemos que una categoría aditiva es una categoría \mathcal{T} tal que $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ es un grupo abeliano para todo $X, Y \in \mathcal{T}$, la composición es bilineal y existen los coproductos finitos en \mathcal{T} . Una categoría triangulada consiste de una categoría aditiva \mathcal{T} , un automorfismo $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ (es decir, existe Σ^{-1} tal que $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = 1$ y $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = 1$) llamado “funtor de traslación” y una clase $\Delta_{\mathcal{T}}$ de “triángulos distinguidos” los cuales satisfacen ciertos axiomas. Un triángulo distinguido $\eta \in \Delta_{\mathcal{T}}$ es una terna de morfismos $\eta : X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$ en \mathcal{T} ; y los axiomas que se pide satisfagan dichos triángulos distinguidos son con la finalidad de que modelen (permitan hacer álgebra homológica) las propiedades básicas de las sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ en una categoría abeliana \mathcal{A} .

Dada una categoría aditiva \mathcal{T} y un automorfismo $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, formamos una nueva categoría $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ cuyos objetos son diagramas de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. Los morfismos en $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ son ternas (α, β, γ) de morfismos en \mathcal{T} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A_1) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma(\alpha) \\
 A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(A_2).
 \end{array}$$

La siguiente definición es estandar y la pueden encontrar por ejemplo en [11, Definition 3.1] en pág. 11.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 18E30, 18E35.

Palabras clave. Categorías trianguladas, Localización, Recollement.

Definición 1. Una **categoría triangulada** \mathcal{T} , es una terna $(\mathcal{T}, \Sigma, \Delta)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (a) \mathcal{T} es una categoría aditiva.
- (b) $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ es un automorfismo aditivo.
- (c) Δ es una subcategoría plena de $\text{Diag}(\mathcal{T}, \Sigma)$ (cuyos objetos llamaremos triángulos distinguidos), la cual es cerrada por isomorfismos y satisface los siguientes axiomas:
 - (T1) Para todo morfismo $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{T} existe un triángulo distinguido de la siguiente forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$. Para todo $A \in \mathcal{T}$, el diagrama $0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0$ es un triángulo distinguido.
 - (T2) Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A)$ es un triángulo distinguido, entonces $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma(A) \xrightarrow{-\Sigma(f)} \Sigma(B)$ y $\Sigma^{-1}(C) \xrightarrow{-\Sigma^{-1}(h)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son triángulos distinguidos.
 - (T3) Dados los triángulos distinguidos $A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \xrightarrow{h_i} \Sigma(A_i)$, con $i = 1, 2$; y un par de morfismos $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$, $\beta : B_1 \rightarrow B_2$ tales que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2, \end{array}$$

existe $\gamma : C_1 \rightarrow C_2$ tal que la terna (α, β, γ) es un morfismo de triángulos, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A_1) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma(\alpha) \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(A_2). \end{array}$$

- (T4) El *axioma del octaedro*. Para dos morfismos $f_1 : A \rightarrow B$, $f_2 : B \rightarrow C$ existe un diagrama conmutativo en \mathcal{T}

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{g_1} & X & \xrightarrow{h_1} & \Sigma(A) \\ \parallel & & \downarrow f_2 & & \downarrow \alpha & & \parallel \\ A & \xrightarrow{f_2 f_1} & C & \xrightarrow{g_3} & Y & \xrightarrow{h_3} & \Sigma(A) \\ \downarrow f_1 & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \Sigma(f_1) \\ B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{g_2} & Z & \xrightarrow{h_2} & \Sigma(B) \\ \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \Sigma(g_1) h_2 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(X) & \xlongequal{\quad} & \Sigma(X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en el cual todos los renglones y la tercera columna son triángulos distinguidos.

2. RECOLLEMENTS

Los recollements fueron introducidos por A. A. Beilinson, J. Bernstein y P. Deligne en [3], en la construcción de la categoría de gavillas perversas sobre un espacio singular en su axiomatización de los 6 funtores de Grothendieck para la categoría derivada de gavillas. En el contexto de categorías abelianas, los recollements fueron estudiados por V. Franjou y T. Pirashvili en [7], motivado por el trabajo de MacPherson-Vilonen en la categoría derivada de gavillas perversas. Los recollements de categorías abelianas fueron usados por E. Cline, B. Parshall y L. Scott para estudiar la categoría de módulos

sobre álgebras de dimensión finita sobre un campo K (ver [14]). Recientemente la noción de recollement ha cobrado mucho interes recientemente por lo que este artículo pretende ser una introducción a la teoría de recollements.

A continuación damos la primera definición dada por A. A. Beilinson, J. Bernstein y P. Deligne en 1.4.3 en la pág. 44 de [3].

Dado un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre categorías arbitrarias la **imagen esencial** de F denotado por $\text{Im}(F)$ es la subcategoría plena de \mathcal{B} cuyos objetos son definidos como sigue:

$$\text{Im}(F) := \{B \in \mathcal{B} \mid \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ tal que } F(A) \simeq B\}.$$

Si \mathcal{B} tiene objeto cero, definimos el **kernel** de F como la subcategoría plena de \mathcal{A} definida como sigue $\text{Ker}(F) := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) \simeq 0\}$.

Definición 2. [3, Definition 1.4.3] Consideremos el siguiente diagrama de funtores triangulados entre categorías trianguladas

$$\begin{array}{ccc} \longleftarrow & i^* & \longleftarrow \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ \longleftarrow & i^! & \longleftarrow & j_* & \longleftarrow \end{array}$$

Se dice que tal diagrama forma un **recollement** si:

- $(i^*, i_* = i_!, i^!)$ y $(j_!, j^! = j^*, j_*)$ son triples adjuntos, i.e. (i^*, i_*) , $(i_!, i^!)$ $(j_!, j^!)$ son (j^*, j_*) pares adjuntos;
- $j^* i_* = 0$;
- $i_*, j_!, j_*$ son fieles y plenos;
- Para cada $A \in \mathcal{A}$ existen triángulos distinguidos en \mathcal{A} :

$$j_! j^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^*(A) \longrightarrow \Sigma(j_! j^!(A)),$$

$$i_! i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_* j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_! i^!(A)).$$

Observación 1. Hay un error de dedo en la notación de la definición original pues los autores consideran el diagrama: $\mathcal{D}_F \xrightarrow{i_*} \mathcal{D} \xrightarrow{j_*} \mathcal{D}_U$. El error consiste en que en la sucesión anterior, debe ser j^* en lugar de j_* .

Ahora enunciamos la segunda definición, por ejemplo ver pág. 96 en [17].

Definición 3. Consideremos el siguiente diagrama de funtores triangulados entre categorías trianguladas

$$\begin{array}{ccc} \longleftarrow & i^* & \longleftarrow \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ \longleftarrow & i^! & \longleftarrow & j_* & \longleftarrow \end{array}$$

Se dice que tal diagrama forma un **recollement** si:

- $(i^*, i_* = i_!, i^!)$ y $(j_!, j^! = j^*, j_*)$ son triples adjuntos, i.e. (i^*, i_*) , $(i_!, i^!)$ $(j_!, j^!)$ son (j^*, j_*) pares adjuntos;
- $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$;
- $i_*, j_!, j_*$ son funtores fieles y plenos.

Recordemos que en una categoría aditiva el coproducto de una familia vacía de objetos es el objeto cero.

LEMA 4. Consideremos funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ entre categorías aditivas tal que (F, G) es un par adjunto. Si F es el funtor cero, entonces G es el funtor cero.

Demostración. Sabemos que existe isomorfismo funtorial para $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}(A, G(B)).$$

Como $G(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}(A, G(B)) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. En particular, para $B = F(A)$ tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A)) = 0$ y esto implica que $1_{F(A)} = 0$ y por lo tanto concluimos que $F(A) = 0$. Luego, F es el funtor cero. \square

LEMA 5. *Consideremos un recollement como en las Definiciones 2 o 3. Entonces*

- (a) $i^*j_! = 0$,
- (b) $i^!j_* = 0$.

Demostración. Solo demostraremos (b) pues (a) es dual. Notemos primero que como $(i_*, i^!)$ y (j^*, j_*) son pares adjuntos, entonces $(j^*i_*, i^!j_*)$ es un par adjunto. En efecto, para $B \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}$ tenemos los siguientes isomorfismos functoriales

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(j^*i_*(B), C) &\simeq \mathrm{Hom}(i_*(B), j_*C) && \text{[pues } (j^*, j_*) \text{ es un par adjunto]} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(B, i^!j_*(C)) && \text{[pues } (i_*, i^!) \text{ es un par adjunto.]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(j^*i_*, i^!j_*)$ es un par adjunto. Por Definiciones 2(b) o 3(b), tenemos que $j^*i_* = 0$. Luego, por Lema 4, concluimos que $i^!j_* = 0$. \square

La siguiente Proposición será muy útil en las pruebas de los resultados de este artículo.

PROPOSICIÓN 6. *Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, un funtor. Las siguientes condiciones se satisfacen*

- (a) *Sea $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ adjunto a izquierda de F . Entonces F es fiel y pleno si y sólo si la counidad (del par adjunto (G, F)) $\varepsilon : G \circ F \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ es un isomorfismo.*
- (b) *Sea $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ adjunto a derecha de F . Entonces F es fiel y pleno si y sólo si la unidad (del par adjunto (F, H)) $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow H \circ F$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [4, Theorem 3.4.1] en pág. 114 y su dual. \square

PROPOSICIÓN 7. *Consideremos un recollement*

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} \\ \mathcal{B} \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} \mathcal{C} \\ \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

como en la Definición 3. Entonces existen triángulos distinguidos

$$j_!j^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*(A) \longrightarrow \Sigma(j_!j^!(A))$$

$$i_!i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(A)).$$

Demostración. Demostremos la existencia del segundo triángulo ya que la existencia del primero es análoga. Consideremos los pares adjuntos $(i_*, i^!)$ y (j^*, j_*) . Entonces, tenemos unidad $\eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow i^!i_*$ y counidad $\varepsilon : i_*i^! \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$ de la adjunción $(i_*, i^!)$; y también la unidad $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow j_*j^*$ y counidad $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ de la adjunción (j^*, j_*) . Consideremos la unidad $\eta' : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow j_*j^*$. Luego, para $A \in \mathcal{A}$ tenemos morfismo:

$$\eta'_A : A \rightarrow j_*j^*(A).$$

Por Definición 1(T1) y (T2), podemos completar al siguiente triángulo distinguido en \mathcal{A} :

$$(*) : X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\eta'_A} j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(X).$$

Lo que haremos en el resto de la prueba es ver que el morfismo α es isomorfo al morfismo $\varepsilon_A : i_*i^!(A) \rightarrow A$.

Primero, dado que (j^*, j_*) es un par adjunto y j_* es fiel y pleno (ver Definición 3(c)), por Proposition 6(a), tenemos que la counidad $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_C$ es un isomorfismo. Para $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{C}$ consideremos las identidades triangulares de la adjunción (j^*, j_*) (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{j^*(A)} = \varepsilon'_{j^*(A)} \circ j^*(\eta'_A)$$

$$1_{j_*(C)} = j_*(\varepsilon'_C) \circ \eta'_{j_*(C)}.$$

Como $\varepsilon' : j^*j_* \rightarrow 1_C$ es un isomorfismo, concluimos de las identidades triangulares que $j^*(\eta'_A)$ es isomorfismo. Aplicando j^* al triángulo $(*)$ tenemos el triángulo distinguido en \mathcal{C} :

$$j^*(X) \xrightarrow{j^*(\alpha)} j^*(A) \xrightarrow{j^*(\eta'_A)} j^*j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(j^*(X)).$$

Como $j^*(\eta'_A)$ es isomorfismo, concluimos que $j^*(X) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Como $\text{Ker}(j^*) = \text{im}(i_*)$ (ver Definición 3(b)), tenemos que existe $Y \in \mathcal{B}$ tal que $i_*(Y) \simeq X$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_*(Y) = X$.

Como $(i_*, i^!)$ es un par adjunto e i_* es fiel y pleno, por Proposition 6(b), tenemos que la unidad $\eta : 1_B \rightarrow i^!i_*$ es un isomorfismo. Luego, $i_*(\eta_Y)$ es un isomorfismo ya que η_Y lo es. Por otro lado, aplicando $i^!$ al triángulo $(*)$, tenemos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{B} :

$$i^!(X) \xrightarrow{i^!(\alpha)} i^!(A) \xrightarrow{i^!(\eta'_A)} i^!j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i^!(X)).$$

Por Lemma 5(b), tenemos que $i^!j_* = 0$, y por lo tanto $i^!j_*j^*(A) = 0$, de donde concluimos que $i^!(\alpha)$ es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41).

Ahora, recordemos que para $B \in \mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$ tenemos isomorfismo funtorial

$$\Gamma : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A)),$$

donde para $f \in \text{Hom}(i_*(B), A)$ se tiene que $\Gamma(f) := i^!(f) \circ \eta_B$ y para $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A))$ tenemos que $\Gamma^{-1}(g) = \varepsilon_A \circ i_*(g)$. Luego, considerando el morfismo $\alpha : i_*(Y) = X \rightarrow A$ del triángulo $(*)$ tenemos que la igualdad $\Gamma^{-1}\Gamma(\alpha) = \alpha$ se traduce en la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} i_*i^!(i_*(Y)) & \xrightarrow{i_*i^!(\alpha)} & i_*i^!(A) \\ \uparrow i_*(\eta_Y) & & \downarrow \varepsilon_A \\ X = i_*(Y) & \xrightarrow{\alpha} & A. \end{array}$$

En el diagrama anterior $i_*(\eta_Y)$ y $i_*i^!(\alpha)$ son isomorfismos. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{\eta'_A} & j_*j^*(A) & \longrightarrow & \Sigma(X) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow 1 & & & & \\ i_*i^!(A) & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(i_*i^!(A)) \end{array}$$

donde $\lambda := i_*i^!(\alpha) \circ i_*(\eta_Y)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, existe isomorfismo $\theta : j_*j^*(A) \rightarrow Z$ tal que el diagrama anterior se completa a un isomorfismo de triángulos (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto, el morfismo α lo podemos sustituir por ε_A y así tenemos triángulo distinguido

$$i_*i^!(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A \xrightarrow{\eta'_A} j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_*i^!(A)).$$

Como $i_* = i_!$ tenemos el triángulo deseado. \square

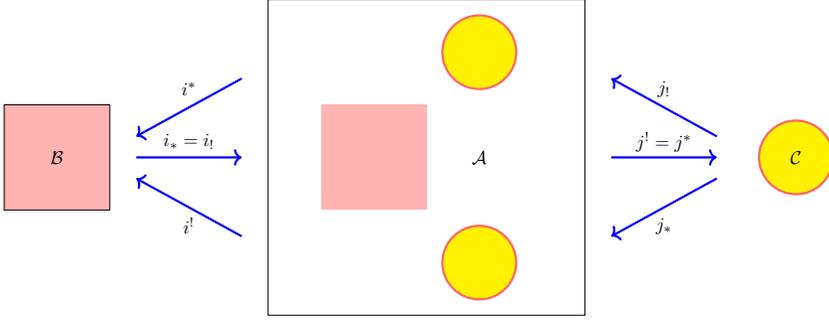


FIGURA 1. Idea general de recollement

PROPOSICIÓN 8. *Consideremos un recollement*

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{C} \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

como en la Definición 2. Entonces $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$.

Demostración. Como $j^*i_* = 0$ tenemos que $\text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(j^*)$. Ahora veamos la otra contención. Sea $A \in \text{Ker}(j^*)$. Por Definición 2(d) sabemos que tenemos triángulo distinguido

$$i_!i^!(A) \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*(A) \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(A)).$$

Como $j^*(A) = 0$, tenemos que $j_*j^*(A) = 0$ y por lo tanto el morfismo $i_!i^!(A) \longrightarrow A$ del triángulo de arriba es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Es decir, $A \simeq i_!i^!(A) = i_*i^!(A)$. Lo cual prueba que $A \in \text{Im}(i_*)$ y por lo tanto $\text{Im}(i_*) = \text{Ker}(j^*)$. \square

COROLARIO 9. *Las definiciones de recollement de 2 y 3 son equivalentes.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 7 y 8. \square

La Figura 1 ilustra a grandes rasgos el recollement de la Definición 3.

3. COMPLETACIÓN DE RECOLLEMENTS

Recordemos la siguiente definición (ver [11] en pág. 182).

Definición 10. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada con traslación Σ . Sea \mathcal{S} una subcategoría plena de \mathcal{T} . Se dice que \mathcal{S} es una **subcategoría triangulada** de \mathcal{T} si

- $\Sigma^n(X) \in \mathcal{S}$ para todo $X \in \mathcal{S}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$,
- Sea $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X)$ un triángulo en \mathcal{T} . Si dos objetos del conjunto $\{X, Y, Z\}$ pertenecen a \mathcal{S} entonces el tercero también está en \mathcal{S} .

Sea \mathcal{S} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} , se dice que \mathcal{S} es **gruesa** si cada vez que tenemos morfismos $X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{i} X$ tal que $\pi \circ i = 1_Y$ con $X \in \mathcal{S}$, entonces $Y \in \mathcal{S}$. Es decir, \mathcal{S} es gruesa si es cerrada por sumandos directos.

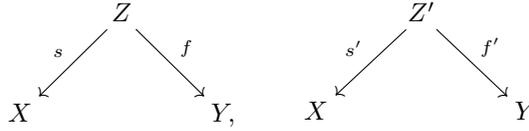
Observación 2. Recordemos la siguiente construcción. Dada \mathcal{T} categoría triangulada y \mathcal{X} subcategoría triangulada de \mathcal{T} definimos los morfismos $S(\mathcal{X})$ como los morfismos $f : A \longrightarrow B$ tal que cuando completamos f a un triángulo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \Sigma(A)$$

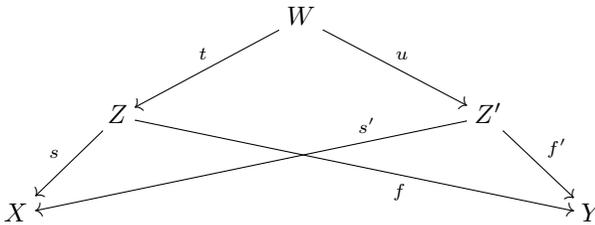
tenemos que $C \in \mathcal{X}$.

En este caso tenemos la **localización de Verdier** de \mathcal{T} respecto a la subcategoría triangulada \mathcal{X} , la cual es por definición $\mathcal{T}/\mathcal{X} := \mathcal{T}[S(\mathcal{X})^{-1}]$ y se tiene el funtor canónico $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$. Recordemos que $\mathcal{T}[S(\mathcal{X})^{-1}]$ es notación para denotar a la categoría que se construye a partir de \mathcal{T} en la cual los morfismos que pertenecen a $S(\mathcal{X})$ se vuelven invertibles (ver sección 2.2 en pág. 164 de [11]).

A continuación, veamos a grandes rasgos como se construye el cociente de Verdier \mathcal{T}/\mathcal{X} . Para esto, hacemos la siguiente construcción. Consideremos dos diagramas

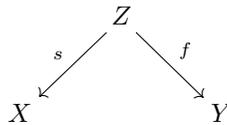


con $s, s' \in S(\mathcal{X})$. Decimos que dichos diagramas están relacionados si existen morfismos $t : W \rightarrow Z$ y $u : W \rightarrow Z'$ en \mathcal{T} tal que el siguiente diagrama conmuta



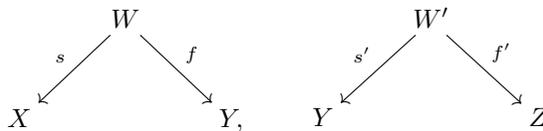
y además $st = s'u \in S(\mathcal{X})$. Se demuestra que la relación anterior es de equivalencia y por lo tanto podemos hablar de clases de equivalencia de diagramas de la forma anterior (ver [13, Lemma 2.1.14] en pág. 76). El cociente de Verdier \mathcal{T}/\mathcal{X} se define como sigue.

- (a) Los objetos de \mathcal{T}/\mathcal{X} son los mismos objetos que los de \mathcal{T} .
- (b) Sean X y Y dos objetos de \mathcal{T}/\mathcal{X} , un morfismo de X a Y en \mathcal{T}/\mathcal{X} consiste de la clase de equivalencia de diagramas de la forma

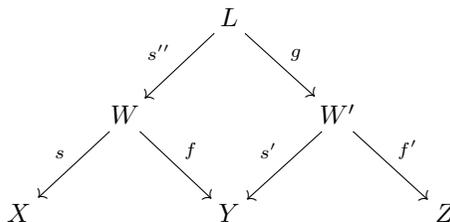


con $s \in S(\mathcal{X})$.

La composición en \mathcal{T}/\mathcal{X} se define como sigue. Consideremos un morfismo de X a Y y otro morfismo de Y a Z representados por los siguientes diagramas respectivamente:



con $s, s' \in S(\mathcal{X})$. Para hacer la composición, se construye un diagrama conmutativo de la siguiente forma



donde $s'' \in S(\mathcal{X})$. Luego, la composición se define como la clase de equivalencia del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ ss'' \swarrow & & \searrow f'g \\ X & & Z. \end{array}$$

Se demuestra que la composición definida arriba está bien definida (ver [13, Lemma 2.1.18] en pág. 80) y que \mathcal{T}/\mathcal{X} es una categoría (ver [13, Definition 2.1.20] en pág. 81). Por otro lado, el functor $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ satisface que si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{T} entonces $Q(f)$ queda representado por la clase de equivalencia del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ 1_X \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y. \end{array}$$

Para el siguiente resultado, se necesita la siguiente noción. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' categorías trianguladas. Un functor $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ es **triangulado** si manda triángulos distinguidos de \mathcal{T} en triángulos distinguidos de \mathcal{T}' . Se tiene el siguiente Teorema (ver [13, Theorem 2.1.8] en pág. 74).

TEOREMA 11. *Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y \mathcal{X} una subcategoría triangulada de \mathcal{T} . Entonces \mathcal{T}/\mathcal{X} es una categoría triangulada y $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ es un functor triangulado. Además el functor $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{X}$ satisface la siguiente propiedad universal: si $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ es un functor triangulado tal que $\mathcal{X} \subseteq \text{Ker}(F)$, entonces existe un único functor triangulado $G : \mathcal{T}/\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{T}/\mathcal{X} \\ F \downarrow & \swarrow G & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

Observación 3. Recordemos para conveniencia del lector, cómo actúa el functor $G : \mathcal{T}/\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ en morfismos. Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{X}}(X, Y)$. Entonces α está representado por un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{X})$. Como \mathcal{T}/\mathcal{X} es la categoría donde $Q(s')$ es invertible para todo $s' \in S(\mathcal{X})$ (ver [13, Lemma 2.1.21]) se tiene que $\alpha = Q(g)Q(s)^{-1}$. Por otro lado, como $\mathcal{X} \subseteq \text{Ker}(F)$, se puede ver que $F(s')$ es invertible para todo $s' \in S(\mathcal{X})$. Por lo tanto, tenemos que $G(\alpha)$ se define como sigue:

$$G(\alpha) := F(g) \circ F(s)^{-1}.$$

Ahora bien, si \mathcal{E} es una subcategoría triangulada de una categoría triangulada \mathcal{D} , se define $\mathcal{E}^\perp := \{Y \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \ \forall X \in \mathcal{E}\}$. De manera dual, se define ${}^\perp\mathcal{E}$.

El siguiente teorema se puede encontrar en [5, Theorem 2.1] en la pág. 506. En el artículo [5] sólo se da un esbozo de la prueba. Uno de los objetivos principales de este artículo es dar la demostración con todo detalle de tal resultado.

TEOREMA 12. [5, Theorem 2.1] *Sea $i_* : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ un functor entre categorías trianguladas que es fiel y pleno. Supongamos que i_* tiene un adjunto izquierdo i^* y un adjunto derecho $i^!$ que son funtores de categorías trianguladas. Sea \mathcal{E} la imagen*

esencial de \mathcal{D}' bajo i_* (i.e, los objetos de \mathcal{D} que son isomorfos a $i_*(X)$ para algún $X \in \mathcal{D}'$). Entonces

- (a) $\text{Ker}(i^!) = \mathcal{E}^\perp$.
- (b) $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$, en particular \mathcal{E} es una subcategoría gruesa de \mathcal{D} .
- (c) Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow i_*i^*$ del par adjunto (i^*, i_*) . Para cada $X \in \mathcal{D}$ existe un triángulo distinguido

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$$

que cumple las siguientes condiciones:

- (c1) $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo,
- (c2) $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$,
- (c3) $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, B)$ es un isomorfismo para todo $s : A \rightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$.
- (d) El morfismo cociente $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$ tiene adjunto izquierdo $j_!$ y adjunto derecho j_* y tales adjuntos son fieles y plenos y además $\mathcal{E} = \text{Ker}(j^*)$. Es decir, tenemos el siguiente recollement

$$\begin{array}{ccccc} & & i^* & & j_! \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{i_* = i_!} & \mathcal{D} & \xrightarrow{j^! = j^*} & \mathcal{D}/\mathcal{E} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & i^! & & j_* \end{array}$$

Demostración. (a) Consideremos $\mathcal{E}^\perp := \{Y \in \mathcal{D} \mid \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \ \forall X \in \mathcal{E}\}$. Sea $Y \in \mathcal{E}^\perp$, para $X \simeq i_*(X') \in \mathcal{E}$ con $X' \in \mathcal{D}'$ tenemos que $0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(X'), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', i^!(Y))$ ya que $(i_*, i^!)$ es par adjunto. En particular, tomando $X' := i^!(Y) \in \mathcal{D}'$ tenemos que

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(i^!(Y)), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^!(Y), i^!(Y)).$$

Por lo tanto, $i^!(Y) = 0$. Esto prueba que $\mathcal{E}^\perp \subseteq \text{Ker}(i^!)$.

Ahora, sea $Y \in \text{Ker}(i^!)$. Para $X \simeq i_*(X') \in \mathcal{E}$ con $X' \in \mathcal{D}'$ tenemos que $0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', 0) = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(X', i^!(Y)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i_*(X'), Y)$. Por lo tanto, $Y \in \mathcal{E}^\perp$ y así tenemos que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \mathcal{E}^\perp$. Probándose que $\text{Ker}(i^!) = \mathcal{E}^\perp$.

- (b) Consideremos el par adjunto $(i_!, i^!)$ y su counidad $\varepsilon' : i_!i^! \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$. Entonces para cada $X \in \mathcal{D}$ tenemos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{D}

$$(*) : i_!i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow Y \longrightarrow \Sigma(i_!i^!(X))$$

Aplicando el funtor $i^!$ a este triángulo, tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D}'

$$(**) : i^!i_!i^!(X) \xrightarrow{i^!(\varepsilon'_X)} i^!(X) \longrightarrow i^!(Y) \longrightarrow \Sigma(i^!i_!i^!(X))$$

Como $i_* = i_!$ es fiel y pleno, por Proposición 6(b), tenemos que la unidad (del par adjunto $(i_!, i^!)$) $\eta' : 1_{\mathcal{D}'} \rightarrow i^!i_!$ es un isomorfismo. Consideremos las identidades triangulares del par adjunto $(i_!, i^!)$ para cada $Z \in \mathcal{D}'$ y $W \in \mathcal{D}$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{i_!(Z)} = \varepsilon'_{i_!(Z)} \circ i_!(\eta'_Z)$$

$$1_{i^!(W)} = i^!(\varepsilon'_W) \circ \eta'_{i^!(W)}.$$

Luego, como $\eta'_{i^!(X)}$ es un isomorfismo, concluimos que $i^!(\varepsilon'_X)$ es un isomorfismo.

Por lo tanto, del triángulo (**) concluimos que $i^!(Y) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Luego, del inciso (a) de este teorema, tenemos que $Y \in \mathcal{E}^\perp$. Ahora veamos que $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. En efecto, es claro que $\mathcal{E} \subseteq {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$.

Por otro lado, supongamos que $X \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Como $i_!i^!(X) = i_*i^!(X) \in \mathcal{E}$ y

$\mathcal{E} \subseteq {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$, concluimos que $i_!i^!(X) = i_*i^!(X) \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Dado que $i_!i^!$ es un funtor triangulado, tenemos que $\Sigma(i_!i^!(X)) = i_!i^!(\Sigma(X)) = i_*i^!(\Sigma(X)) \in \mathcal{E}$ y por lo tanto $\Sigma(i_!i^!(X)) \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$.

Luego, en el triángulo $(*)$, tenemos que $\Sigma(i_!i^!(X)), X \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Sea $L \in \mathcal{E}^\perp$, aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, L)$ al triángulo $(*)$ tenemos la sucesión larga

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma(i_!i^!(X)), L) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, L) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L) = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, L) = 0$ y así obtenemos que $Y \in {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. Ya vimos arriba que $Y \in \mathcal{E}^\perp$ y por lo tanto, $Y \in ({}^\perp(\mathcal{E}^\perp)) \cap \mathcal{E}^\perp$. Así, tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y) = 0$ y en consecuencia $Y = 0$.

Luego, del triángulo $(*)$ concluimos que $\varepsilon'_X : i_!i^!(X) \longrightarrow X$ es un isomorfismo (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Es decir, tenemos que $X \simeq i_*i^!(X) \in \mathcal{E}$. Por lo tanto ${}^\perp(\mathcal{E}^\perp) \subseteq \mathcal{E}$ y así $\mathcal{E} = {}^\perp(\mathcal{E}^\perp)$. De esta igualdad, es fácil ver que \mathcal{E} es cerrada por sumandos directos, es decir, que \mathcal{E} es una subcategoría gruesa.

- (c1) Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \longrightarrow i_*i^*$ del par adjunto (i^*, i_*) . Entonces, para $X \in \mathcal{D}$ podemos formar el siguiente triángulo en \mathcal{D} (ver Definición 1(T1)):

$$(\clubsuit) : X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0).$$

Notemos que como $i_*i^*(X) \in \mathcal{E}$, entonces el morfismo u_X del triángulo (\clubsuit) está en $S(\mathcal{E})$ (ver observación 2, para definición de $S(\mathcal{E})$). Como i_* es fiel y pleno, por Proposición 6(a) tenemos que la counidad $\varepsilon : i^*i_* \longrightarrow 1_{\mathcal{D}'}$ es un isomorfismo. Aplicando i^* al triángulo (\clubsuit) tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D}' :

$$(\triangle) : i^*(X_0) \xrightarrow{i^*(u_X)} i^*(X) \xrightarrow{i^*(\eta_X)} i^*i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(i^*(X_0)).$$

Consideremos las identidades triangulares para $X \in \mathcal{D}$ y $Y \in \mathcal{D}'$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99):

$$1_{i^*(X)} = \varepsilon_{i^*(X)} \circ i^*(\eta_X)$$

$$1_{i_*(Y)} = i_*(\varepsilon_Y) \circ \eta_{i_*(Y)}.$$

Como $\varepsilon_{i^*(X)}$ es un isomorfismo, concluimos que $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo.

- (c2) Por (c1) sabemos que $i^*(\eta_X)$ es un isomorfismo. Luego, del triángulo (\triangle) de arriba, concluimos que $i^*(X_0) = 0$ (ver [13, Corollary 1.2.6] en pág. 41). Por otro lado, para $Y \in \mathcal{D}'$, tenemos que $i_*(Y) \in \mathcal{E}$ y como (i^*, i_*) es un par adjunto, tenemos que

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(X_0), Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, i_*(Y)).$$

Por lo tanto, $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$.

- (c3) Veamos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, B)$ es un isomorfismo para todo $s : A \longrightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$.

En efecto, como $s \in S(\mathcal{E})$ tenemos que cuando completamos s a un triángulo distinguido

$$A \xrightarrow{s} B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma(A),$$

se tiene que $C \in \mathcal{E}$. Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, -)$ al triángulo anterior, tenemos la sucesión exacta larga

$$\mathcal{D}(X_0, \Sigma^{-1}(C)) \longrightarrow \mathcal{D}(X_0, A) \xrightarrow{s^*} \mathcal{D}(X_0, B) \longrightarrow \mathcal{D}(X_0, C)$$

donde $s^* := \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$. Como $C, \Sigma^{-1}(C) \in \mathcal{E}$ y $X_0 \in {}^\perp\mathcal{E}$, tenemos la siguiente igualdad $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, \Sigma^{-1}(C)) = 0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, C)$ y por lo tanto $s^* := \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$ es un isomorfismo.

- (d) Primero, notemos que como \mathcal{E} es una subcategoría triangulada de \mathcal{D} , existe el cociente de Verdier \mathcal{D}/\mathcal{E} y funtor triangulado $j^* := Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$.

Ahora veamos que $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$ tiene adjunto izquierdo $j_!$. Como la prueba es larga, dividiremos la prueba en varios pasos.

(1). Existe funtor $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

Sea $f : X \rightarrow X'$ un morfismo en \mathcal{D} ; luego por la naturalidad de la unidad η del par adjunto (i^*, i_*) tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & i_* i^*(X) \\ \downarrow f & & \downarrow i_* i^*(f) \\ X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & i_* i^*(X'). \end{array}$$

Luego, por Definición 1 (T3), tenemos que existe $\bar{f} : X_0 \rightarrow X'_0$ tal que se tiene el siguiente morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{u_X} & X & \xrightarrow{\eta_X} & i_* i^*(X) & \longrightarrow & \Sigma(X_0) \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f & & \downarrow i_* i^*(f) & & \downarrow \Sigma(\bar{f}) \\ X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X' & \xrightarrow{\eta_{X'}} & i_* i^*(X') & \longrightarrow & \Sigma(X'_0). \end{array}$$

Como $u_{X'} \in S(\mathcal{E})$ (pues $i_* i^*(X) \in \mathcal{E}$) y por el inciso (c3), se tiene el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X'_0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, u_{X'})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X').$$

Por lo tanto, es único el morfismo $\bar{f} : X_0 \rightarrow X'_0$ que hace conmutar el diagrama anterior. Así, podemos definir el funtor

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D},$$

como sigue: $\Phi(X) = X_0$ para $X \in \mathcal{D}$ y $\Phi(f) = \bar{f}$ para $f : X \rightarrow X'$ un morfismo en \mathcal{D} . Utilizando el hecho que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s)$ es un isomorfismo para todo $s : A \rightarrow B$ en $S(\mathcal{E})$, se puede ver que en efecto Φ es un funtor.

(2). El funtor Φ del paso (1) es un funtor triangulado.

Consideremos el siguiente triángulo en \mathcal{D} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X).$$

Al igual como hicimos arriba, podemos construir el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{u_X} & X \\ \downarrow \bar{f} & (I) & \downarrow f \\ Y_0 & \xrightarrow{u_Y} & Y. \end{array}$$

Por [12, Lemma 2.6] (Lema del 9) aplicado al cuadrado anterior tenemos el siguiente diagrama donde todos los renglones y columnas son triángulos distinguidos y todos los cuadrados conmutan a excepción del marcado con (X) :

$$\begin{array}{ccccccc}
(\star) : \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi)} & \Sigma(W) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma)} & \Sigma^2(X_0) \\
\uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{d} & L & \xrightarrow{k} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow \eta_X & & \uparrow \eta_Y & & \uparrow e & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\
\uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow \mu & & \uparrow \Sigma(u_X) \\
X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(X_0).
\end{array}$$

Notemos que como $i_* i^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es triangulado, tenemos el siguiente triángulo en \mathcal{D} :

$$i_* i^*(X) \xrightarrow{i_* i^*(f)} i_* i^*(Y) \xrightarrow{i_* i^*(g)} i_* i^*(Z) \xrightarrow{i_* i^*(h)} \Sigma(i_* i^*(X)).$$

Luego, existe isomorfismo $\xi : i_* i^*(Z) \rightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36):

$$\begin{array}{ccccccc}
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow \xi & & \downarrow \Sigma(1) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{d} & L & \xrightarrow{k} & \Sigma(i_* i^*(X))
\end{array}$$

Entonces podemos suponer que el diagrama (\star) tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc}
(\star\star) : \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi)} & \Sigma(W) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma)} & \Sigma^2(X_0) \\
\uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow \eta_X & & \uparrow \eta_Y & & \uparrow e' & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\
\uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow \mu & & \uparrow \Sigma(u_X) \\
X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma(X_0).
\end{array}$$

Aplicando $i_* i^*$ al morfismo de triángulos del segundo y tercer renglón del diagrama anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
i_* i^*(X) & \longrightarrow & i_* i^*(Y) & \longrightarrow & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(i_* i^*(X)) \\
\uparrow i_* i^*(\eta_X) & & \uparrow i_* i^*(\eta_Y) & & \uparrow i_* i^*(e') & & \uparrow \Sigma(i_* i^*(\eta_X)) \\
i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & Y & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X))
\end{array}$$

Por inciso (c1), tenemos que $i_* i^*(\eta_X)$ y $i_* i^*(\eta_Y)$ son isomorfismos, por lo tanto concluimos que $i_* i^*(e') : i_* i^*(Z) \rightarrow i_* i^*(Z)$ es un isomorfismo (ver [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36).

Consideremos la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow i_* i^*$ y counidad $\varepsilon : i^* i_* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto (i^*, i_*) . Como i_* es fiel y pleno, por Proposición 6(a), tenemos que la

cunidad $\varepsilon : i_* i^* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo. Recordemos que el isomorfismo funtorial dado por adjunción:

$$\Theta : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(Z), i^*(Z))$$

está definido como sigue: para $\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z))$ se tiene que $\Theta(\lambda) = \varepsilon_{i^*(Z)} \circ i^*(\lambda)$ y para $\zeta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}'}(i^*(Z), i^*(Z))$ se tiene que $\Theta^{-1}(\zeta) = i_*(\zeta) \circ \eta_Z$. Luego, para el morfismo $e' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, i_* i^*(Z))$ del diagrama (***) se tiene que $\Theta^{-1}\Theta(e') = e'$. El cual se traduce en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(e')} & i_* i^* i_*(i^*(Z)) \\ \eta_Z \uparrow & & \downarrow j := i_*(\varepsilon_{i^*(Z)}) \\ Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z). \end{array}$$

Notemos que $j := i_*(\varepsilon_{i^*(Z)})$ es un isomorfismo pues la cunidad $\varepsilon : i_* i^* \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo; y además vimos arriba que $i_* i^*(e')$ es un isomorfismo. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde los morfismos verticales son isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) \\ \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') \\ Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z). \end{array}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(Z_0) \\ & & \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') & & \\ W & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & \Sigma(W) \end{array}$$

Por lo tanto existe un isomorfismo $\alpha : Z_0 \rightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmuta (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36):

$$\begin{array}{ccccc} Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & \xrightarrow{\eta_Z} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & Z_0[1] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow 1_Z & & \downarrow j \circ i_* i^*(e') & & \downarrow \alpha[1] \\ W & \xrightarrow{\mu} & Z & \xrightarrow{e'} & i_* i^*(Z) & \longrightarrow & W[1] \end{array}$$

Por lo tanto el triángulo en la tercera columna del diagrama (***) lo podemos sustituir por el triángulo superior del diagrama de arriba. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} (\star \star \star) : & \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\psi')} & \Sigma(Z_0) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma')} & \Sigma^2(X_0) \\ & \uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\ & i_* i^*(X) & \xrightarrow{i_* i^*(f)} & i_* i^*(Y) & \xrightarrow{i_* i^*(g)} & i_* i^*(Z) & \xrightarrow{i_* i^*(h)} & \Sigma(i_* i^*(X)) \\ & \eta_X \uparrow & & \eta_Y \uparrow & & \eta_Z \uparrow & & \uparrow \Sigma(\eta_X) \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\ & \uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow u_Z & & \uparrow \Sigma(u_X) \\ & X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\psi'} & Z_0 & \xrightarrow{\gamma'} & \Sigma(X_0). \end{array}$$

Ahora, como sólo hay un único morfismo de Y_0 a Z_0 que hace conmutar el diagrama anterior (pues Φ es functor), concluimos que $\psi' = \bar{g} = \Phi(g)$.

Veamos que $\Sigma(X_0) \simeq \Sigma(X)_0$.

Como i_*i^* es un functor triangulado, existe un isomorfismo functorial $\beta : (i_*i^*) \circ \Sigma \rightarrow \Sigma \circ (i_*i^*)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $X \in \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} i_*i^*(\Sigma(X)) & \xrightarrow{\beta_X} & \Sigma(i_*i^*(X)) \\ \eta_{\Sigma(X)} \uparrow & & \Sigma(\eta_X) \uparrow \\ \Sigma(X) & \xrightarrow{1} & \Sigma(X). \end{array}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama de triángulos

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma(X)_0 & \xrightarrow{u_{\Sigma(X)}} & \Sigma(X) & \xrightarrow{\eta_{\Sigma(X)}} & i_*i^*(\Sigma(X)) & \longrightarrow & \Sigma(\Sigma(X)_0) \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \beta_X & & \\ \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(u_X)} & \Sigma(X) & \xrightarrow{\Sigma(\eta_X)} & \Sigma(i_*i^*(X)) & \xrightarrow{-\Sigma(a)} & \Sigma^2(X_0) \end{array}$$

Por lo tanto, existe un isomorfismo $\varphi : (\Sigma(X))_0 \rightarrow \Sigma(X_0)$ tal que el diagrama de arriba se convierte en un morfismo de triángulos (ver Definición 1 (T3) y [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto el diagrama (***) se convierte en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma(X_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{f})} & \Sigma(Y_0) & \xrightarrow{\Sigma(\bar{g})} & \Sigma(Z_0) & \xrightarrow{-\Sigma(\gamma'')} & \Sigma^2(X_0) \\ \uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c' & (X) & \uparrow -\Sigma(a) \\ i_*i^*(X) & \xrightarrow{i_*i^*(f)} & i_*i^*(Y) & \xrightarrow{i_*i^*(g)} & i_*i^*(Z) & \xrightarrow{i_*i^*(h)} & i_*i^*(\Sigma(X)) \\ \eta_X \uparrow & & \eta_Y \uparrow & & \eta_Z \uparrow & & \eta_{\Sigma(X)} \uparrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma(X) \\ \uparrow u_X & & \uparrow u_Y & & \uparrow u_Z & & \uparrow u_{\Sigma(X)} \\ X_0 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y_0 & \xrightarrow{\bar{g}} & Z_0 & \xrightarrow{\gamma''} & \Sigma(X)_0. \end{array}$$

Ahora, sabemos otra vez que sólo hay un morfismo de Z_0 a $\Sigma(X)_0$ que hace conmutar el diagrama de arriba (pues $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor). Por lo tanto, tenemos que $\gamma'' = \bar{h} = \Phi(h)$. Y así tenemos que

$$X_0 \xrightarrow{\bar{f}} Y_0 \xrightarrow{\bar{g}} Z_0 \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma(X_0) \simeq \Sigma(X)_0$$

es un triángulo distinguido. Esto prueba que $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor triangulado.

(3). El functor Φ induce un functor triangulado $\bar{\Phi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$.

Para esto, verifiquemos que $\bar{\Phi}(X) = 0$ para toda $X \in \mathcal{E}$. Por (c) tenemos triángulo.

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_*i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0).$$

Como $X \in \mathcal{E}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = i_*(Y)$ para algún $Y \in \mathcal{D}'$. Entonces tenemos que $\eta_X := \eta_{i_*(Y)} : i_*(Y) \rightarrow i_*i^*(i_*(Y))$. Ahora por las identidades triangulares, tenemos que $1_{i_*(Y)} = i_*(\varepsilon_Y) \circ \eta_{i_*(Y)}$. Como la counidad ε es un isomorfismo, tenemos que $i_*(\varepsilon_Y)$ es un isomorfismo. Luego por la identidad de arriba, tenemos que $\eta_{i_*(Y)} = \eta_X$ es un isomorfismo y así del triángulo de arriba tenemos que $X_0 = 0$ (ver [13, Proposition 1.1.20] en pág. 36). Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{E} \subseteq \text{Ker}(\bar{\Phi})$. Luego por la

propiedad universal del cociente de Verdier (ver Teorema 11), tenemos un funtor triangulado $\bar{\Phi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{D} \\ j^* \downarrow & \nearrow \bar{\Phi} & \\ \mathcal{D}/\mathcal{E} & & \end{array}$$

Por observación 3, tenemos que $\bar{\Phi}$ está definido en morfismos como sigue. Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$ que está representado por el diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$. Entonces, tenemos que $\alpha = j^*(g)j^*(s)^{-1}$. Por lo tanto, tenemos que $\bar{\Phi}(\alpha)$ se define como:

$$\bar{\Phi}(\alpha) := \Phi(g) \circ \Phi(s)^{-1}.$$

(4). Veamos que $\bar{\Phi}$ es adjunto a izquierda de $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{E}$. Para esto, veamos que existe isomorfismo funtorial

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\bar{\Phi}(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, j^*(Y)),$$

para $X \in \mathcal{D}/\mathcal{E}$ y $Y \in \mathcal{D}$. Por construcción, tenemos que $\bar{\Phi}(X) = X_0$ y $j^*(Y) = Y$. Es decir, probaremos que existe isomorfismo funtorial $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$.

Para esto, definiremos isomorfismo de grupos

$$\Gamma_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y).$$

En efecto, por construcción (inciso (c)), tenemos un triángulo distinguido en \mathcal{D} :

$$X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_* j^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$$

donde $u_X \in S(\mathcal{E})$. Luego, para $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y)$ podemos formar el siguiente morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} de X a Y (que llamaremos α) dado por el diagrama:

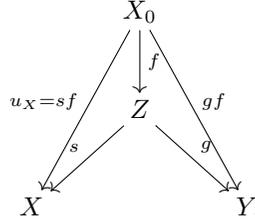
$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X & & Y \end{array}$$

Es decir, $\alpha = j^*(\theta)j^*(u_X)^{-1} : X \rightarrow Y$. Por lo tanto, definimos $\Gamma_{X,Y}(\theta) := j^*(\theta)j^*(u_X)^{-1}$.

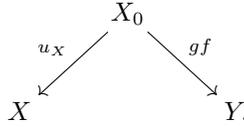
(4i). Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es suprayectiva. En efecto, sea $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y)$ que está representado por el diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$. Como $s \in S(\mathcal{E})$, por (c3), tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, s) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X)$ es un isomorfismo. Luego, como $u_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, X)$, existe un único morfismo $f : X_0 \rightarrow Z$ tal que $sf = u_X$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo



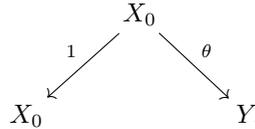
Es fácil ver que el morfismo ρ está representado también por la clase de equivalencia del siguiente diagrama



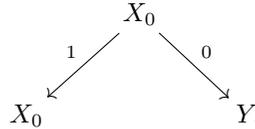
Luego, por construcción, tenemos que $\Gamma_{X,Y}(gf) = j^*(gf) \circ j^*(u_X)^{-1} = \rho$. Por lo tanto $\Gamma_{X,Y}$ es suprayectiva.

Ahora notemos que $\Gamma_{X,Y}$ es morfismo de grupos (pues j^* es functor aditivo).

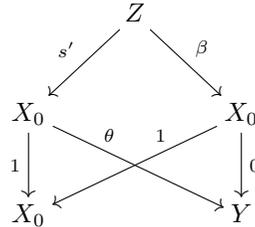
(4ii). Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es inyectiva. En efecto, sea $\theta : X_0 \rightarrow Y$ tal que $\Gamma_{X,Y}(\theta) = j^*(\theta) \circ j^*(u_X)^{-1} = 0$. De donde concluimos que $j^*(\theta) = 0$. Recordemos que $j^*(\theta)$ está representado por el siguiente diagrama



Además, el morfismo $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X_0, Y)$ está representado por el diagrama



Como $j^*(\theta) = 0$, existen morfismos $s' : Z \rightarrow X_0$ y $\beta : Z \rightarrow X_0$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo (ver la relación de equivalencia de diagramas definida antes de este teorema):



y el morfismo $s' = 1 \circ s' \in S(\mathcal{E})$. En particular, tenemos que $\theta s' = 0$ con $s' \in S(\mathcal{E})$. Por [11, Lemma 4.6.1] en pág. 4.6.1, tenemos que $S(\mathcal{E})$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación de \mathcal{D} (ver pag. 173 de [11], para la noción de sistema multiplicativo). En particular, $S(\mathcal{E})$ admite un cálculo de fracciones a derecha. Así, por el dual de LF3 en pág. 172 de [11], tenemos que existe $s'' : Y \rightarrow X_0$ tal que $s'' \in S(\mathcal{E})$ y $s''\theta = 0$.

Por (c3), sabemos que tenemos el siguiente isomorfismo de grupos

$$\text{Hom}(X_0, s'') : \text{Hom}(X_0, Y) \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0).$$

Luego, como $\text{Hom}(X_0, s'')(\theta) = s''\theta = 0$, concluimos que $\theta = 0$ y así concluimos que $\Gamma_{X,Y}$ es biyectiva.

(4iii). **Veamos que $\Gamma_{X,Y}$ es functorial.** Para esto, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$(\diamond) : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X_0, Y) & \xrightarrow{\Gamma_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X'_0, Y') & \xrightarrow{\Gamma_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X', Y') \end{array}$$

para $\alpha : X' \rightarrow X$ un morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} y $\beta : Y \rightarrow Y'$ morfismo en \mathcal{D} . Supongamos que α está representado por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow \gamma \\ X' & & X \end{array}$$

con $s \in S(\mathcal{E})$, es decir, $\alpha := j^*(\gamma) \circ j^*(s)^{-1}$.

Por un lado, tenemos que $(\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta))) (\Gamma_{X,Y}(\theta)) = j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$. Para $\theta : X_0 \rightarrow Y$, se tiene que $\Gamma_{X,Y}(\theta) = j^*(\theta) \circ j^*(u_X)^{-1}$ está dado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X & & Y \end{array}$$

Y los morfismos α y $j^*(\beta)$ están representados por los siguientes diagramas respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow \gamma \\ X' & & X \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ 1 \swarrow & & \searrow \beta \\ Y & & Y' \end{array}$$

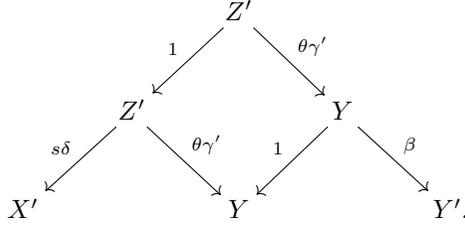
Luego, para calcular la composición $\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha$ construimos el siguiente diagrama

$$(\blacksquare) : \begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & & \delta \swarrow & & \searrow \gamma' \\ & Z & & & X_0 \\ s \swarrow & & \gamma \searrow & & u_X \swarrow & & \searrow \theta \\ X' & & X & & X & & Y \end{array}$$

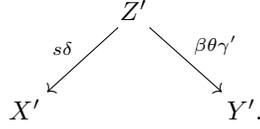
donde $\delta \in S(\mathcal{E})$. Por lo tanto, la composición $\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha$ está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ s\delta \swarrow & & \searrow \theta\gamma' \\ X' & & Y \end{array}$$

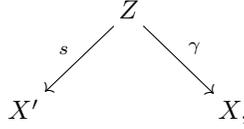
Ahora, para calcular la composición $j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$, construimos el siguiente diagrama



Luego, tenemos que la composición $j^*(\beta) \circ (\Gamma_{X,Y}(\theta) \circ \alpha)$ está representada por el diagrama



Ahora calculemos $\Gamma_{X',Y'}\left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta)\right)$. Como $\alpha = j^*(\gamma)j^*(s)^{-1}$ está representado por el diagrama



tenemos que $\overline{\Phi}(\alpha) = \Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}$.

Recordemos que por construcción, $\Phi(\gamma)$ y $\Phi(s)$ son los únicos morfismos tal que los siguientes cuadrados conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 Z_0 & \xrightarrow{uz} & Z \\
 \downarrow \Phi(s) & & \downarrow s \\
 X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X'
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{ccc}
 Z_0 & \xrightarrow{uz} & Z \\
 \downarrow \Phi(\gamma) & & \downarrow \gamma \\
 X_0 & \xrightarrow{u_X} & X
 \end{array}$$

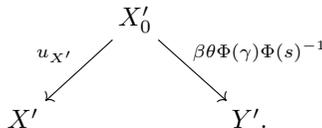
Por lo tanto, $\overline{\Phi}(\alpha) = \Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}$ está dado por la composición:

$$X'_0 \xrightarrow{\Phi(s)^{-1}} Z_0 \xrightarrow{\Phi(\gamma)} X_0.$$

Luego, tenemos que $\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta) = \beta \circ (\theta \circ (\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1}))$ está dado por la siguiente composición:

$$X'_0 \xrightarrow{\Phi(s)^{-1}} Z_0 \xrightarrow{\Phi(\gamma)} X_0 \xrightarrow{\theta} Y \xrightarrow{\beta} Y'.$$

Por definición de $\Gamma_{X',Y'}$ tenemos que $\Gamma_{X',Y'}\left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta)\right)(\theta)\right)$ está representado por el siguiente diagrama



Para finalizar, veamos que los siguientes dos diagramas representan el mismo morfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} & Z' & \\ s\delta \swarrow & & \searrow \beta\theta\gamma' \\ X' & & Y', \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X'_0 & \\ u_{X'} \swarrow & & \searrow \beta\theta\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1} \\ X' & & Y'. \end{array}$$

Del diagrama conmutativo (■) de arriba podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Z'_0 & \xrightarrow{u_{Z'}} & Z' & & \\ \downarrow \Phi(\delta) & & \downarrow \delta & \searrow \gamma' & \\ Z_0 & \xrightarrow{u_Z} & Z & & X_0 \\ \downarrow \Phi(\gamma) & & \downarrow \gamma & \swarrow u_X & \\ X_0 & \xrightarrow{u_X} & X & & \end{array}$$

Del diagrama anterior, tenemos que $\gamma' \circ u_{Z'} : Z'_0 \rightarrow X_0$ es tal que $u_X \circ (\gamma' \circ u_{Z'}) = (\gamma\delta) \circ u_{Z'}$, pero sabemos que $\Phi(\gamma\delta) : Z'_0 \rightarrow X_0$ es el único morfismo tal que $u_X \circ \Phi(\gamma\delta) = (\gamma\delta) \circ u_{Z'}$ (pues Φ es funtor bien definido). Por lo tanto, concluimos que $\gamma' \circ u_{Z'} = \Phi(\gamma\delta) = \Phi(\gamma)\Phi(\delta)$. También, por construcción de $\Phi(s\delta)$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z'_0 & \xrightarrow{u_{Z'}} & Z' \\ \downarrow \Phi(s\delta) & & \downarrow s\delta \\ X'_0 & \xrightarrow{u_{X'}} & X'. \end{array}$$

Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & Z'_0 & & \\ & & \swarrow \Phi(s\delta) & & \searrow u_{Z'} \\ & X'_0 & & & Z' \\ & \swarrow u_{X'} & & \searrow s\delta & \\ X' & & & & Y' \\ & & & & \swarrow \beta\theta\gamma' \\ & & & & \searrow \beta\theta\Phi(\gamma)\Phi(s)^{-1} \end{array}$$

Ya que $\beta \circ \theta \circ \Phi(\gamma) \circ \Phi(s)^{-1} \circ \Phi(s\delta) = \beta \circ \theta \circ \Phi(\gamma) \circ \Phi(\delta) = \beta \circ \theta \circ \gamma' \circ u_{Z'}$ y también $u_{X'} \circ \Phi(s\delta) = s \circ \delta \circ u_{Z'}$. Como $s, \delta \in S(\mathcal{E})$, tenemos que $s\delta \in S(\mathcal{E})$. Luego, tenemos que $\Phi(s\delta)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} y así tenemos el siguiente triángulo

$$Z'_0 \xrightarrow{\Phi(s\delta)} X'_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(Z'_0).$$

donde $0 \in \mathcal{E}$. Es decir, tenemos que $\Phi(s\delta) \in S(\mathcal{E})$. Por lo tanto, los dos diagramas requeridos son equivalentes. Por lo tanto,

$$\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(\alpha, j^*(\beta)) \right) (\Gamma_{X,Y}(\theta)) = \Gamma_{X',Y'} \left(\left(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\overline{\Phi}(\alpha), \beta) \right) (\theta) \right).$$

Es decir, el diagrama (◇) conmuta. Concluimos que, $\Gamma_{X,Y}$ es una biyección natural y así $\overline{\Phi}$ es adjunto a izquierda de j^* . Definamos $j_! := \overline{\Phi}$ el adjunto a izquierda de j^* .

(5). Ahora veamos que $j_! : \mathcal{D}/\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ es fiel y pleno. Para esto, por Proposición 6(b), basta ver que la unidad $\eta : 1_{\mathcal{D}/\mathcal{E}} \rightarrow j^*j_!$ del par adjunto

$(j_!, j^*)$ es un isomorfismo.

Consideremos el isomorfismo funtorial

$$\Gamma_{X, j_!(X)} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(j_!(X), j_!(X)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{E}}(X, j^* j_!(X))$$

La unidad de la adjunción se puede definir como $\eta_X := \Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)})$ (ver [4, Theorem 3.1.5] en pág. 99). Recordemos que $j_!(X) = \overline{\Phi}(X) = X_0$ y $j^* j_!(X) = X_0$. Entonces, por construcción, tenemos que $\Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)})$ está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ u_X \swarrow & & \searrow 1 \\ X & & X_0. \end{array}$$

Como $u_X \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, sabemos entonces que $\Gamma_{X, j_!(X)}(1_{j_!(X)}) := j^*(1_{X_0})j^*(u_X)^{-1} = j^*(u_X)^{-1}$ el cual claramente es un isomorfismo en \mathcal{D}/\mathcal{E} . Por lo tanto η es un isomorfismo y así, tenemos que $j_* := \overline{\Phi}$ es fiel y pleno.

(6). Construcción del adjunto a derecha de j^* . De la misma manera considerando la counidad $\varepsilon' : i_* i^! \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto $(i_*, i^!)$ para cada $X \in \mathcal{D}$ consideramos el siguiente triángulo distinguido en \mathcal{D}

$$i_* i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Sigma(i_* i^!(X)).$$

De la misma manera como se hizo antes, se puede definir functor triangulado $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ como $\Psi(X) := X_0$. Este functor triangulado induce un functor $\overline{\Psi} : \mathcal{D}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ y se demuestra que $j_* := \overline{\Psi}$ es un adjunto derecho de j^* que es fiel y pleno.

(7). Prueba de que $\text{Ker}(j^*) = \mathcal{E} = \text{Im}(i_*)$. Finalmente, notemos que por la construcción del cociente de Verdier, se tiene que $\text{Ker}(j^*)$ es la menor subcategoría triangulada y gruesa que contiene a \mathcal{E} (ver Proposition 4.6.2 (3) en [11], en pág. 183). Por el inciso (b), sabemos que \mathcal{E} ya es gruesa y por lo tanto, tenemos que $\text{Ker}(j^*) = \mathcal{E} = \text{Im}(i_*)$. Por lo tanto, hemos completado i_* a un recollement. □

Observación 4. Notemos que el triángulo $X_0 \xrightarrow{u_X} X \xrightarrow{\eta_X} i_* i^*(X) \longrightarrow \Sigma(X_0)$ de 12(c) es básicamente el primer triángulo del inciso (d) de la definición 2 de recollement.

El triángulo $i_* i^!(X) \xrightarrow{\varepsilon'_X} X \longrightarrow X_0 \longrightarrow \Sigma(i_* i^!(X))$ que se construye al final de la prueba del Teorema 12 es básicamente el segundo triángulo del inciso (d) de la definición 2 de recollement.

Observación 5. En el Teorema 12, dada la mitad izquierda de un recollement, completamos a un recollement. También, si se tiene el lado derecho de un recollement, este se puede completar a un recollement, este resultado se puede ver en [6, Theorem 1.1] en pág. 86. En [14, Theorem 2.4] en pág. 26 se enuncian las dos completaciones, pero sin demostraciones.

El siguiente resultado es importante y nos dá una relación de cierto tipo de adjunciones y la categoría de fracciones de una categoría. Recordemos a grandes rasgos que es la categoría de fracciones (para más detalles ver [11, Section 2.2] en pág. 164). Dada una categoría \mathcal{C} y un conjunto de morfismos S de \mathcal{C} , la **categoría de fracciones** de \mathcal{C} con respecto a S es una categoría $\mathcal{C}(S^{-1})$ junto con un functor canónico $Q_S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ que tiene las siguientes propiedades:

- (a) $Q_S(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}(S^{-1})$ para todo $s \in S$,
- (b) Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un functor tal que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in S$, entonces existe un único functor $\overline{F} : \mathcal{C}(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q_S$.

Notemos que la categoría de fracciones es una generalización del concepto de localización en álgebra conmutativa.

PROPOSICIÓN 13. *Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un par de funtores y supongamos que F es adjunto a izquierda de G . Sea $\Sigma = \Sigma(F)$ el conjunto de morfismos σ de \mathcal{C} tal que $F(\sigma)$ es un isomorfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) G es fiel y pleno.
- (b) La counidad $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ del par adjunto (F, G) es un isomorfismo.
- (c) El funtor $\overline{F} : \mathcal{C}(\Sigma^{-1}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q_{\Sigma}$ es una equivalencia.

Demostración. Ver [8, Proposition 1.3] en pág. 7, o también [11, Proposition 2.3.1] en pág. 165. \square

Observación 6. Tenemos el dual de la Proposición 13 (ver nota final de la pág. 8 en [8]). Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un par de funtores y supongamos que F es adjunto a izquierda de G . Sea $\Sigma = \Sigma(G)$ el conjunto de morfismos σ de \mathcal{D} tal que $G(\sigma)$ es un isomorfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) F es fiel y pleno.
- (b) La unidad $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ del par adjunto (F, G) es un isomorfismo.
- (c) El funtor $\overline{G} : \mathcal{D}(\Sigma^{-1}) \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $G = \overline{G} \circ Q_{\Sigma}$ es una equivalencia.

Para finalizar el artículo, daremos el siguiente teorema, el cual nos ayuda a visualizar ciertas subcategorías de un recollement (ver figura 2, el cual ilustra el Teorema 14).

TEOREMA 14. *Consideremos un recollement de categorías trianguladas*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \begin{array}{c} \xleftarrow{i^*} \\ \xleftarrow{i_* = i_!} \\ \xleftarrow{i^!} \end{array} & \mathcal{A} & \begin{array}{c} \xleftarrow{j_!} \\ \xleftarrow{j^! = j^*} \\ \xleftarrow{j_*} \end{array} & \mathcal{C}. \end{array}$$

Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$
- (b) ${}^{\perp}\text{Im}(i_*) = \text{Im}(j_!) = \text{Ker}(i^*)$
- (c) $\mathcal{C} \simeq \text{Im}(i_*)^{\perp}$
- (d) $\mathcal{C} \simeq {}^{\perp}\text{Im}(i_*)$
- (e) $\mathcal{A} / {}^{\perp}\text{Im}(i_*) \simeq \mathcal{B}$
- (f) $\mathcal{A} / \text{Im}(i_*)^{\perp} \simeq \mathcal{B}$

Demostración. (a) Veamos primero que $\text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$. Por Lema 5(b), sabemos que $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Ker}(i^!)$. Ahora veamos que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \text{Im}(j_*)$. Sea $A \in \mathcal{A}$ con $A \in \text{Ker}(i^!)$, por Definición 2(d) tenemos triángulo distinguido en \mathcal{A} :

$$i_! i^!(A) \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} j_* j^*(A) \longrightarrow i_! i^!(A)[1].$$

Como $A \in \text{Ker}(i^!)$, tenemos que $i_! i^!(A) = 0$ y por lo tanto, tenemos que α es un isomorfismo. De esta manera, $A \simeq j_* j^*(A) \in \text{Im}(j_*)$. Esto prueba que $\text{Ker}(i^!) \subseteq \text{Im}(j_*)$ y por lo tanto $\text{Ker}(i^!) = \text{Im}(j_*)$.

Ahora, probemos que $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*)$. Para esto, veamos que $\text{Im}(j_*) \subseteq \text{Im}(i_*)^{\perp}$. Sea $A' = j_*(C) \in \text{Im}(j_*)$ y $A = i_*(B) \in \text{Im}(i_*)$. Luego, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), j_*(C)) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^! j_*(C)) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, 0) = 0$. Por lo tanto, $A' \in \text{Im}(i_*)^{\perp}$.

Veamos que $\text{Im}(i_*)^{\perp} \subseteq \text{Im}(j_*)$. Sea $A \in \text{Im}(i_*)^{\perp}$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(B), A) = 0$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por adjunción tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, i^!(A)) = 0$ para $B \in \mathcal{B}$. En particular, para $B = i^!(A)$ tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(i^!(A), i^!(A)) = 0$ y entonces $i^!(A) = 0$. Pero, ya vimos que $\text{Ker}(i^!) = \text{Im}(j_*)$, por lo tanto, tenemos que $A \in \text{Im}(j_*)$. Esto prueba que $\text{Im}(i_*)^{\perp} \subseteq \text{Im}(j_*)$ y así $\text{Im}(i_*)^{\perp} = \text{Im}(j_*)$.

- (b) Similar a (a).

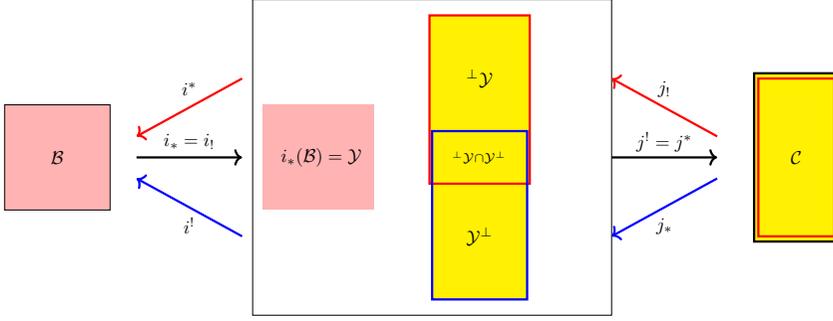


FIGURA 2. Descripción de ${}^\perp\text{Im}(i_*) = \text{Im}(j_!) = \text{Ker}(i^*)$ y $\text{Im}(i_*)^\perp = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$ (ver Teorema 14).

- (c) Como j_* es fiel y pleno, sabemos que j_* produce una equivalencia $j_* : \mathcal{C} \rightarrow \text{Im}(j_*)$. Pero por (a) tenemos que $\text{Im}(i_*)^\perp = \text{Im}(j_*)$. Esto prueba la equivalencia requerida.
- (d) Similar a (c).
- (e) Consideremos el funtor triangulado $i^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $S := S(\text{Ker}(i^*))$ (ver observación 2). Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{A} . Tenemos que $i^*(f)$ es isomorfismo si y sólo si $f \in S$. En efecto, completamos f a un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma(X)$$

Luego, tenemos un triángulo distinguido en \mathcal{B} :

$$i^*(X) \xrightarrow{i^*(f)} i^*(Y) \xrightarrow{i^*(g)} i^*(Z) \xrightarrow{i^*(h)} \Sigma(X)$$

Luego, tenemos que $i^*(f)$ es isomorfismo si y sólo si $i^*(Z) = 0$ y esto pasa si y sólo si $f \in S$. Por lo tanto, por Proposición 13, tenemos equivalencia de categorías

$$\mathcal{A}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}.$$

Pero por definición del cociente de Verdier, tenemos que $\mathcal{A}/S := \mathcal{A}[S^{-1}]$ (ver pág. 182 de [11]). Por lo tanto, tenemos equivalencia de categorías $\mathcal{A}/\text{Ker}(i^*) \simeq \mathcal{B}$.

- (f) Similar a (e), utilizando el resultado dual de la Proposición 13, (ver Observación 6).

□

Observación 7. En general, no es cierto que $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^\perp\text{Im}(i_*) = \{0\}$. En efecto, se sabe que se tiene el siguiente recollement (ver [11] sección 4.14 en pág. 190)

$$\begin{array}{ccc}
 & i^* & j_! \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 \text{K}_a(\text{Mod}(A)) & \xrightarrow{i_* = i_!} & \text{K}(\text{Mod}(A)) & \xrightarrow{j^! = j^*} & \text{D}(\text{Mod}(A)) \\
 \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow \\
 & i^! & j_* & &
 \end{array}$$

donde $\text{K}_a(\text{Mod}(A))$ es la subcategoría de $\text{K}(\text{Mod}(A))$ que consta de los complejos acíclicos. En este caso se tiene que $\text{Im}(i_*) = \text{K}_a(\text{Mod}(A))$ y se tiene lo siguiente (ver sección 4 de [1] en pág. 235):

- (a) Los objetos de $\text{K}_a(\text{Mod}(A))^\perp = \text{Im}(j_*) = \text{Ker}(i^!)$ se llaman complejos K -inyectivos y

(b) Los objetos de ${}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A)) = \text{Im}(j_i) = \text{Ker}(i^*)$ se llaman complejos K -proyectivos.

Recordemos que para dos complejos X^\bullet, Y^\bullet en $K(\text{Mod}(A))$ se tiene un complejo $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ y se tiene la fórmula (para detalles ver sección 14 en pág. 195 de [9])

$$H^i\left(\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)\right) = \text{Hom}_{K(\text{Mod}(A))}(X^\bullet, Y^\bullet[i]).$$

Notemos que un complejo Z^\bullet es acíclico si y sólo si $Z^\bullet[i]$ es acíclico. Luego, usando la fórmula de arriba, tenemos que

$$Y^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A))^\perp \iff \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \text{ es acíclico para todo } X^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A))$$

$$X^\bullet \in {}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A)) \iff \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \text{ es acíclico para todo } Y^\bullet \in K_a(\text{Mod}(A)).$$

Por lo que la definición de complejo K -proyectivo y complejo K -inyectivo dada arriba, es equivalente a la definición original dada por N. Spaltenstein en [18] en pág. 127. Ahora bien, por [18, Proposition 1.2] en pág. 128, tenemos que si P es un A -módulo proyectivo, entonces $P[0]$ es un complejo K -proyectivo y también que si I es un A -módulo inyectivo, entonces $I[0]$ es un complejo K -inyectivo. Más generalmente, complejos de proyectivos acotados por arriba son complejos K -proyectivos y complejos de inyectivos acotado por abajo son complejos K -inyectivos (ver ejemplo 3.2 de [18] en pág. 132). Entonces, si M es un A -módulo que es proyectivo e inyectivo, tenemos que $M[0] \in K_a(\text{Mod}(A))^\perp \cap {}^{\perp}K_a(\text{Mod}(A))$ y $M[0] \neq 0 \in K(\text{Mod}(A))$. Al parecer, en general no hay una descripción de $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^{\perp}\text{Im}(i_*)$ como en el caso abeliano; y tampoco hay un criterio para saber cuando $\text{Im}(i_*)^\perp \cap {}^{\perp}\text{Im}(i_*) = \{0\}$.

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por las sugerencias dadas para mejorar este artículo.

REFERENCIAS

[1] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López and M. J. Souto Salorio. *Localization in categories of complexes and unbounded resolutions*, Canad. J. Math. 52 (2000), no. 2, 225-247

[2] M. Auslander. *Representation Theory of Artin Algebras I*. Comm. in Algebra 1(3), 177-268 (1974).

[3] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Faisceaux pervers (French)*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5-171.

[4] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Vol. 1. Basic Category Theory*. Cambridge University Press, pp 345, (1994).

[5] E. Cline, B. Parshall, L. Scott. *Algebraic stratification in representation categories*. Journal of Algebra. Volume 117, Issue 2, pp. 504-521 (1988).

[6] E. Cline, B. Parshall, L. Scott. *Finite dimensional algebras and highest weight categories*. J. reine angew. Math. 391, 85-99, (1988).

[7] V. Franjou, T. Pirashvili. *Comparison of abelian categories recollements*. Documenta Math. 9, 41-56 (2004).

[8] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg (1967).

[9] S. I. Gelfand, Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Second Edition. Springer Monographs in Mathematics (2002).

[10] R. Gentle. *T.T.F. theories in Abelian categories*. Commun. Algebra 16, 877-908 (1996).

[11] T. Holm, P. Jorgensen, R. Rouquier. *Triangulated Categories*. USA Cambridge University Press (2010).

[12] J. P. May. *The Additivity of Traces in Triangulated Categories*. Advances in Mathematics 163, 34-73 (2001).

[13] A. Neeman. *Triangulated Categories*. Annals of Mathematics Studies, 148. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[14] B. Parshall, L.L. Scott. *Derived categories, quasi-hereditary algebras and algebraic groups*. Proc. of the Ottawa-Moosone Workshop in algebra (1987), Math. Lect. Note Series, Carleton University and Universite de Ottawa (1988).

[15] C. Psaroudakis. *Homological Theory of Recollements of Abelian Categories*. J. Algebra. Vol. 398, 63-110 (2014).

- [16] C. Psaroudakis, J. Vitoria. *Recollements of module categories*. J. Appl. Categor. Struct. 22, 579-593 (2014).
- [17] C. Psaroudakis. *A representation-theoretic approach to recollements of abelian categories*. Contemp. Math. of Amer. Math. Soc. Vol. 716, 67-154 (2018).
- [18] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*. Compositio Math. 65, no. 2, 121-154 (1988).
- [19] B. Stenstrom. *Rings of quotients*. Springer (1975).

Valente Santiago Vargas,
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Departamento de Matemáticas.
Av. Universidad 3000
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México
e-mail: valente.santiago@ciencias.unam.mx



MODELOS OCULTOS DE MARKOV: UNA APLICACIÓN DE ESTIMACIÓN BAYESIANA PARA SERIES DE TIEMPO FINANCIERAS

LIZBETH NARANJO ALBARRÁN & LUZ JUDITH RODRÍGUEZ ESPARZA

RESUMEN. Los Modelos Ocultos de Markov (HMM) han sido muy importantes últimamente debido a su gran cantidad de aplicaciones prácticas. Una aplicación que ha cobrado relevancia es en el modelado de series de tiempo financieras, pues muchas de éstas presentan el llamado “agrupamiento de volatilidad”, es decir, periodos con actividad significativa tienden a ocurrir cercanamente. En este trabajo incrustamos un HMM -para cambiar entre dos o más variables latentes- dentro del modelo econométrico Markov-Switching GARCH, que permite el “cambio de régimen”, y lo aplicamos a una serie de tiempo de rendimientos bursátiles. Para la estimación de los parámetros se utilizó el paradigma Bayesiano, la cual se pudo realizar fácil y eficientemente usando Stan.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos ocultos de Markov (HMM por sus siglas en inglés *Hidden Markov Models*) son una herramienta para representar la distribución de probabilidad de una secuencia de observaciones, donde se supone que cada una de ellas fue generada por algún proceso cuyo estado está oculto para el observador. Los HMM tienen una estructura matemática robusta que forma una base sólida para usarse en distintas aplicaciones. Cuando estos modelos son aplicados propiamente, los resultados de modelación pueden ser significativos.

Los HMM fueron desarrollados por el matemático estadounidense Leonard E. Baum y sus compañeros del Instituto de Análisis de Defensa en Princeton, Nueva Jersey, a fines de los años sesenta y principios de los 70 (Baum y Petrie, 1966; Baum *et al.*, 1970).

Sin embargo, hasta varios años después se publicó la primera aplicación del modelo y fue en reconocimiento de voz, escrito por Rabiner (1989). A partir de este trabajo, se han utilizado ampliamente los HMM en varias otras aplicaciones, como por ejemplo: búsqueda de genes (Lukashin y Borodovsky, 1998); rastreo de gestos manuales (Chen *et al.*, 2003); reconocimiento de actividad de video (Niu y Abdel-Mottaleb, 2005); para modelar datos de series temporales (Zucchini *et al.*, 2016); para predecir el comportamiento de acciones del mercado de valores (Gupta y Dhingra, 2012; Hassan y Nath, 2005), entre otras aplicaciones.

Muchas series de tiempo financieras no se pueden modelar a través de procesos lineales clásicos, como los autorregresivos (AR) o los autorregresivos de promedios móviles (ARMA), que tienen la premisa de tener una varianza constante; sin embargo, dichas series tienen heterocedasticidad condicional, es decir, una variabilidad condicional no constante a lo largo de la serie. Algunas series de tiempo financieras exhiben el llamado “agrupamiento de volatilidad”, es decir, periodos de actividad significativa tienden a ocurrir muy juntos, lo que sugiere que hay alguna forma de memoria a corto plazo en la volatilidad (desviación estándar de los rendimientos). Para solucionar el problema de la volatilidad condicional surgen los modelos con heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH) en los años 80 propuestos por Robert F. Engle (Engle *et al.*,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J10, 62F15, 62M05, 62M10, 65C05.

Palabras clave. Modelos ocultos de Markov, Markov-switching GARCH, estadística Bayesiana, series de tiempo, Stan.

(1987); y a su vez, éstos se extienden en otro tipo de modelos como son los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), que se utilizan comúnmente para capturar este fenómeno y han sido ampliamente estudiados en la literatura econométrica (Bollerslev, 1986, 2023). Otro fenómeno importante que se presenta en series financieras es el denominado “cambio de régimen” -la observación que los mercados financieros atraviesan periodos alternos de auges de baja volatilidad y caídas de alta volatilidad-. El modelo Markov-switching GARCH (MS-GARCH) de Haas *et al.* (2004) utiliza un HMM para cambiar entre dos procesos GARCH latentes. En Ardia *et al.* (2019) se presenta un estudio sobre la estimación de los MS-GARCH utilizando el paquete estadístico R.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En Sección 2 se presenta una breve introducción de estadística Bayesiana. En Sección 3 se definen los modelos ocultos de Markov, y los problemas y algoritmos necesarios para la estimación se discuten en Sección 4. En Sección 5 se muestra la aplicación de los HMM en series de tiempo financieras. Finalmente, en Sección 6 concluimos. Los códigos de R y Stan se encuentran disponibles en el Apéndice A.

2. ESTADÍSTICA BAYESIANA

En los últimos años ha habido un mayor interés en el desarrollo de métodos de inferencia Bayesiana. La razón principal es que la metodología Bayesiana proporciona un paradigma completo para la inferencia estadística bajo incertidumbre, que permite combinar información derivada de observaciones con información obtenida de expertos (Berger, 1985; Bernardo y Smith, 1994; Robert, 1994).

2.1. Paradigma Bayesiano. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables aleatorias (v.a.) de una función de densidad de probabilidad (f.d.p.) $\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$ con $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, donde $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros y Θ es el espacio paramétrico, cuya función de densidad conjunta o verosimilitud es $\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$. El problema en estadística se reduce a hacer inferencias sobre el supuesto valor de $\boldsymbol{\theta}$.

Particularmente, en estadística Bayesiana (Robert, 1994; Berger, 1985; Bernardo y Smith, 1994) se modela la incertidumbre de $\boldsymbol{\theta}$ usando métodos probabilísticos, y se considera a $\boldsymbol{\theta}$ como aleatoria, en específico, se usa el Teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})}{\mathbb{P}(\mathbf{X})},$$

donde $\mathbb{P}(\mathbf{X}) = \int_{\Theta} \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$ no depende de $\boldsymbol{\theta}$, por lo que es común escribir:

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \propto \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}).$$

La distribución de probabilidad inicial (*a priori*) $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})$ describe la información inicial que se tiene de $\boldsymbol{\theta}$. Esta distribución se basa en experiencia previa (información histórica, experiencia de expertos en los datos u otra información adicional). Entonces, la distribución de probabilidad final (*a posteriori*) $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$ permite incorporar información contenida en la muestra a través de $\mathbb{P}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$ e información inicial a través de $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})$. Por tanto, en estadística Bayesiana las inferencias sobre el parámetro $\boldsymbol{\theta}$ se basan en calcular la distribución final $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$.

En ocasiones el propósito de un análisis estadístico es hacer predicciones de una observación futura X^* . La distribución de probabilidad que describe el comportamiento de una observación futura X^* es $\mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})$, sin embargo $\boldsymbol{\theta}$ es desconocido, así que es necesario estimarlo.

Desde la perspectiva Bayesiana, la distribución marginal de X^* :

$$\mathbb{P}(X^*) = \int_{\Theta} \mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta},$$

conocida como distribución predictiva inicial (*predictiva a priori*), describe la información acerca de X^* dada la información inicial disponible por $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta})$.

Una vez obtenida la muestra \mathbf{X} , la distribución final del parámetro $\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$ junto con el modelo $\mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})$, inducen una distribución conjunta de $(X^*, \boldsymbol{\theta})$ condicional a los valores observados:

$$\mathbb{P}(X^*, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X})\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}),$$

donde la igualdad $\mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}) = \mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})$ se cumple siempre que haya independencia condicional entre la observación futura X^* y la muestra observada \mathbf{X} , dado el parámetro $\boldsymbol{\theta}$. Por tanto, la distribución de probabilidad:

$$\mathbb{P}(X^*|\mathbf{X}) = \int_{\Theta} \mathbb{P}(X^*|\boldsymbol{\theta})\mathbb{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})d\boldsymbol{\theta},$$

conocida como distribución predictiva final (*predictiva a posteriori*), describe el comportamiento de X^* dada toda la información disponible de \mathbf{X} y de $\boldsymbol{\theta}$.

2.2. Algoritmos computacionales en estadística Bayesiana. El paradigma Bayesiano ha sido reconocido desde hace mucho tiempo como conceptualmente atractivo, sin embargo, en la práctica su implementación puede ser compleja debido a las dificultades de cálculo, ya que se requiere la integración en altas dimensiones para calcular distribuciones de probabilidad. Recientemente, los métodos Bayesianos se han vuelto populares con la aparición de nuevos algoritmos computacionales que abordan esta integración de manera directa. El desarrollo de métodos, como los métodos de Monte Carlo vía cadenas de Markov (MCMC, *Markov chain Monte Carlo*) (Chen *et al.*, 2000; Gamerman y Lopes, 2006), el algoritmo de aproximación integral anidada de Laplace (INLA, *Integrated Nested Laplace Approximation*) (Rue *et al.*, 2009, 2017), o los métodos de Monte Carlo Hamiltoniano (HMC, *Hamiltonian Monte Carlo*) (Betancourt, 2018), han permitido dar soluciones numéricas para problemas basados en modelos complejos.

La implementación de los algoritmos juega un papel fundamental para la metodología Bayesiana. Para esto, el software debe ser lo suficientemente flexible y potente para realizar los cálculos necesarios. El software R (R Core Team, 2021; Albert, 2009) es uno de los lenguajes de programación más utilizados para el cálculo y gráficas en estadística. Otro proyecto interesante es BUGS (*Bayesian inference Using Gibbs Sampling*) (Lunn *et al.*, 2012), el cual sirve para análisis Bayesiano de modelos complejos utilizando métodos MCMC; WinBUGS (Lunn *et al.*, 2000; Ntzoufras, 2009) y su versión de código abierto OpenBUGS son parte de este proyecto. Recientemente los programas como INLA (Gómez-Rubio, 2020), JAGS (*Just Another Gibbs Sampling*) (Plummer, 2003) y Stan (*Sampling Through Adaptive Neighborhoods*, también acrónimo en honor a Stanislaw Ulam, 1909-1984) (Stan Development Team, 2023, 2020; Kruschke, 2010), se han desarrollado para la estimación Bayesiana.

Stan¹ es una plataforma de última generación para el modelado estadístico y el cálculo estadístico de alto rendimiento. En Stan se especifican funciones de densidad en el lenguaje de programación probabilístico y lo que se obtiene es inferencia estadística Bayesiana. La biblioteca matemática de Stan proporciona funciones de probabilidad diferenciables y álgebra lineal (C++ autodiff). Los paquetes de R adicionales proporcionan modelado lineal basado en expresiones, visualización posterior y validación cruzada.

Ejemplo 1 (Poisson). Los datos de conteo resultan de un número de ensayos y su rango son los números enteros no negativos. En estos casos, y bajo ciertas condiciones, un modelo que puede utilizarse es la distribución Poisson. Sea X una v.a. con distribución Poisson con parámetro $\theta > 0$, y f.d.p.:

$$\mathbb{P}(X = x|\theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \text{ para } \theta > 0.$$

¹<http://mc-stan.org>

Suponga que $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ son n variables aleatorias con distribución Poisson(θ). La distribución inicial de θ se puede tomar como una distribución gama con parámetros α_0 y β_0 , cuya f.d.p. está dada por:

$$\mathbb{P}(\theta) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta}, \quad \theta > 0, \alpha_0 > 0, \beta_0 > 0.$$

La verosimilitud asociada a la distribución Poisson es:

$$\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \propto e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Luego, la distribución final de θ está dada por:

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{P}(\theta | \mathbf{x}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{x} | \theta) \mathbb{P}(\theta)}{\mathbb{P}(\mathbf{x})} = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{x} | \theta) \mathbb{P}(\theta)}{\int \mathbb{P}(\mathbf{x} | \theta) \mathbb{P}(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\left[\prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \right] \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta}}{\int \left[\prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \right] \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta} d\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\beta_0 \theta - n\theta}}{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \int \theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\beta_0 \theta - n\theta} d\theta} \\ &= \frac{\theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\beta_0 \theta - n\theta}}{\int \theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\theta(\beta_0 + n)} d\theta} = \frac{\theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\beta_0 \theta - n\theta}}{\frac{\Gamma(\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i)}{(\beta_0 + n)^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i}}}, \end{aligned}$$

que es igual a una distribución gama con parámetros $\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i$ y $\beta_1 = \beta_0 + n$, específicamente, $p(\theta | \mathbf{x}) = \text{Gama}(\theta | \alpha_1, \beta_1)$.

Note en la antepenúltima igualdad de (1) que los productos que no dependen del parámetro θ , es decir $\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}$, se cancelan por estar simultáneamente en el numerador y denominador. También note en la última igualdad de (1) que el término en el numerador es una función de θ , es decir $\theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-\beta_0 \theta - n\theta}$, que es el núcleo (o *kernel*) de una variable aleatoria θ con distribución gama con parámetros α_1 y β_1 . Por último, note que el resultado de la integral en el denominador es $\frac{\Gamma(\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i)}{(\beta_0 + n)^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i}}$, el cual es la constante de integración de la distribución $\text{Gama}(\theta | \alpha_1, \beta_1)$.

Esto conduce a que podemos calcular la distribución final de θ , omitiendo el producto que no depende del parámetro θ , $\mathbb{P}(\mathbf{x})$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\theta | \mathbf{x}) \propto \mathbb{P}(\mathbf{x} | \theta) \mathbb{P}(\theta) &= \left[\prod_{i=1}^n e^{-\theta} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \right] \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \theta^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \theta} \\ &\propto \theta^{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n x_i - 1} \exp[-\theta(\beta_0 + n)] \end{aligned}$$

que corresponde al núcleo de la distribución $\text{Gama}(\theta | \alpha_1, \beta_1)$. Debido a que la distribución inicial y la final pertenecen a la misma familia de distribuciones, se dice que la familia de distribuciones gama es conjugada para la familia de distribuciones Poisson.

La distribución predictiva final está dada por:

$$\begin{aligned} p(x^* | x_1, \dots, x_n) &= \int_0^\infty p(x^* | \theta) p(\theta | x_1, \dots, x_n) d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta} \frac{\theta^{x^*}}{x^*!} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \theta^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{x^*!} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^\infty e^{-\theta - \beta_1 \theta} \theta^{x^* + \alpha_1 - 1} d\theta \\ &= \frac{1}{x^*!} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(\alpha_1 + x^*)}{(\beta_1 + 1)^{(\alpha_1 + x^*)}}. \end{aligned}$$

Esta distribución se conoce como *Poisson-Gamma*($\alpha_1, \beta_1, 1$).

Considerando un conjunto de $n = 50$ datos simulados a partir de una distribución Poisson($\theta = 3$), se obtienen las estimaciones con métodos Bayesianos usando Stan. Con 2000 iteraciones y un calentamiento de 1000, la Tabla 1 presenta los resultados de estimación de θ y x^* ; como la media, el error estándar de la media (SE media), la desviación estandar (SD), varios cuantiles, el $neff$ es una medida cruda del tamaño efectivo de la muestra, y $Rhat$ es el factor de reducción de escala potencial en cadenas divididas (en convergencia $Rhat=1$). En la Figura 1 se muestran las distribuciones final de θ y predictiva final de x^* . En Robert y Casella (2000) se pueden encontrar más detalles acerca de los métodos de Monte Carlo y del diagnóstico de convergencia.

TABLA 1. Poisson: resultados de la distribución final de θ , y distribución predictiva final de x^* usando Stan.

	Media	SE media	SD	2.5 %	25 %	50 %	75 %	97.5 %	neff	Rhat
θ	2.91	0.01	0.23	2.48	2.76	2.9	3.07	3.36	719	1
x^*	2.90	0.05	1.71	0.00	2.00	3.0	4.00	6.00	1051	1

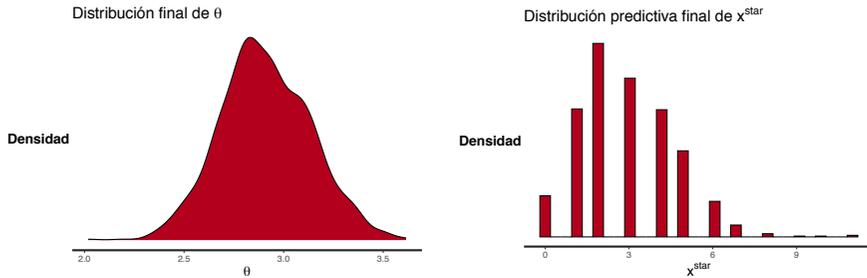


FIGURA 1. Poisson: distribución final de θ , y distribución predictiva final de x^* usando Stan.

3. MODELOS OCULTOS DE MARKOV

Los modelos ocultos de Markov (HMM) son modelos gráficos probabilísticos que representan procesos dinámicos; en particular, modelan cómo el estado de un proceso cambia con el tiempo. Estos modelos se utilizan para describir datos secuenciales o series de tiempo, tales como datos financieros. La idea principal es que un HMM es un modelo estadístico en el cual el sistema a estimar es un proceso de Markov con parámetros desconocidos, en donde la ocurrencia de los estados está asociada con una distribución de probabilidad y las transiciones entre los estados están gobernadas por un conjunto de probabilidades de transición.

Un HMM es un caso particular de las redes Bayesianas dinámicas de primer orden (Sucar, 2015). En Zucchini et al. (2016) se aborda el tema de estimación de parámetros, la selección del modelo y la predicción utilizando el lenguaje R. Mientras que en Damiano et al. (2018) se utiliza Stan.

Para presentar la teoría básica de los HMM es indispensable proveer primero la teoría de cadenas de Markov y mostrar el concepto de estados ocultos, donde la observación es una función probabilística del estado.

3.1. Cadenas de Markov. Vamos a considerar cadenas de Markov (CM) a tiempo discreto. Una sucesión de variables aleatorias discretas $\{C_t : t \in \mathbb{N}\}$ se dice que es una cadena de Markov (a tiempo discreto) si para todo $t \in \mathbb{N}$ satisface la propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}(C_{t+1}|C_t, \dots, C_1) = \mathbb{P}(C_{t+1}|C_t).$$

Esto significa que la probabilidad del siguiente estado solo depende del estado actual.

Otro concepto importante es el de probabilidad de transición. Consideremos un espacio de estados $\{1, \dots, N\}$, y sean i y j dos estados cualesquiera, la probabilidad de transición entre estos dos estados está dada por:

$$\mathbb{P}(C_{s+t} = j | C_s = i).$$

Si estas probabilidades no dependen de s entonces se dice que la CM es homogénea, de otra forma es heterogénea. En este trabajo utilizaremos CM homogéneas y las probabilidades de transición las denotaremos por $\gamma_{ij}(t)$, es decir, $\gamma_{ij}(t) = \mathbb{P}(C_{s+t} = j | C_s = i)$. Sea $\mathbf{\Gamma}(t)$ la matriz que tiene como ij -ésimo elemento a $\gamma_{ij}(t)$. Entonces, si aplicamos la definición anterior sobre todo el conjunto de estados obtendríamos la matriz de transición de un paso $\mathbf{\Gamma}(1)$, denotada abreviadamente como $\mathbf{\Gamma}$, dada por:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz satisface lo siguiente:

- (i) $\gamma_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, N\}$.
- (ii) $\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, N\}$.
- (iii) Ecuación de Chapman-Kolmogorov: $\mathbf{\Gamma}(t+s) = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{\Gamma}(s)$, lo que implica que $\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{\Gamma}(1)^t = \mathbf{\Gamma}^t$.

Como los renglones de la matriz $\mathbf{\Gamma}$ suman 1, entonces $\mathbf{\Gamma}\mathbf{1}' = \mathbf{1}'$, es decir, el vector columna $\mathbf{1}'$ es un eigenvector de $\mathbf{\Gamma}$ correspondiente al eigenvalor 1.

Las probabilidades no condicionales $\mathbb{P}(C_t = j)$ de una cadena de Markov que está en un cierto estado j en un tiempo dado t , también son de interés, y se definen como:

$$\mathbf{u}(t) = (\mathbb{P}(C_t = 1), \dots, \mathbb{P}(C_t = N)); \quad t \in \mathbb{N},$$

que cumple que, para el tiempo $t+1$, $\mathbf{u}(t+1) = \mathbf{u}(t)\mathbf{\Gamma}$.

También necesitamos saber la probabilidad de comenzar desde un estado determinado. A esto se le conoce como la distribución de probabilidad inicial y se define de la siguiente manera $\delta_i = \mathbb{P}(C_1 = i)$, y que cumple con $\sum_{i=1}^N \delta_i = 1$. Note que coincide con $\mathbf{u}(1)$.

Ejemplo 2. Supongamos que queremos modelar el comportamiento de un conductor al volante. Los $N = 4$ posibles comportamientos (estados) son:

- Estado 1: Acelerar.
- Estado 2: Velocidad constante.
- Estado 3: Reposo (el motor funciona lentamente pero el vehículo no se mueve).
- Estado 4: Freno.

En la Figura 2, los estados se representan como nodos y las transiciones como flechas. Vemos que a veces el conductor cambia de un estado el vehículo a otro estado, pero otras veces se queda en el mismo estado.

Por tanto, a partir de este modelo, si queremos predecir el estado futuro, lo único que importa es el estado actual del vehículo. Los estados pasados no tienen relación con el estado futuro excepto a través del estado actual (propiedad de Markov).

Dado que no estamos seguros del comportamiento del conductor en un momento dado. Por lo tanto, para modelar esta incertidumbre, el modelo se convierte en un modelo probabilístico. Ver las probabilidades de transición en la Figura 2 marcadas con las flechas naranjas. Por ejemplo, considerando el estado denominado “reposo”, la probabilidad de que el automóvil pase de este estado al estado “acelerar” es de 0.7, y escribimos $\mathbb{P}(\text{“acelerar”} | \text{“reposo”}) = 0.7$. Note que la suma de las probabilidades de transición que salen de cualquier estado dado es 1. Por ejemplo, la suma de las probabilidades de transición que salen del estado “freno”: $\mathbb{P}(\text{“acelerar”} | \text{“freno”}) + \mathbb{P}(\text{“constante”} | \text{“freno”}) + \mathbb{P}(\text{“reposo”} | \text{“freno”}) + \mathbb{P}(\text{“freno”} | \text{“freno”}) = 0.4 + 0.1 + 0.4 + 0.1 = 1$.

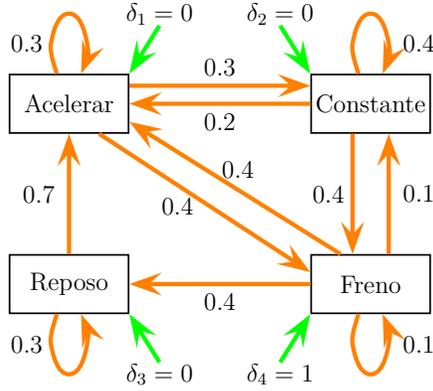


FIGURA 2. Estados del conductor: cadena de Markov que modela el comportamiento de un conductor al volante.

Como sabemos, en este ejemplo, el conductor no puede encender el automóvil en ningún estado, por ejemplo, es imposible encender el automóvil en el estado de “velocidad constante”. Solo puede arrancar el automóvil desde el estado de frenado, luego el vector de probabilidades iniciales está dado por $\delta = (0, 0, 0, 1)$. En la Figura 2 las probabilidades iniciales se indican con flechas verdes.

Supongamos que la actividad del conductor al tiempo t está caracterizada por un solo estado (de los cuatro anteriores). Luego, la matriz de transición está dada por:

$$\Gamma = \begin{matrix} & \begin{matrix} Acelerar & Constante & Reposo & Freno \end{matrix} \\ \begin{matrix} Acelerar \\ Constante \\ Reposo \\ Freno \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Dado que al tiempo $t = 1$ el conductor está en *Freno*, una pregunta que nos haríamos sería: ¿cuál es la probabilidad que el conductor realice el siguiente comportamiento en los próximos instantes $O = \text{“freno, freno, freno, acelerar, acelerar, freno, constante, freno”}$. Esta probabilidad se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O|Modelo) &= \mathbb{P}(freno) \cdot \mathbb{P}(freno|freno) \cdot \mathbb{P}(freno|freno) \\ &\cdot \mathbb{P}(acelerar|freno) \cdot \mathbb{P}(acelerar|acelerar) \cdot \mathbb{P}(freno|acelerar) \\ &\cdot \mathbb{P}(constante|freno) \cdot \mathbb{P}(freno|constante) \\ &= \delta_4 \cdot \gamma_{44} \cdot \gamma_{44} \cdot \gamma_{41} \cdot \gamma_{11} \cdot \gamma_{14} \cdot \gamma_{42} \cdot \gamma_{24} \\ &= 1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.4 \\ &= 0.0000192. \end{aligned}$$

Todos los estados son recurrentes, esto significa que con probabilidad 1 se pueden visitar estos estados toda vez que la cadena comenzó en ellos. Esta cadena de Markov no tiene estados transitorios, ni tampoco estados absorbentes. En la Tabla 2 se presentan la distribución estacionaria (distribución que no cambia al transcurrir el tiempo, $\pi = \pi\Gamma$) y el tiempo medio de recurrencia $1/\pi$. Note que aproximadamente el 36 % del tiempo el conductor acelera, el 26 % frena, el 23 % se mantiene constante y un 15 % está en reposo.

TABLA 2. Estados del conductor: algunos datos de la Cadena de Markov.

	Acelerar	Constante	Reposo	Freno
Distribución estacionaria	0.3634476	0.2253375	0.1495327	0.2616822
Tiempo medio de recurrencia	2.7514290	4.4377880	6.6875000	3.8214290

Ahora considere que tiene una muestra observada de los estados realizados por el conductor, ver Figura 3, y como ocurre en la vida real, tenemos los datos observados pero desconocemos la matriz de transición. Usando los métodos de estadística Bayesiana y Stan podemos estimar los parámetros del modelo. La Figura 4 muestra las estimaciones de los parámetros que representan las probabilidades en la matriz de transición. Note que, además del valor medio estimado, podemos obtener otras cantidades, por ejemplo, los intervalos de probabilidad del 95% correspondientes a los cuantiles 0.025 y 0.975 de la distribución posterior. Note que por la naturaleza del método, y por el tamaño de muestra, los estimadores de los parámetros no son exactamente iguales a los valores reales, pero buscamos que sean lo más similares.

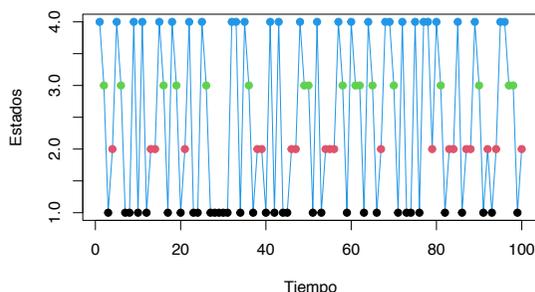


FIGURA 3. Estados del conductor: cadena de Markov simulada.

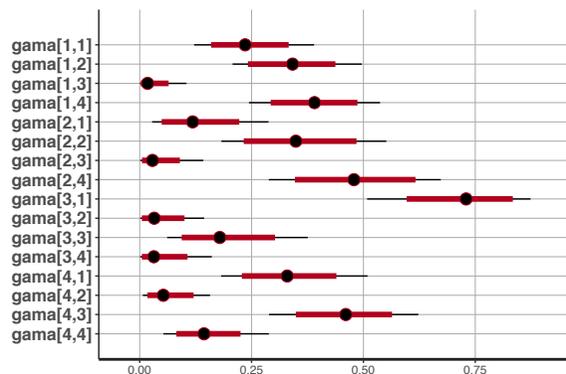


FIGURA 4. Estados del conductor: estimaciones medias e intervalos de probabilidad del 95% de las probabilidades de la matriz de transición.

3.2. Definición de HMM. Un modelo oculto de Markov (HMM, *Hidden Markov Model*) consiste en un proceso doblemente estocástico. El primer proceso estocástico es una cadena de Markov que se caracteriza por estados y probabilidades de transición, llamado *proceso paramétrico*. Los estados de la cadena no son observables, por lo tanto, están “ocultos” y los denotaremos por $\{C_t : t = 1, 2, \dots\}$. El segundo proceso estocástico se define con las observaciones que tenemos, a partir de la distribución de probabilidad que depende del estado oculto, lo denotaremos por $\{X_t : t = 1, 2, \dots\}$, y se le llama *proceso dependiente del estado*. Si la cadena de Markov $\{C_t\}$ tiene N estados, decimos que $\{X_t\}$ es un N -estado HMM.

La Figura 5 muestra la estructura de los HMM usando una gráfica dirigida acíclica. Los nodos cuadrados representan variables observadas y los óvalos representan variables latentes². La dirección de las flechas indica dependencia condicional.

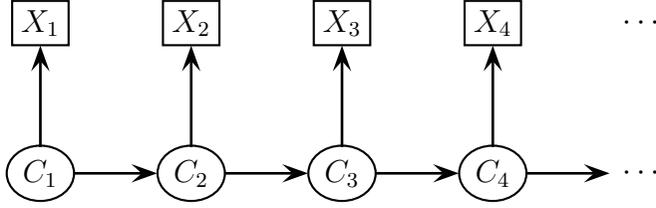


FIGURA 5. Representación gráfica de un modelo oculto de Markov.

La propiedad de Markov sólo se asume para los estados ocultos, y las observaciones son condicionalmente independientes dados los estados ocultos. Mientras que las observaciones pueden no exhibir un comportamiento Markoviano, la estructura Markoviana de los estados ocultos es suficiente para facilitar su inferencia estadística.

3.2.1. *Elementos del HMM.* Los elementos que constituyen un HMM con espacio de observaciones discreto son cinco, y se muestran a continuación:

1. Espacio de estados: $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, N\}$. El estado en el tiempo t se denota por C_t .
2. Espacio de observaciones: $\{X_t : t = 1, \dots, T\}$.
3. Vector de probabilidades iniciales: $\boldsymbol{\delta}$, con i -ésimo elemento:

$$\delta_i = \mathbb{P}(C_1 = i), \quad i \in \mathcal{C}.$$

4. Matriz de transición a un paso: $\boldsymbol{\Gamma} = \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{C}}$, definidas por:

$$\gamma_{ij} = \mathbb{P}(C_{t+1} = j | C_t = i).$$

5. Distribución de probabilidad de las observaciones: $\boldsymbol{P} = \{p_i(x)\}_{i \in \mathcal{C}}$, donde $p_i(x)$ es la probabilidad de que la observación x sea emitida por el estado i , i.e.:

$$p_i(x) = \mathbb{P}(X_t = x | C_t = i).$$

Por lo que un HMM se representa por $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{\delta}\}$.

Para el caso univariado, y teniendo observaciones discretas con $u_i(t) = \mathbb{P}(C_t = i)$, para $t = 1, \dots, T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = x) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_t = i) \mathbb{P}(X_t = x | C_t = i) \\ &= \sum_{i=1}^N u_i(t) p_i(x) \\ &= \boldsymbol{u}(t) \boldsymbol{P}(x) \mathbf{1}', \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{P}(x)$ la matriz diagonal con i -ésimo elemento $p_i(x)$ y $\mathbf{1}$ el vector fila de unos de dimensión apropiada. Como $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(1) \boldsymbol{\Gamma}^{t-1}$, entonces:

$$\mathbb{P}(X_t = x) = \boldsymbol{u}(1) \boldsymbol{\Gamma}^{t-1} \boldsymbol{P}(x) \mathbf{1}'.$$

Más aún, si consideramos la cadena de Markov estacionaria, con distribución estacionaria $\boldsymbol{\delta}$, i.e., $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Gamma}^{t-1} = \boldsymbol{\delta}$, y considerando que $\boldsymbol{u}(1)$ coincide con la distribución estacionaria $\boldsymbol{\delta}$, entonces:

$$\mathbb{P}(X_t = x) = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{P}(x) \mathbf{1}'.$$

²Las variables latentes son variables que no se observan directamente, pero que son inferidas a partir de otras variables observadas.

La función de verosimilitud está dada por:

$$\begin{aligned} L_T &= \sum_{c_1, \dots, c_T=1}^N (\delta_{c_1} \gamma_{c_1, c_2} \cdots \gamma_{c_{T-1}, c_T}) (p_{c_1}(x_1) p_{c_2}(x_2) \cdots p_{c_T}(x_T)) \\ &= \sum_{c_1, \dots, c_T=1}^N \delta_{c_1} p_{c_1}(x_1) \gamma_{c_1, c_2} p_{c_2}(x_2) \cdots \gamma_{c_{T-1}, c_T} p_{c_T}(x_T) \\ &= \boldsymbol{\delta} \mathbf{P}(x_1) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_2) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_3) \cdots \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_T) \mathbf{1}' \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\delta}$, la distribución de C_1 , es la distribución estacionaria de la cadena de Markov, entonces $\boldsymbol{\delta} \mathbf{P}(x_1) = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_1)$, y por lo tanto, la verosimilitud es:

$$L_T = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_1) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_2) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_3) \cdots \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P}(x_T) \mathbf{1}'.$$

Puede encontrar más información del modelo HMM en [Zucchini *et al.* \(2016\)](#).

Ejemplo 3. En la universidad, Karina y Daniel fueron compañeros, ahora ambos están graduados y viven en distintas ciudades, Karina por su parte vive en Ciudad de México y Daniel en Monterrey; por lo que su comunicación es vía telefónica.

Resulta que el estado de ánimo de Daniel cambia según el estado del tiempo. Si está soleado (S), Daniel está mayormente feliz (F), pero si está lluvioso (L), entonces Daniel está mayormente enojado (E).

Cierto día, hablando por teléfono, Daniel le comenta a Karina que estaba feliz, por lo que ella infirió que hacía sol en Monterrey. El clima en Monterrey está oculto para Karina y la única información que tiene de Daniel es si está feliz o enojado (observación). Así pues, el espacio de estados ocultos está dado por $\mathcal{C} = \{S, L\}$ y el espacio de observaciones tomará valores del conjunto $\{F, E\}$.

Supongamos que el vector de probabilidades iniciales está dado por:

$$\delta_S = \mathbb{P}(C_1 = S) = 0.83, \quad \delta_L = \mathbb{P}(C_1 = L) = 0.17.$$

Además, supongamos que si hoy es un día soleado, la probabilidad de que mañana también lo sea es de 0.9, mientras que existe una probabilidad de 0.1 de que sea un día lluvioso. Por otro lado, si hoy es lluvioso, la probabilidad de que mañana también lo sea es de 0.6, por lo que la probabilidad de que el día siguiente sea soleado se convierte en 0.4. Luego, las transiciones a un paso (de un día a otro) están dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_{SS} &= \mathbb{P}(C_{t+1} = S | C_t = S) = 0.9, & \gamma_{SL} &= \mathbb{P}(C_{t+1} = L | C_t = S) = 0.1, \\ \gamma_{LS} &= \mathbb{P}(C_{t+1} = S | C_t = L) = 0.4, & \gamma_{LL} &= \mathbb{P}(C_{t+1} = L | C_t = L) = 0.6. \end{aligned}$$

Considerando los estados de ánimo de Daniel dependiendo del estado del tiempo, se traducen en las probabilidades de las observaciones dadas por:

$$\begin{aligned} p_S(F) &= \mathbb{P}(F|S) = 0.8, & p_L(F) &= \mathbb{P}(F|L) = 0.3, \\ p_S(E) &= \mathbb{P}(E|S) = 0.2, & p_L(E) &= \mathbb{P}(E|L) = 0.7. \end{aligned}$$

La Figura 6 muestra los elementos del HMM usando una representación gráfica. Los nodos cuadrados representan los estados de ánimo de Daniel (variables observadas) y los óvalos representan los estados del tiempo de Monterrey (variables latentes), que son los estados no observados para Karina. Las flechas verdes denotan las probabilidades iniciales, las flechas naranjas indican las probabilidades de transición, y las flechas azules denotan las probabilidades de las observaciones.

Si durante cinco días Daniel estuvo feliz, enojado, enojado, feliz, feliz, entonces una cuestión interesane es saber cuál fue el clima (estado oculto) en estos cinco días en Monterrey.

4. LOS TRES PROBLEMAS BÁSICOS PARA LOS HMM

La dificultad de los HMM es estimar los parámetros $\{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{P}, \boldsymbol{\delta}\}$; además debemos asegurar que estamos tomando la mejor sucesión de estados y tener los parámetros que maximicen la verosimilitud del modelo. Entonces podemos hacer uso de al menos

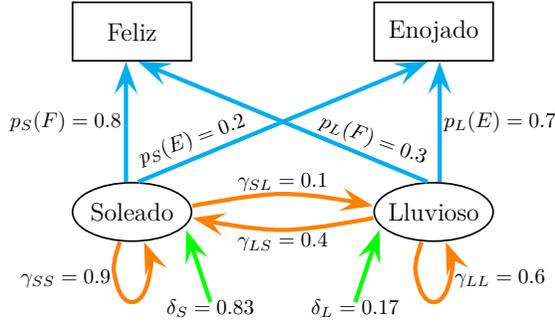


FIGURA 6. Elementos del HMM: representa la relación entre los estados de ánimo y los estados del tiempo.

tres algoritmos para solucionar estos problemas. Los problemas básicos para aplicar un HMM son:

1. Problema 1: *Evaluación*. Dada una secuencia de observaciones y un modelo, ¿cuál es la probabilidad de la secuencia observada dado el modelo?
2. Problema 2: *Decodificación*. Dada una secuencia de observaciones y el modelo, ¿cómo elegimos su correspondiente secuencia de estados ocultos?
3. Problema 3: *Aprendizaje*. ¿Cómo ajustamos los parámetros del modelo para maximizar la probabilidad de las observaciones dado el modelo?

Estos problemas se han podido resolver con los algoritmos *forward-backward*, de Viterbi y de Baum-Welch, respectivamente. Para detalles ver [Rabiner \(1989\)](#) y [Zucchini et al. \(2016\)](#).

Es importante enfatizar que lo que se describe a continuación es una explicación general de estos tres problemas, y de los algoritmos que dan soluciones. Para la estimación de los parámetros se pueden utilizar técnicas de estadística Bayesiana, como lo ejemplificaremos en la sección [5](#) para HMM en series de tiempo financieras.

4.1. El problema de la evaluación. Suponga que se tiene un modelo oculto de Markov $\lambda = \{\Gamma, P, \delta\}$ y un serie de observaciones $X = \{x_1, \dots, x_T\}$; se desea calcular la probabilidad de que la serie observada sea producida por el modelo, es decir, calcular $\mathbb{P}(X|\lambda)$. Note que X se puede generar por una serie diferente de estados $C = \{c_1, \dots, c_T\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X|\lambda) &= \sum_{\text{todo } C} \mathbb{P}(X, C|\lambda) \\ &= \sum_{\text{todo } C} \mathbb{P}(X|C, \lambda)\mathbb{P}(C|\lambda) \\ &= \sum_{c_1} \dots \sum_{c_T} \mathbb{P}(x_1, \dots, x_T|c_1, \dots, c_T, \lambda)\mathbb{P}(c_1, \dots, c_T|\lambda), \end{aligned}$$

donde, suponiendo independencia condicional de las observaciones y de los estados ocultos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_1, \dots, x_T|c_1, \dots, c_T, \lambda) &= \mathbb{P}(x_1|c_1, \lambda)\mathbb{P}(x_2|c_2, \lambda) \dots \mathbb{P}(x_T|c_T, \lambda) \\ &= p_{c_1}(x_1)p_{c_2}(x_2) \dots p_{c_T}(x_T), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(c_1, \dots, c_T|\lambda) &= \mathbb{P}(c_1|\lambda)\mathbb{P}(c_2|c_1, \lambda) \dots \mathbb{P}(c_T|c_{T-1}, \lambda) \\ &= \delta_{c_1}\gamma_{c_1c_2} \dots \gamma_{c_{T-1}c_T}, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathbb{P}(X, C|\lambda) = \delta_{c_1}p_{c_1}(x_1)\gamma_{c_1c_2}p_{c_2}(x_2) \dots \gamma_{c_{T-1}c_T} \dots p_{c_T}(x_T).$$

Entonces, para un modelo con N estados y T observaciones, se tendrían N^T series de estados posibles. Esta evaluación requiere una serie de operaciones del orden de $2T \cdot N^T$, lo cual lo hace ineficiente de calcular directamente, por lo que conviene recurrir a un algoritmo que optimice el proceso. Para resolver el problema de evaluación se puede utilizar el algoritmo forward-backward.

4.1.1. Algoritmo Forward-Backward. El algoritmo forward-backward se basa en utilizar variables auxiliares que pueden obtenerse de manera recursiva para agilizar el procedimiento para calcular $\mathbb{P}(X|\boldsymbol{\lambda})$.

Considere la variable *forward* $\alpha_t(i)$ definida como:

$$\alpha_t(i) = \mathbb{P}(x_1, x_2, \dots, x_t, c_t = i | \boldsymbol{\delta}).$$

Se puede resolver $\alpha_t(i)$ por inducción, como se muestra a continuación:

1. Inicializar: para $i = 1, \dots, N$,

$$\alpha_1(i) = \mathbb{P}(c_1 = i | \boldsymbol{\delta}) \mathbb{P}(x_1 | c_1 = i, \boldsymbol{\delta}) = \delta_i p_i(x_1).$$

2. Inducción: para $j = 1, \dots, N$ y $t = 1, \dots, T - 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1}(j) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(x_1, x_2, \dots, x_{t+1}, c_{t+1} = j, c_t = i | \boldsymbol{\delta}) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(x_1, x_2, \dots, x_t, c_t = i, \boldsymbol{\delta}) \mathbb{P}(c_{t+1} = j | c_t = i, \boldsymbol{\delta}) \mathbb{P}(x_{t+1} | c_{t+1} = j, \boldsymbol{\delta}) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \gamma_{ij} p_j(x_{t+1}). \end{aligned}$$

3. Terminación:

$$\mathbb{P}(X|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(x_1, \dots, x_T, c_T = i | \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i).$$

Esto requiere una serie de operaciones del orden de N^2T , lo que lo hace más eficiente.

De manera análoga se puede considerar la variable *backward* $\beta_t(i)$, definida como:

$$\beta_t(i) = \mathbb{P}(x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_T | c_t = i, \boldsymbol{\lambda}),$$

y se puede resolver de manera inductiva:

1. Inicializar: para $i = 1, \dots, N$,

$$\beta_T(i) = 1.$$

2. Inducción: para $i = 1, \dots, N$ y $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$,

$$\begin{aligned} \beta_t(i) &= \mathbb{P}(x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_T, c_{t+1} = j | c_t = i, \boldsymbol{\lambda}) \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbb{P}(c_{t+1} = j | c_t = i, \boldsymbol{\lambda}) \mathbb{P}(x_{t+1} | c_{t+1} = j, \boldsymbol{\lambda}) \mathbb{P}(x_{t+2}, x_{t+3}, \dots, x_T | c_{t+1} = j, \boldsymbol{\lambda}) \\ &= \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} p_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j). \end{aligned}$$

Sin embargo, se puede tener una solución óptima al problema operando ambos resultados:

$$\mathbb{P}(X|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \beta_t(i).$$

4.2. El problema de la decodificación. Suponga que se tiene un HMM λ y una serie de observaciones X , la pregunta es: ¿cuál es la serie de estados ocultos óptima asociada con la serie de observaciones?

La dificultad radica en la definición de la serie óptima, debido a que hay varias criterios de optimización posibles. Una forma de elegirla es utilizar la serie de estados más probable; para esto es necesario saber en cada instante del tiempo t , $t = 1, \dots, T$, cuál es el estado más probable. Para esto se define la variable auxiliar que $\gamma_t(i)$, para $i = 1, \dots, N$:

$$\gamma_t(i) = \mathbb{P}(c_t = i | X, \lambda),$$

y usando las variables del algoritmo forward-backward:

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\mathbb{P}(X|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t(j)\beta_t(j)}.$$

Entonces, de manera individual, el estado oculto óptimo al tiempo t , $t = 1, \dots, T$, es:

$$c_t = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \gamma_t(i).$$

La forma de encontrar el estado más probable i_t^* para cada observación al tiempo t está dada por:

$$i_t^* = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \xi_t(i).$$

Una vez obtenida la decodificación para cada observación, se puede establecer la sucesión (trayectoria) de estados ocultos óptima. Sin embargo, tiene dos inconvenientes: se requiere hacer N^T operaciones, y no toma en cuenta las probabilidades de transición, lo que implica que no necesariamente sea sucesión óptima. La solución para el problema de decodificación es utilizar el algoritmo de Viterbi.

4.2.1. Algoritmo de Viterbi. El algoritmo de Viterbi hace una recursión entre un tiempo t y el tiempo $t - 1$ para optimizar el proceso de encontrar la ruta más probable de estados ocultos. Se define $\xi_t(i)$ como:

$$\xi_t(i) = \max_{c_1, c_2, \dots, c_{t-1}} \mathbb{P}(c_1, c_2, \dots, c_{t-1}, c_t = i, x_1, x_2, \dots, x_t | \lambda),$$

que es la trayectoria con mayor probabilidad al tiempo t , para el estado i . Por inducción se tiene que para $t = 1$:

$$\begin{aligned} \xi_1(i) &= \mathbb{P}(c_1 = i, x_1) = \delta_i p_i(x_1), \\ \xi_2(j) &= \max_{c_1} \mathbb{P}(c_1, c_2 = j, x_1, x_2 | \lambda) \\ &= [\max_i \mathbb{P}(c_1 = i, x_1, \lambda) \mathbb{P}(c_2 = j | c_1 = i, \lambda)] \mathbb{P}(x_2 | c_2 = j, \lambda) \\ &= [\max_i \xi_1(i) \gamma_{ij}] p_j(x_2), \end{aligned}$$

y en general, para $t = 2, \dots, T$:

$$\xi_{t+1}(j) = \left[\max_i \xi_t(i) \gamma_{ij} \right] p_j(x_{t+1}).$$

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

1. Inicializar: para $i = 1, \dots, N$,

$$\xi_1(i) = \delta_i p_i(x_1) \quad \text{y} \quad \psi_1(i) = 0.$$

2. Recursión: para $t = 2, \dots, T$ y $j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \xi_t(j) &= \left[\max_i \xi_{t-1}(i) \gamma_{ij} \right] p_j(x_t), \\ \psi_t(j) &= \arg \max_i \xi_t(i) \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

3. Terminación:

$$\begin{aligned} p^* &= \max_i \xi_T(i), \\ q_T^* &= \arg \max_i \xi_T(i). \end{aligned}$$

4. Trayectoria de retroceso (secuencia de estados): para $t = T - 1, T - 2, \dots, 2, 1$,

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*).$$

4.3. El problema del aprendizaje. El problema del aprendizaje es determinar un método adecuado para la estimación de los parámetros $\boldsymbol{\lambda}$ del modelo HMM, para maximizar la probabilidad de las observaciones, es decir:

$$\arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbb{P}(X|\boldsymbol{\lambda}).$$

Note que se supone que el número de estados ocultos del modelo ya está dado, por lo que se puede probar el modelo con diferente número de estados y determinar cuál es el mejor tomando en cuenta diferentes criterios.

Para resolver el problema de aprendizaje no existe una fórmula analítica. Entonces, el problema se resuelve usando un procedimiento iterativo, como el algoritmo de Baum-Welch, que se basa en una estructura del algoritmo EM (*expectation-maximization*).

El algoritmo EM es un método iterativo que calcula estimadores máximo verosímiles considerando datos faltantes. El algoritmo EM se define en dos pasos:

1. Paso E (*expectation*): se calcula la esperanza de la log-verosimilitud con respecto a la distribución de los datos faltantes, dada una aproximación de la solución.
2. Paso M (*maximization*): se calcula una nueva aproximación maximizando la log-verosimilitud que resultó del paso E.

Estos pasos se realizan hasta que el algoritmo converge. Ver detalles en [Dempster et al. \(1977\)](#).

4.3.1. Algoritmo de Baum-Welch. El algoritmo de Baum-Welch está diseñado para estimar los parámetros de un HMM. Se define la variable auxiliar $v_t(i, j)$:

$$v_t(i, j) = \mathbb{P}(c_t = i, c_{t+1} = j | X, \boldsymbol{\lambda}),$$

y usando las variables forward y backward se obtiene que:

$$\begin{aligned} v_t(i, j) &= \frac{\alpha_t(i) \gamma_{ij} p_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\mathbb{P}(X|\boldsymbol{\lambda})} \\ &= \frac{\alpha_t(i) \gamma_{ij} p_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha_t(k) \gamma_{kl} p_l(x_{t+1}) \beta_{t+1}(l)}, \end{aligned}$$

y defina $u_t(j)$ como la probabilidad de estar en el estado i al tiempo t dadas las observaciones y el modelo, es decir:

$$u_t(i) = \mathbb{P}(c_t = i | X, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^N v_t(i, j).$$

Note que se pueden interpretar algunas cantidades: $\sum_{t=1}^{T-1} u_t(i)$ es el número esperado de visitar al estado oculto i , y $\sum_{t=1}^{T-1} v_t(i, j)$ es el número esperado de transiciones del estado i al estado j . Esto implica que se pueden estimar los parámetros de interés como:

$$(2) \quad \hat{\delta}_i = u_1(i),$$

$$(3) \quad \hat{\gamma}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} v_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} u_t(i)},$$

$$(4) \quad \hat{p}_i(x) = \frac{\sum_{t=1}^T u_t(i) \mathbb{I}_{(x_t=x)}}{\sum_{t=1}^T u_t(i)}.$$

Se estiman los parámetros del modelo HMM como $\hat{\lambda} = \{\hat{\Gamma}, \hat{P}, \hat{\delta}\}$, tal que maximizan la log-verosimilitud a partir de las observaciones dadas y el número de estados ocultos.

Note que (4) depende de la distribución que se suponga para los datos observados, por ejemplo, si se supone una distribución Poisson para el valor observado x :

$$p_j(x) = \exp(-\theta_j)\theta_j^x \frac{1}{x!},$$

y el estimador máximo verosímil de θ_j es:

$$(5) \quad \hat{\theta}_j = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t(j)x_t}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t(j)}.$$

Algoritmo 1 Algoritmo de Baum-Welch

- 1: Iniciar aleatoriamente los parámetros del HMM $\lambda = \{\Gamma, P, \delta\}$.
 - 2: Calcular los estimadores máximo verosímiles $\hat{\delta}_i, \hat{\gamma}_{ij}$ y $\hat{p}_i(x)$ usando (2), (3) y (4), respectivamente.
 - 3: Re-estimar usando los estimadores máximo verosímiles de los parámetros de la distribución $p_j(x)$, por ejemplo, para la distribución Poisson calcular $\hat{\theta}_j$ usando (5).
 - 4: Se obtienen las estimaciones $\hat{\lambda} = \{\hat{\Gamma}, \hat{P}, \hat{\delta}\}$ hasta que el algoritmo converge, tal que maximicen la log-verosimilitud bajo las condiciones especificadas.
-

5. SERIES DE TIEMPO FINANCIERAS CON HMM

En la práctica cuando observamos una serie de tiempo, por ejemplo, el índice de precios y cotizaciones, el proceso “verdadero” que rige dicha serie no se conoce. La idea detrás de la teoría de series temporales es el estudio y construcción de modelos, $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ que nos ayuden a entender las características de dependencia (la dinámica) de la serie observada.

5.1. Series de tiempo financieras. Sea \mathcal{T} un conjunto de índices. Consideremos el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y con valores en (E, \mathcal{E}) . Una serie temporal es una sucesión de observaciones ordenadas y equidistantes cronológicamente sobre una característica de una unidad observable en diferentes momentos. A dicha sucesión de observaciones se le puede ver como una realización de un proceso estocástico a tiempo discreto, i.e., $\{x_t : t = 1, \dots, n\}$ donde $x_t := X_t(\omega)$ con $\omega \in \Omega$ fijo.

Los modelos para series temporales se pueden definir a través de una representación estocástica o mediante suposiciones distribucionales acerca de las variables aleatorias que representan una serie dada. Por ejemplo, el modelo autorregresivo de orden 1, AR(1), se puede definir por $X_t = \theta X_{t-1} + \epsilon_t$ donde $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$; y de manera distribucional, se podría definir el mismo modelo AR(1) mediante una sucesión de variables aleatorias $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$, con distribuciones condicionales $X_t | X_{t-1} \sim N(\theta X_{t-1}, \sigma^2)$.

En el caso particular de datos financieros, muchas series de tiempo financieras exhiben los efectos llamados “agrupamiento de volatilidad” (*volatility clustering*) y “cambio de régimen” (*regime-switching*). La volatilidad es la desviación estándar de los rendimientos de la serie financiera, por tanto, en muchas series de tiempo financieras lo que interesa es modelar la volatilidad. El agrupamiento de volatilidad ocurre cuando los periodos de actividad significativa tienden a ocurrir muy juntos, lo que sugiere que existe algún tipo de memoria a corto plazo para la volatilidad. El cambio de régimen ocurre cuando se observa que los mercados financieros atraviesan periodos alternos entre auges de baja volatilidad y caídas de alta volatilidad.

Los modelos GARCH (modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada, *generalized autoregressive conditional heterocedasticity*) (Bollerslev, 1986,

(2023) se usan generalmente para capturar el fenómeno de agrupamiento de volatilidad y han sido ampliamente estudiados en la literatura econométrica. Los modelos Markov-switching GARCH (MS-GARCH) (Haas *et al.*, 2004; Ardia *et al.*, 2019) permiten capturar el fenómeno de cambio de régimen en la dinámica de la varianza condicional de series de tiempo, usando un HMM para cambiar entre dos procesos latentes GARCH. Mostraremos cómo ambos modelos se pueden estimar usando Stan.

5.2. Modelo GARCH. Un proceso $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un ARCH(1) (modelo con heterocedasticidad condicional autorregresiva de orden 1, *autoregressive conditional heteroscedasticity*) si:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2,\end{aligned}$$

donde \mathcal{F}_{t-1} denota a la σ -álgebra generada por las realizaciones hasta el instante $t-1$; con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, y $Z_t = X_t/\sigma_t$ donde $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ y $\text{Var}(Z_t) = 1$, y la restricción $\alpha_1 < 1$. Generalmente, el modelo ARCH(1) se representa como:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \\ X_t &= Z_t \sigma_t.\end{aligned}$$

Si $Z_t \sim N(0, 1)$ entonces $X_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$.

De manera general, el proceso $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un ARCH(q) si:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j X_{t-j}^2,\end{aligned}$$

con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_q \geq 0$, y $Z_t = X_t/\sigma_t$ donde $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ y $\text{Var}(Z_t) = 1$. Generalmente, el modelo ARCH(p) se representa como:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2, \\ X_t &= Z_t \sigma_t.\end{aligned}$$

Así, una generalización de los modelos ARCH son los modelos GARCH, en los cuales la varianza condicional no sólo depende de los cuadrados de las perturbaciones, sino que además también depende de las varianzas condicionales de periodos anteriores, es decir, de σ_t^2 pasados.

El proceso $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un GARCH(p, q) si cumple con:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,\end{aligned}$$

con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_q \geq 0$, $\beta_1 \geq 0, \dots, \beta_p \geq 0$ y $Z_t = X_t/\sigma_t$ con $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ y $\text{Var}(Z_t) = 1$. Usualmente, el modelo GARCH(p, q) se escribe como:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2, \\ X_t &= Z_t \sigma_t.\end{aligned}$$

Por ejemplo, el caso específico de los modelos GARCH(1,1), está definido por un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ que cumple con:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,\end{aligned}$$

con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ y $Z_t = X_t/\sigma_t$ con $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ y $\text{Var}(Z_t) = 1$, y la restricción $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. De manera equivalente, el modelo se describe como:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \\ X_t &= Z_t \sigma_t,\end{aligned}$$

donde usualmente X_t sigue una distribución gaussiana $X_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$, o equivalentemente, $Z_t \sim N(0, 1)$; pero también se podrían considerar otras distribuciones tal que $E(Z_t) = 0$ y $\text{Var}(Z_t) = 1$.

Ejemplo 4. Presentamos el ajuste de un modelo GARCH para la serie de tiempo de los precios de IBM del 1 de enero de 2019 al 31 de diciembre de 2022. La Figura 7 presenta las inversiones de IBM y sus rendimientos.

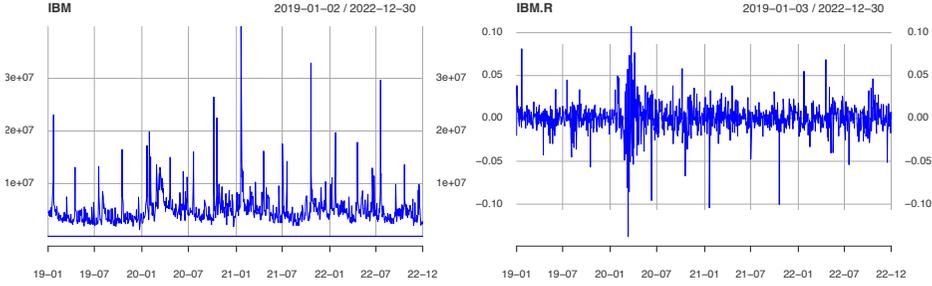


FIGURA 7. GARCH: inversiones de IBM (izquierda) y sus rendimientos (derecha).

Ajustando a esta serie financiera un modelo GARCH(1,1), con distribución gaussiana $X_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, y usando **Stan** se obtienen las estimaciones de los parámetros.

Para las distribuciones iniciales de los parámetros del modelo se utilizan $\mu \sim \text{Normal}(0, 100)$, $\alpha_0 \sim \text{Normal}(0, 100)$, $\alpha_1 \sim \text{Beta}(2, 2)$, $\beta_1 \sim \text{Beta}(2, 2)$ y el valor inicial $\sigma_0 \sim \text{Gama}(0.1, 0.1)$, con las restricciones de que $\alpha_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$, $\beta_1 > 0$ y $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. La Figura 8 muestra las densidades posterior estimadas para los parámetros del modelo GARCH(1,1), así como las estimaciones puntuales de éstos y sus intervalos de probabilidad del 95 %, y se resumen en Tabla 3.

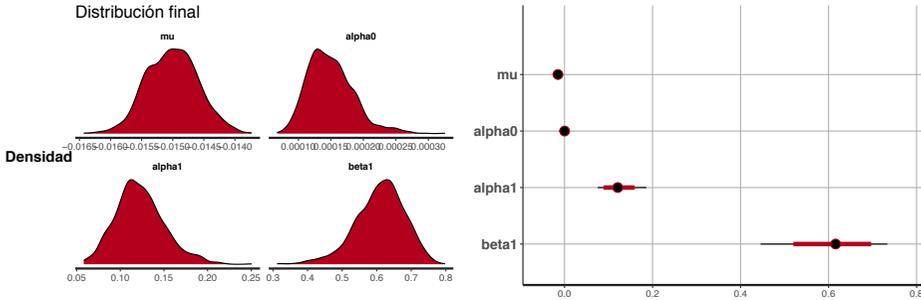


FIGURA 8. GARCH: distribución final de los parámetros, y sus estimaciones puntuales con intervalos del 95 % de probabilidad.

TABLA 3. GARCH: resumen de las estimaciones de los parámetros.

	Media	SE media	SD	2.5 %	25 %	50 %	75 %	97.5 %	neff	Rhat
μ	-0.01	0	0.00	-0.02	-0.02	-0.01	-0.01	-0.01	1054	1
α_0	0.00	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	534	1
α_1	0.12	0	0.03	0.07	0.10	0.12	0.14	0.19	687	1
β_1	0.61	0	0.07	0.45	0.57	0.62	0.66	0.72	544	1

5.3. Modelo Markov-switching GARCH. El modelo Markov-switching GARCH (MS-GARCH), se define a partir de dos procesos GARCH, que son procesos latentes paralelos con diferentes parámetros, y la desviación estándar del retorno se dibuja de acuerdo a uno de los procesos, la elección de los procesos se determina por medio de un HMM.

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un Markov-switching GARCH(1,1) si cumple con:

$$\begin{aligned} (\sigma_t^{(k)})^2 &= \alpha_0^{(k)} + \alpha_1^{(k)} X_{t-1}^2 + \beta_1^{(k)} (\sigma_t^{(k-1)})^2, \\ S_t | S_{t-1} = k &\sim \text{Categorica}(p_k), \\ X_t | S_t = k &= Z_t \sigma_t^{(k)}, \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, K$, usualmente $K = 2$, con $\alpha_0^{(k)} > 0$, $\alpha_1^{(k)} \geq 0$, y $\beta_1^{(k)} \geq 0$, con la restricción $\alpha_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} < 1$. Donde,

$$X_t | \mathcal{F}_{t-1}, S_t = k \sim \mathcal{D}\left(0, (\sigma_t^{(k)})^2\right),$$

sigue una distribución continua con media cero y varianza variable en el tiempo $(\sigma_t^{(k)})^2$, usualmente se usa la distribución gaussiana, $X_t | S_t = k \sim N(0, (\sigma_t^{(k)})^2)$, es decir, $Z_t \sim N(0, 1)$. El proceso estocástico $\{S_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido en el espacio de estados discreto $\{1, \dots, K\}$, caracteriza el modelo MS-GARCH. Note que $\{S_t\}$ es una cadena de Markov homogénea de primer orden, latente (no observada), con matriz de probabilidades de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{K1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K1} & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix},$$

donde $p_{ij} = \mathbb{P}(S_t = j | S_{t-1} = i)$ es la probabilidad de transición del estado $S_{t-1} = i$ al estado $S_t = j$, con las restricciones de $0 \leq p_{ij} \leq 1 \forall i, j \in \{1, \dots, K\}$ y $\sum_{j=1}^K p_{ij} = 1 \forall i \in \{1, \dots, K\}$.

En los modelos MS-GARCH, las varianzas condicionales $(\sigma_t^{(k)})^2$, $k = 1, \dots, K$, se supone que siguen K procesos separados tipo GARCH que evolucionan en paralelo.

Los modelos MS-GARCH permiten abordar los cambios de régimen en los procesos de retorno, donde el proceso estocástico que gobierna los precios del mercado es diferente durante los tiempos de estrés en comparación con los tiempos normales. Los MS-GARCH permiten diferenciar los procesos subyacentes del cambio durante la crisis y la no crisis del mercado.

Ejemplo 5. Presentamos el ajuste de un modelo MS-GARCH para la serie de tiempo de los precios de IBM del 1 de enero de 2019 al 31 de diciembre de 2022. Se ajusta un modelo MS-GARCH(1,1) con $K = 2$ procesos latentes GARCH, y usando **Stan** se obtienen las estimaciones de los parámetros.

La Figura 9 muestra las densidades posterior estimadas para los parámetros del modelo MS-GARCH(1,1). Mientras que la Figura 10 muestra las estimaciones puntuales de los parámetros y sus intervalos de probabilidad del 95%, y se resumen en la Tabla 4.

También se obtienen las estimaciones medias posterior de las volatilidades condicionales de los dos procesos latentes GARCH. La Figura 11 muestra las volatilidades condicionales de los estados 1 y 2, es decir, de los dos procesos GARCH estimados. Se pueden estimar las probabilidades posteriores de pertenecer a los estados ocultos 1 y 2 del proceso de Markov oculto, que se pueden interpretar como los estados de alta volatilidad y baja volatilidad. Ver Figura 12.

Finalmente, podría ser de interés estimar la secuencia más probable de estados ocultos. En la Figura 13 notamos que el estado 1 (de baja volatilidad) se presentó con mayor frecuencia, en comparación al estado 2 (de alta volatilidad). Note también que podríamos identificar las fechas en donde se presentaron estos eventos, y por ejemplo,

relacionarlos a eventos que hayan ocurrido de manera general en la bolsa de valores, o durante la pandemia de COVID-19.

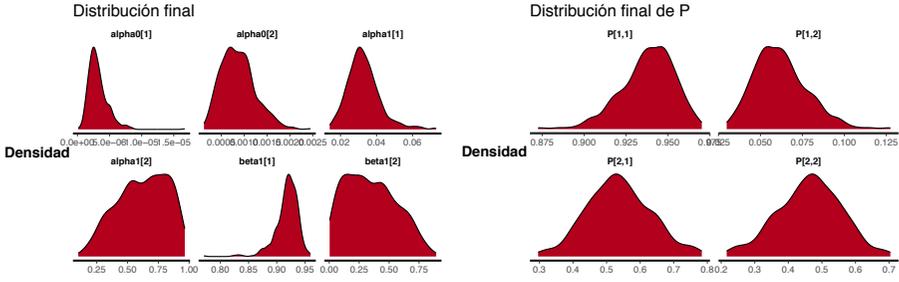


FIGURA 9. MS-GARCH: distribuciones finales de los parámetros.

TABLA 4. MS-GARCH: resumen de las estimaciones de los parámetros.

	Media	SE Media	SD	2.5 %	25 %	50 %	75 %	97.5 %	neff	Rhat
$\alpha_0^{(1)}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	293.615	0.999
$\alpha_0^{(2)}$	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	250.704	1.002
$\alpha_1^{(1)}$	0.033	0.000	0.009	0.018	0.027	0.032	0.037	0.055	340.355	0.999
$\alpha_1^{(2)}$	0.621	0.013	0.202	0.222	0.476	0.639	0.793	0.928	252.491	1.007
$\beta_1^{(1)}$	0.918	0.001	0.021	0.871	0.909	0.921	0.931	0.947	233.346	0.999
$\beta_1^{(2)}$	0.347	0.013	0.212	0.024	0.160	0.323	0.500	0.764	247.781	1.006
$P_{1,1}$	0.938	0.001	0.016	0.902	0.927	0.939	0.950	0.963	361.554	0.998
$P_{1,2}$	0.062	0.001	0.016	0.037	0.050	0.061	0.073	0.098	361.554	0.998
$P_{2,1}$	0.547	0.005	0.090	0.378	0.480	0.549	0.609	0.740	315.908	0.998
$P_{2,2}$	0.453	0.005	0.090	0.260	0.391	0.451	0.520	0.622	315.908	0.998

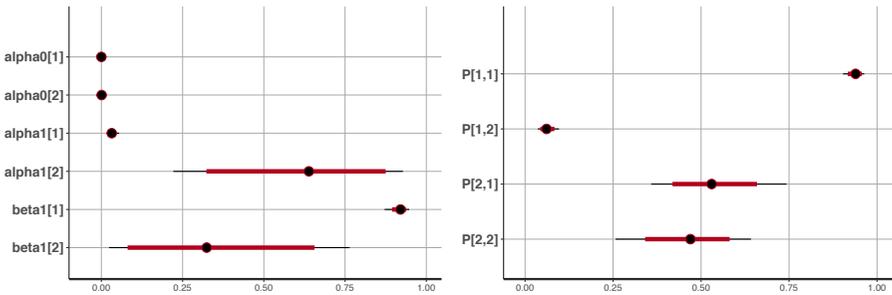


FIGURA 10. MS-GARCH: estimaciones puntuales e intervalos del 95% de probabilidad para los parámetros.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado la teoría de los modelos ocultos de Markov, describiendo sus principales características. También, hemos ilustrado un ejemplo simple de aplicación de los HMM, como lo son las series temporales financieras.

Hoy en día la aplicación de los HMM no se limita al reconocimiento de voz, sino que áreas de investigación como la robótica móvil, ingeniería genética, finanzas, mantenimiento predictivo industrial, psicología, nanotecnología, comunicaciones, entre muchas otras, hacen uso de las herramientas matemáticas de estos modelos para analizar eventos que ocurren en forma aleatoria a través del tiempo.

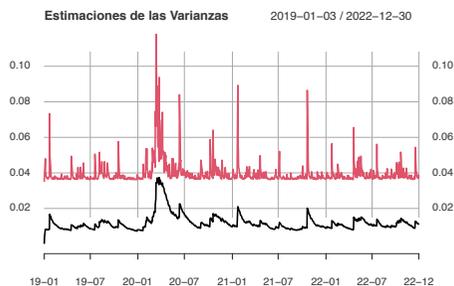


FIGURA 11. MS-GARCH: estimaciones medias finales de las varianzas instantáneas.

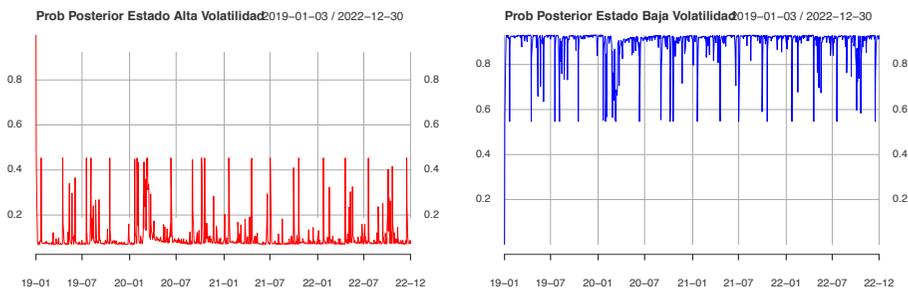


FIGURA 12. MS-GARCH: probabilidades estimadas finales de los estados de alta y baja volatilidad.

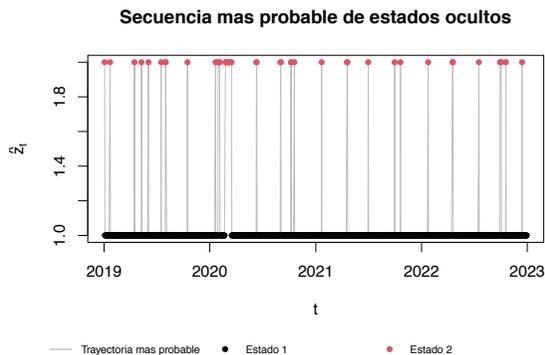


FIGURA 13. MS-GARCH: secuencia estimada más probable de los estados ocultos.

El análisis de series de tiempo financieras es importante hoy en día para gestionar y proyectar resultados. Estas series se componen por variables de mercado que incorporan incertidumbre, de ahí que se necesitan pronosticar. Muchas de las series financieras han sido estudiadas a través de distintos modelos como son: AR, MA, ARCH, GARCH, etc., sin embargo, ninguno de ellos captura la volatilidad cuando hay cambios de régimen, de ahí surgen los modelos MS-GARCH, los cuales actualmente son muy usados en finanzas.

En este trabajo incrustamos los HMM en los MS-GARCH para cambiar entre dos procesos latentes tipo GARCH, esto debido al agrupamiento de volatilidad presente en la mayoría de las series financieras. Estimamos los parámetros de estos modelos a través de la estadística Bayesiana y usando Stan, pues resulta ser una herramienta fácil y eficaz en la implementación de estos modelos.

Debido a su naturaleza Markoviana de los HMM, éstos no toman en cuenta la secuencia de estados que conducen a un estado determinado, sólo depende del estado anterior. Además, no se captura explícitamente el tiempo que la cadena está en un estado dado. En resumen, el HMM básico proporciona un modelo útil para muchas aplicaciones. Sin embargo, éstas pueden estar limitadas por la estructura intrínseca del modelo. Existen muchas extensiones que aumentan el poder de representación del HMM, aunque los parámetros adicionales requeridos a menudo complican las tareas de aprendizaje e inferencia.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los revisores anónimos que brindaron comentarios y sugerencias perspicaces que mejoraron en gran medida tanto la legibilidad como el contenido de este artículo.

APÉNDICE A. CÓDIGOS DE R Y STAN

Los códigos de R y Stan están disponibles en GitHub [lizbethna/HMMBayes.git](https://github.com/lizbethna/HMMBayes.git)

REFERENCIAS

- Albert, J. (2009). *Bayesian Computation with R*. Springer, New York, second edición.
- Ardia, D., Bluteau, K., Boudt, K., Catania, L., y Trottier, D.-A. (2019). Markov-switching GARCH models in R: The MSGARCH package. *Journal of Statistical Software*, 91:1–38.
- Baum, L. E. y Petrie, T. (1966). Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The annals of mathematical statistics*, 37(6):1554–1563.
- Baum, L. E., Petrie, T., Soules, G., y Weiss, N. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(1):164–171.
- Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- Bernardo, J. M. y Smith, A. F. M. (1994). *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Betancourt, M. (2018). A conceptual introduction to Hamiltonian Monte Carlo. *arXiv: Methodology*.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.
- Bollerslev, T. (2023). The story of GARCH: A personal odyssey. *Journal of Econometrics*.
- Chen, F.-S., Fu, C.-M., y Huang, C.-L. (2003). Hand gesture recognition using a real-time tracking method and hidden Markov models. *Image and vision computing*, 21(8):745–758.
- Chen, M.-H., Shao, Q.-M., e Ibrahim, J. G. (2000). *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation*. Series in Statistics. Springer, New York.
- Damiano, L., Peterson, B., y Weylandt, M. (2018). A tutorial on hidden Markov models using Stan. En *Stan conference*.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., y Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39(1):1–22.
- Engle, R. F., Lilien, D. M., y Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 391–407.
- Gamerman, D. y Lopes, H. F. (2006). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, second edición.
- Gómez-Rubio, V. (2020). *Bayesian Inference with INLA*. CRC Press.

- Gupta, A. y Dhingra, B. (2012). Stock market prediction using hidden Markov models. En *2012 Students Conference on Engineering and Systems*, pp. 1–4. IEEE.
- Haas, M., Mittnik, S., y Paoletta, M. S. (2004). A new approach to Markov-switching GARCH models. *Journal of Financial Econometrics*, 2(4):493–530.
- Hassan, M. R. y Nath, B. (2005). Stock market forecasting using hidden Markov model: a new approach. En *5th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA'05)*, pp. 192–196. IEEE.
- Kruschke, J. (2010). *Doing Bayesian data analysis: A tutorial introduction with R, JAGS and Stan*. Academic Press.
- Lukashin, A. V. y Borodovsky, M. (1998). GeneMark.hmm: new solutions for gene finding. *Nucleic acids research*, 26(4):1107–1115.
- Lunn, D., Jackson, C., Best, N., Thomas, A., y Spiegelhalter, D. (2012). *The BUGS Book - A Practical Introduction to Bayesian Analysis*. CRC Press / Chapman & Hall, Boca Raton, Florida.
- Lunn, D. J., Thomas, A., Best, N., y Spiegelhalter, D. (2000). WinBUGS - A Bayesian modelling framework: Concepts, structure, and extensibility. *Statistics and Computing*, 10(4):325–337.
- Niu, F. y Abdel-Mottaleb, M. (2005). HMM-based segmentation and recognition of human activities from video sequences. En *2005 IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, pp. 804–807. IEEE.
- Ntzoufras, I. (2009). *Bayesian Modeling Using WinBUGS*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Plummer, M. (2003). JAGS: A program for analysis of Bayesian graphical models using Gibbs sampling. En *Proceedings of the 3rd International Workshop on Distributed Statistical Computing (DSC 2003)*, Viena, Austria.
- R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org>.
- Rabiner, L. R. (1989). A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2):257–286.
- Robert, C. P. (1994). *The Bayesian Choice*. Springer-Verlag, New York.
- Robert, C. P. y Casella, G. (2000). *Monte Carlo statistical methods*. Springer Texts in Statistics. Springer.
- Rue, H., Martino, S., y Chopin, N. (2009). Approximate Bayesian inference for latent Gaussian models by using integrated nested Laplace approximations. *Journal of the Royal Statistical Society*, 71(2):319–392.
- Rue, H., Riebler, A., Sørbye, S. H., Illian, J. B., Simpson, D. P., y Lindgren, F. K. (2017). Bayesian computing with INLA: A review. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 4(1):395–421.
- Stan Development Team (2020). RStan: the R interface to Stan. R package version 2.21.2.
- Stan Development Team (2023). *Stan Modeling Language Users Guide and Reference Manual 2.31*.
- Sucar, L. E. (2015). Probabilistic graphical models. *Advances in Computer Vision and Pattern Recognition. London: Springer London*. doi, 10(978):1.
- Zucchini, W., MacDonald, I. L., y Langrock, R. (2016). *Hidden Markov models for time series: an introduction using R*. Número 150 en Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall/CRC, 2a. edición.

Lizbeth Naranjo Albarrán,
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Círculo Exterior s/n, Ciudad Universitaria, Coyoacán,
C.P. 04510, Ciudad de México, México.
e-mail: lizabethna@ciencias.unam.mx

Luz Judith Rodríguez Esparza,
Departamento de Matemáticas y Física,
Cátedra CONACyT, Universidad Autónoma de Aguascalientes.
Av. Universidad 940, Ciudad Universitaria,
C.P. 20100, Aguascalientes, Aguascalientes, México.
e-mail: judithr19@gmail.com



CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME DE LAS SERIES DE FOURIER

FERNANDO BRAMBILA PAZ & LUIS ANDRÉS DÍAZ LEAL MERINO

RESUMEN. En este artículo de divulgación se exponen criterios de convergencia puntual y uniforme para las series de Fourier. Se trata el caso de las funciones que cumplen las condiciones de Dirichlet y el criterio de Dini. Este último se aplica a las funciones Hölder continuas. Finalmente se exponen ejemplos particulares.

1. INTRODUCCIÓN

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en $X \subset \mathbb{R}$, si sus partes real e imaginaria son Lebesgue-integrables. En tal caso, se define su integral mediante:

$$\int_X f(x) dx = \int_X u(x) dx + i \int_X v(x) dx,$$

donde u y v son las partes real e imaginaria de f , respectivamente. La función f es L -periódica si cumple:

$$f(x + L) = f(x),$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea $p \in [1, \infty)$. Se denotará por $\mathbb{T}^p(L)$ al conjunto de funciones L -periódicas tales que:

$$\int_0^L |f(x)|^p dx < \infty.$$

Es importante enunciar el siguiente teorema, el cual es bien conocido y puede encontrarse como ejercicio en [1].

TEOREMA 1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en X , si y solo si la función $|f|$ es integrable en X . En tal caso:

$$\left| \int_X f(x) dx \right| \leq \int_X |f(x)| dx.$$

Definición 2. Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Se define el k -ésimo coeficiente de Fourier, denotado $c_k(f)$, mediante la ecuación:

$$(1) \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

La n -ésima suma parcial de Fourier, denotada $S_n(f)$, está definida por la siguiente fórmula:

$$(2) \quad S_n(f, x) = \sum_{j=-k}^k c_j(f) e^{ijx}.$$

2010 Mathematics Subject Classification. 60J99.

Palabras clave. Serie de Fourier, coeficiente de Fourier, convergencia puntual, convergencia uniforme.

Las ecuaciones (1) y (2) contienen números complejos que no tienen sentido si la función es real. Una forma de evitar esto es definir:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2) se obtiene:

$$(3) \quad S_n(f, x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \operatorname{sen}(kx)\}.$$

De la ecuación (1) se obtienen las siguientes identidades:

$$(4) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$(5) \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Por lo tanto la ecuación (3) no contiene números complejos si f es real.

TEOREMA 3. (Lema de Riemann-Lebesgue) Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Entonces:

$$\lim_k c_k(f) = 0.$$

De acuerdo al lema de Riemann-Lebesgue, la sucesión $c_k(f)$ converge a cero. La velocidad a la cual dicha cantidad converge está relacionada con la convergencia de las series de Fourier, como se verá en la siguiente sección. El propósito de la siguiente definición es introducir una clase de funciones cuyos coeficientes de Fourier convergen a una velocidad adecuada.

Definición 4. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de *variación acotada* en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, si $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición del intervalo, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq M.$$

Se denotará por $\mathcal{BV}[a, b]$ al conjunto de funciones de variación acotada en $[a, b]$.

Observación 1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de variación acotada en un intervalo $I = [a, b]$ si sus partes real e imaginaria lo son. Si $f \in \mathcal{BV}[a, b] \cap \mathcal{BV}[b, c]$, entonces es fácil verificar que $f \in \mathcal{BV}[a, c]$. Toda función de variación acotada en I es integrable y sus límites laterales existen en cada punto de I . Esto último es consecuencia del teorema de Jordan (sección 6.3 de [5]), el cual afirma que una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones monótonas.

El siguiente conjunto de definiciones permite dar condiciones sencillas bajo las cuales una función resulta ser de variación acotada. Cabe destacar que la Definición 6 ya incluye una amplia familia de funciones descendentes, por ejemplo, la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es suave a pedazos en el intervalo $[0, 1]$.

Definición 5. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es *absolutamente continua* en $I = [a, b]$ si tiene las siguientes propiedades:

1. f' existe para casi todo $x \in I$.
2. f' es integrable.
3. Se cumple la siguiente identidad:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Definición 6. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es suave a pedazos en $I = [a, b]$ si tiene las siguientes propiedades:

1. Existe una partición $a = t_0 < \dots < t_n < b$ tal que f es diferenciable con continuidad en cada intervalo (a_k, a_{k+1}) .
2. f posee límites laterales en cada punto de I .
3. La función f' es integrable en I .

Definición 7. Una función f es monótona a pedazos en I , si existe una partición $a = t_0 < \dots < t_n = b$ del intervalo I tal que f es monótona en cada intervalo $[a_k, a_{k+1})$.

A continuación se da un conjunto de condiciones que aseguran que f sea de variación acotada.

TEOREMA 8. Supóngase que una función cumple alguna de las siguientes condiciones en el intervalo $I = [a, b]$:

1. Es absolutamente continua.
2. Es suave a pedazos.
3. Es monótona.
4. Es monótona a pedazos.

Entonces es de variación acotada en I .

Los incisos 1 y 3 pueden consultarse en [5]. Los otros incisos son consecuencia de los anteriores.

Definición 9. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -periódica, satisface las condiciones de Dirichlet en $I = [0, 2\pi]$ si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. f es de variación acotada en I .
2. f tiene una cantidad finita de discontinuidades infinitas¹ en I . Cuando se excluyen vecindades arbitrariamente pequeñas de estas discontinuidades, la función es de variación acotada en cada uno de los intervalos restantes. Además se tiene:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

TEOREMA 10. Supóngase que f satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo $[0, 2\pi]$. Entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$c_k(f) \leq \frac{C}{|k|},$$

si $k \neq 0$.

Demostración. La demostración para $f \in \mathcal{BV}[0, 2\pi]$ puede consultarse en [6]. La otra parte es una consecuencia del caso anterior. □

Definición 11. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Hölder continua si existen $\alpha \in (0, 1]$ y $C \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Observación 2. Con $\alpha = 1$ se obtienen las funciones Lipschitz-continuas. Obsévese que toda función Hölder continua es uniformemente continua y por lo tanto, es continua.

¹Una función f tiene una discontinuidad infinita en t_0 si los límites $f(t_0^+)$ y $f(t_0^-)$ son ambos ∞ , o bien $-\infty$.

2. CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME

La convergencia puntual de las series de Fourier es un tema delicado. Se sabe por ejemplo, que si $1 < p < \infty$ y $f \in \mathbb{T}^p(2\pi)$, entonces se puede asegurar la convergencia puntual casi donde quiera. Esta afirmación es conocida como el **teorema de Carleson-Hunt** (Teorema 4.4 de [9]). Para $p = 1$ no puede decirse nada: existen funciones integrables cuya serie de Fourier diverge casi donde quiera. El ejemplo clásico se debe a Kolmogorov [10]. La continuidad tampoco asegura la convergencia: existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en una cantidad numerable de puntos (Ejercicio 2 de la sección 2, capítulo 2 de [7]).

En esta sección se demostrará un resultado que asegura la convergencia puntual de las series de Fourier para funciones de variación acotada. También se demuestra el criterio de Dini, y este último se usará para demostrar la convergencia uniforme en el caso de funciones Hölder continuas.

Primero se demostrará el teorema de Féjer, el cual implica que la suma Césaro de $S_n(f, t)$ converge a $f(t)$ bajo condiciones muy débiles. En principio, y debido a que dicha suma es computacionalmente ineficiente, el resultado no parece ser útil en la práctica. Sin embargo, esta suma tiene la ventaja de no presentar el fenómeno de Gibbs. La demostración de este sorprendente resultado está contenida en [8]. Una introducción más intuitiva al fenómeno de Gibbs puede consultarse en internet, ver por ejemplo [4].

Definición 12. Se define el *kérel de Fejér*, denotado κ_n , mediante la ecuación:

$$(6) \quad \kappa_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}.$$

Para $n \geq 2$ el kérel de Fejér puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$(7) \quad \kappa_{n-1}(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

Con esta expresión a la mano, el siguiente teorema es muy fácil de demostrar.

TEOREMA 13. *El kérel de Fejér tiene las siguientes propiedades:*

1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, κ_n es no negativa e integrable:

$$\int_0^{2\pi} \kappa_n(t) dt = 1.$$

2. Para toda $0 < \delta < \pi$:

$$\lim_n \int_\delta^{2\pi-\delta} \kappa_n(t) dt = 0.$$

3. Para toda $0 < \delta < \pi$:

$$\lim_n \sup_{\delta < t < 2\pi-\delta} \kappa_n(t) = 0.$$

4. Para toda $t \in \mathbb{R}$:

$$\kappa_n(t) = \kappa_n(-t).$$

Demostración. Para el inciso 1 basta integrar la ecuación (6), notando que κ_n es no negativa por la ecuación (7). Los demás incisos se siguen de (7). \square

Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Se define $\sigma_n(f)$ mediante la siguiente fórmula:

$$(8) \quad \sigma_n(f, t) = \int_0^{2\pi} f(t-x) \kappa_n(x) dx.$$

Como f es 2π -periódica, es claro que $\sigma_n(f)$ también es 2π -periódica para toda $n \in \mathbb{N}$. El siguiente teorema es conocido como el **teorema de Fejér**².

TEOREMA 14. ([7], [8]) Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. Supóngase que $t \in \mathbb{R}$ es tal que:

$$\ell(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2}$$

exite y es finito. Entonces:

$$\lim_n \sigma_n(f, t) = \ell(t).$$

El resultado también es válido si $\ell(t) = \infty$ o $\ell(t) = -\infty$. En particular, si f es continua en t , entonces $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ si $n \rightarrow \infty$. Más aún, si f es continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\sigma_n(f)$ converge uniformemente a f en dicho intervalo.

Demostración. Primero se supondrá que $\ell(t) \in \mathbb{R}$, el caso en que $\ell(t) \in \{-\infty, \infty\}$ es muy similar como se verá después. Del inciso 1, Teorema 13 se tiene:

$$\ell(t) = \int_0^{2\pi} \kappa_n(u) \ell(t) du.$$

Por lo tanto:

$$\sigma_n(f, t) - \ell(t) = \int_0^{2\pi} \kappa_n(u) [f(t-u) - \ell(t)] du.$$

El integrando es una función 2π -periódica, lo cual permite cambiar el intervalo de integración por $(-\delta, 2\pi - \delta)$:

$$(9) \quad \sigma_n(f, t) - \ell(t) = \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} \kappa_n(u) [f(t-u) - \ell(t)] du.$$

Si $0 < \delta < \pi$, entonces la integral en la ecuación anterior es igual a la suma de las integrales sobre los intervalos $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$, (δ, π) y $(\pi, 2\pi - \delta)$. Usando el inciso 4 del Teorema 13 y realizando el cambio de variable $u \mapsto -u$ se verifica que:

$$(10) \quad \int_{-\delta}^0 \kappa_n(u) [f(t-u) - \ell(t)] du = \int_0^\delta \kappa_n(u) [f(t+u) - \ell(t)] du.$$

Mediante un argumento similar se obtiene:

$$(11) \quad \int_\pi^{2\pi-\delta} \kappa_n(u) [f(t-u) - \ell(t)] du = \int_\delta^\pi \kappa_n(u) [f(t+u) - \ell(t)] du.$$

Insertando (10) y (11) en (9):

$$(12) \quad \sigma_n(f, t) - \ell(t) = \int_0^\delta g_n(t, u) du + \int_\delta^\pi g_n(t, u) du,$$

donde:

$$g_n(t, u) = \kappa_n(u) [f(t+u) + f(t-u) - 2\ell(t)].$$

Ahora bien, dado $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $\pi > \delta > 0$ tal que:

$$(13) \quad |u| < \delta \Rightarrow |f(t+u) + f(t-u) - 2\ell(t)| < \epsilon.$$

Multiplicando ambos lados por κ_n e integrando desde 0 hasta δ se obtiene:

$$(14) \quad \int_0^\delta |g_n(t, u)| du < \epsilon.$$

Como $\delta < \pi$, usando el inciso 3 del Teorema 13 se deduce que para n suficientemente grande:

$$\sup_{\delta < u < 2\pi - \delta} \kappa_n(u) < \epsilon.$$

²El teorema sigue siendo válido si κ_n se sustituye por cualquier sucesión $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cumpla el Teorema 13.

De lo anterior se deduce que:

$$(15) \quad \int_{\delta}^{\pi} |g_n(t, u)| du < \epsilon R_t,$$

donde:

$$R_t = \int_0^{2\pi} |f(u) - 2\ell(t)| du.$$

Insertando (14) y (15) en (12) se obtiene:

$$|\sigma_n(f, t) - \ell(t)| < \epsilon + \epsilon R_t,$$

lo cual completa la prueba.

Si f es continua en un intervalo cerrado I , entonces es uniformemente continua en dicho intervalo. Por lo tanto, puede elegirse $0 < \delta < \pi$ tal que (13) es válida para toda $t \in I$. También nótese que R_t es acotada en I ya que, en este caso, f es continua en I . El resto de la prueba es idéntica.

Finalmente, si $\ell(t) = \infty$, en la demostración se sustituye $\ell(t)$ por $\frac{5}{2}M > 0$, excepto que (13) se expresa de la siguiente forma:

$$|u| < \delta \Rightarrow f(t+u) + f(t-u) - 2M \geq \frac{1}{2}M.$$

Se multiplica ambos lados por $\kappa_n(u)$ y se integra:

$$\int_0^{\delta} g_n(t, u) du \geq \frac{1}{2}M \int_0^{\delta} \kappa_n(u) du.$$

De acuerdo a los incisos 1 y 2 del Teorema 13, el lado derecho de esta desigualdad converge a M . La otra integral en (12) converge a cero por el mismo argumento de antes. \square

Observación 3. Puede demostrarse usando las ecuaciones (6) y (8) la siguiente identidad:

$$(16) \quad \sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_n(f).$$

En otras palabras, la sucesión $\sigma_n(f)$ es la suma Césaro de las sumas parciales $S_n(f)$, o bien, el promedio de $S_n(f)$.

El siguiente teorema da condiciones que garantizan la convergencia de una serie de Fourier.

TEOREMA 15. ([7]) *Sea $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y supóngase que para $|k|$ suficientemente grande, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$c_k(f) \leq \frac{C}{|k|}.$$

Entonces $S_n(f, t)$ converge al mismo límite que $\sigma_n(f, t)$, siempre que esta última sucesión tenga un límite. En particular, si f es continua en t , entonces $S_n(f, t)$ converge a $f(t)$. Más aun, si $\sigma_n(f)$ converge uniformemente en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces $S_n(f)$ converge uniformemente a f en dicho intervalo.

Demostración. Usando la hipótesis se tiene la siguiente serie de desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{n < |k| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} |c_k(f)| &\leq 2C \sum_{n < k \leq \lfloor \lambda n \rfloor} \frac{1}{k} \\ &\leq 2C \int_n^{\lambda n} \frac{1}{x} dx \\ &= 2C \log \lambda \end{aligned}$$

para alguna $C > 0$ y n suficientemente grande. Haciendo $\lambda \rightarrow 1$, se concluye que para toda $\epsilon > 0$, existen $\lambda > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que:

$$(17) \quad \sum_{n < k \leq \lfloor \lambda n \rfloor} |c_k(f)| < \epsilon,$$

para toda $n \geq N$.

Ahora bien, sea $\epsilon > 0$ y sean $\lambda > 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que se cumple (17). La siguiente identidad puede deducirse directamente de la Definición 12 si $n \in \mathbb{N}$ es lo suficientemente grande (de forma que $\lfloor \lambda n \rfloor > n$):

$$(18) \quad S_n(f, t) = \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} (\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \gamma_n(t)) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f, t),$$

donde

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n < |j| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} \left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right) c_j(f) e^{ijt}.$$

Supóngase que $\sigma_n(f, t)$ converge a $\ell(t)$. Nótese que si $n \rightarrow \infty$, entonces:

$$\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f, t) \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda-1} \ell(t) - \frac{1}{\lambda-1} \ell(t) = \ell(t).$$

Por lo tanto, basta verificar que para valores grandes de n :

$$(19) \quad \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} |\gamma_n(t)| < \epsilon.$$

Esto implicará que $S_n(f, t) \rightarrow \ell(t)$ debido a la ecuación (18). Para probar (19) nótese que:

$$\begin{aligned} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} |\gamma_n(t)| &= \frac{1}{2\pi} \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \left| \sum_{n < |j| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} \left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right) c_j(f) e^{ijt} \right| \\ &\leq \sum_{n < |j| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} \left| \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - |j|}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \right| |c_j(f)| \\ &\leq \sum_{n < |j| \leq \lfloor \lambda n \rfloor} |c_j(f)| < \epsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a (17).

Finalmente, si $\sigma_n(f)$ converge uniformemente en un intervalo cerrado I , entonces $S_n(f)$ también converge uniformemente en dicho intervalo, pues la desigualdad (19) no depende de t . □

Si $f \in \mathcal{BV}[0, 2\pi]$ es 2π -periódica, entonces de la Observación 1 se extrae que $f \in \mathbb{T}(2\pi)$, y además:

$$\ell(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t-h) + f(t+h)}{2},$$

existe y es finito para toda $t \in [0, 2\pi]$. Estas son precisamente las hipótesis del Teorema de Féjer. Juntando lo anterior con el Teorema 10 se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 16. *Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función 2π -periódica que satisface las condiciones de Dirichlet en $[0, 2\pi]$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y se tiene:*

$$\lim_n S_n(f, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2}.$$

En particular, si f es continua en t , entonces la serie de Fourier de f converge a $f(t)$. Si además f es continua en un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$, entonces su serie de Fourier converge uniformemente en dicho intervalo.

El siguiente teorema es conocido como el **criterio de Dini**.

TEOREMA 17. ([7], [8]) Sean $f \in \mathbb{T}(2\pi)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty.$$

Entonces:

$$\lim_n S_n(f, t_0) = f(t_0).$$

Demostración. Se supondrá que $t_0 = f(t_0) = 0$, el caso general se sigue de esto. Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} &= e^{-int} \sum_{k=-n}^n e^{i(k+n)t} \\ &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\ &= e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{\text{sen}(n + 1/2)t}{\text{sen } t/2}, \end{aligned}$$

de donde:

$$(20) \quad \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\text{sen}(n + 1/2)t}{\text{sen } t/2}.$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

Insertando (20) en la ecuación anterior:

$$(21) \quad S_n(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \cos(t/2)}{\text{sen}(t/2)} \text{sen}(nt) dt.$$

La hipótesis implica que la función:

$$t \mapsto \frac{f(t) \cos(t/2)}{\text{sen}(t/2)},$$

es integrable en $(0, 2\pi)$. Por lo tanto, el teorema de Riemann-Lebesgue (Teorema 3) implica que las integrales del lado derecho en la ecuación (21) tienden a cero si $n \rightarrow \infty$. \square

El criterio de Dini puede aplicarse a las funciones Hölder continuas para demostrar la convergencia puntual. Con un poco de esfuerzo adicional se obtiene un resultado más fuerte.

TEOREMA 18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2π -periódica y Hölder continua en el intervalo $[0, 2\pi]$. Entonces $S_n(f)$ converge uniformemente a f .

Demostración. La prueba requiere una definición. Sea $I = [a, b]$. Una sucesión de funciones $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente equicontinua, si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in I$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \epsilon,$$

para toda n . Un corolario del Teorema de Arzelà-Ascoli afirma que, si una sucesión $g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones continuas converge puntualmente a una función f , y

dicha sucesión es uniformemente equicontinua³, entonces f es continua y g_n converge uniformemente a f (ver el Ejercicio 7.35 de [11]).

Ahora bien, se define la siguiente sucesión:

$$g_n(x) = f(x) - S_n(f, x).$$

El criterio de Dini (Teorema 17) implica que g_n converge puntualmente a cero. Se probará que la sucesión g_n es uniformemente equicontinua, y esto completará la prueba de acuerdo al párrafo anterior. Para la prueba se define:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Se reescribe la n -ésima suma parcial de Fourier de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n c_n(f) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-u)} \right) du, \end{aligned}$$

de donde:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) D_n(x-u) du.$$

Al realizar el cambio de variable $u = -z$ en la ecuación anterior y notando que el integrando es una función 2π -periódica, se obtiene:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du.$$

Aplicando la ecuación anterior, se deduce que:

$$(22) \quad |g_n(x) - g_n(y)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) [f(x+u) - f(x) + f(y+u) - f(y)] du.$$

Además nótese que, como f es Hölder continua, existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(23) \quad |\{f(x+u) - f(x)\} + \{f(y+u) - f(y)\}| \leq C_1 |u|^\alpha,$$

$$(24) \quad |\{f(x+u) - f(y+u)\} + \{f(x) - f(y)\}| \leq C_2 |x-y|^\alpha,$$

para cualesquiera $x, y, u \in \mathbb{R}$. Finalmente, puede elegirse $C_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|\text{sen}(u/2)| \geq C_3 |u|,$$

para toda $u \in [-\pi, \pi]$. Juntando con la ecuación (20) se obtiene la siguiente cota superior:

$$(25) \quad |D_n(u)| \leq \frac{C_3}{|u|}.$$

Aplicando las desigualdades (23), (24) y (25) en la ecuación (22):

$$(26) \quad 2\pi |g_n(x) - g_n(y)| \leq C'_1 \int_{|u| < |x-y|} |u|^{\alpha-1} du + C'_2 |x-y|^\alpha \int_{|x-y| < u < \pi} \frac{C_4}{u} du.$$

³De hecho, basta pedir que la sucesión sea equicontinua, lo cual es una condición más débil.

Como $u \mapsto u^{\alpha-1}$ es integrable en cualquier intervalo $(-r, r)$, la primera integral del lado derecho en la ecuación (26) converge a cero si $|x-y| \rightarrow 0$. Para la segunda integral se tiene:

$$|x-y|^\alpha \int_{|x-y| < u < \pi} \frac{1}{u} du = |x-y|^\alpha (\log \pi - \log |x-y|).$$

Dado que el lado derecho converge a cero si $|x-y| \rightarrow 0$, la cantidad en el lado izquierdo de (26) converge a cero si $|x-y| \rightarrow 0$, independientemente de n . Esto concluye la demostración. \square

3. EJEMPLOS Y APLICACIONES.

La convergencia de las series de Fourier juega un papel importante en muchas áreas de la ciencia. Un ejemplo sencillo consiste en buscar una solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x),$$

cuando $f \in \mathbb{T}(2\pi)$. La técnica consiste en utilizar la ecuación para encontrar los coeficientes de Fourier de y . Esta idea puede explorarse con más profundidad en [3]. El autor utiliza las series de Fourier para resolver la ecuación de calor. En el mismo texto se expone otra aplicación interesante, el cálculo de sumas infinitas como la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Algunas áreas aplicadas utilizan las ideas expuestas anteriormente. En el análisis de circuitos eléctricos se utilizan series de Fourier cuando el voltaje de un circuito eléctrico no es sinusoidal. En [2] se da una excelente exposición del tema.

Esta sección se concluye con algunos ejemplos sencillos que exponen la utilidad de los teoremas. Se invita al lector a graficar las sumas parciales junto a la función original, y prestar atención al fenómeno de Gibbs. Considérese también graficar las sumas de Césaro.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función 2π -periódica definida en el intervalo $I = (0, 2\pi)$ mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = \log \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right),$$

y cero en cualquier otro caso. La función f es diferenciable con continuidad en cada intervalo compacto contenido en I . Tiene discontinuidades infinitas en $x = 0, 2\pi$. Además es integrable en I , y se tiene:

$$a_0(f) = 0.$$

Por lo tanto f satisface las condiciones de Dirichlet en $[0, 2\pi]$. También, dado que f es una función par:

$$b_k(f) = 0.$$

Para calcular $a_k(f)$, $k \geq 1$, defínase:

$$I_k = \int_0^\pi \cot \frac{t}{2} \operatorname{sen}(kt) dt.$$

Usando integración por partes y aprovechando la paridad de f , se obtiene:

$$(27) \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = -\frac{1}{k} I_k.$$

Ahora bien, tomando la parte real de la ecuación (20):

$$1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jt) = \operatorname{sen}(kt) \cot \frac{t}{2} + \cos(kt).$$

Integrando ambos lados desde 0 hasta π se obtiene:

$$I_k = \pi + \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^\pi \cos(jt) dt - \int_0^\pi \cos(kt) dt = \pi.$$

Insertando en (27):

$$a_k(f) = -\frac{1}{k}.$$

Por lo tanto, el Teorema ?? implica que:

$$-\log\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k},$$

para toda $x \in [0, 2\pi]$. Algunos valores interesantes se obtienen sustituyendo $x = \pi, 1$ en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} \log(2) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}, \\ \log\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\right) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función 2π -periódica dada por:

$$f(x) = \frac{x - \pi}{2},$$

para $x \in [0, 2\pi)$. Entonces f es de variación acotada en $[0, 2\pi]$. Al encontrar los coeficientes de Fourier de f , se obtiene:

$$\frac{x - \pi}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k},$$

para toda $x \in (0, 2\pi)$.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud al árbitro anónimo y al comité editorial de la revista.

REFERENCIAS

- [1] Bartle, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [2] Bolyestad, R. L., *Introductory circuit analysis*. Pearson Education, treceava edición.
- [3] Dym, H., McKean, H. L., *Fourier series and integrals*. Academic Press, 1972.
- [4] Weisstein, E. W., *Gibbs phenomenon*. From Mathworld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html>
- [5] Royden, H. L., Fitzpatrick, P., M. *Real analysis*. China Machine Press, cuarta edición.
- [6] Tabileson, M. *Fourier coefficients of functions of bounded variation*. Proc. American Mathematical Society, no. 18, 766, 1967.
- [7] Katznelson, Y. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [8] Carslaw, H. S. *Introduction to the theory of Fourier series and integrals*. Dover Publications, Inc., tercera edición.
- [9] Jørsboe, O. G., Mejlbro, L. *The Carleson-Hunt theorem on Fourier series*. Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1982.
- [10] Kolmogorov A. *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*. Fundamenta Mathematicae, no. 4, 324–328, 1922.
- [11] Clapp M. *Análisis matemático*. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2015.

Fernando Brambila Paz

Departamento de Matemáticas,

Facultad de Ciencias,

Universidad Nacional Autónoma de México.

Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, Coyoacán,

C.P. 04510, Ciudad de México, México.

e-mail: fernandobrambila@gmail.com

Luis Andrés Díaz Leal Merino

Sección Ríos, Col. Jardines de Morelos

Ecatepec, C.P. 55070, Estado de México

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0405-6998>

e-mail: andy-dlm@ciencias.unam.mx



CEROS DE POLINOMIOS ALEATORIOS TRIGONOMÉTRICOS

VERANIA HERNÁNDEZ ORGAZ & LILIANA PERALTA

RESUMEN. En este trabajo damos una deducción detallada de la fórmula de Kac-Rice y la utilizamos para calcular el valor esperado del número de raíces, N , en un intervalo finito de cierta clase de polinomios aleatorios trigonométricos. Además, probamos la regularidad en L^p para $p \geq 1$ de la variable aleatoria N .

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento de las raíces de polinomios aleatorios es un área de investigación que ha sido desarrollada desde mediados del siglo pasado (vea por ejemplo [12], [13]). Este tema es relevante para la teoría de Probabilidad y otras áreas de la ciencia por encontrarse en la intersección de varias ramas de la Matemática y la Física. Dentro de las clases de los polinomios aleatorios, es de particular interés la de los trigonométricos debido a sus aplicaciones en Física Nuclear [17]. En 1966 Duannage [7] probó que el número medio de los ceros reales de polinomios trigonométricos con coeficientes gaussianos es asintóticamente proporcional al grado del polinomio. A partir de este trabajo muchos resultados han sido desarrollados hasta nuestros días (el lector interesado puede consultar por ejemplo [8], [9], [1]).

El objetivo principal de este trabajo es probar la regularidad en L^p , para $p \geq 1$, de los ceros de polinomios aleatorios trigonométricos sobre el intervalo $[0, 1]$. Además, deduciremos la fórmula de Kac-Rice y la aplicaremos al caso de polinomios aleatorios trigonométricos.

Para lograr nuestro objetivo, en la Sección 2.1 introduciremos la fórmula de Kac, la cual cuenta el número de raíces de determinadas funciones deterministas de variable real. Posteriormente, en la Sección 2.2, extenderemos la fórmula de Kac al caso estocástico y la aplicaremos en la Sección 3.1 para encontrar el valor esperado del número de ceros, en el intervalo $[0, 1]$, de los polinomios aleatorios de la forma

$$(1) \quad F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left(a_j \operatorname{sen} \left(\frac{jt}{n} \right) + b_j \cos \left(\frac{jt}{n} \right) \right),$$

donde $\{a_j\}_{1 \leq j \leq n}$ y $\{b_j\}_{1 \leq j \leq n}$ son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Finalmente, en la Sección 3.2 probaremos la regularidad en L^p de las raíces de los polinomios definidos en (1).

2. FÓRMULA DE KAC-RICE

2.1. Fórmula de conteo de Kac. Mark Kac (1914-1984), fue un matemático polaco que tuvo varias contribuciones en matemáticas, entre ellas, su fórmula de conteo para el número de raíces reales de funciones que cumplen determinadas características, las cuales llamaremos *funciones convenientes*.

Definición 1. Una función $f : A \subset \mathbb{R}$ de clase $C^1(A, \mathbb{R})$, es decir, continuamente diferenciable sobre A , se dice que es conveniente si satisface las siguientes condiciones:

1. Todas sus raíces son no degeneradas, es decir, $\{t \in A : f(t) = 0 \text{ y } f'(t) = 0\} = \emptyset$.
2. Si $A = [a, b]$, $f(a)f(b) \neq 0$.
3. Si $A = \mathbb{R}$, f es una función propia, es decir, la imagen inversa de compactos es compacta.

De aquí en adelante, cuando hacemos referencia a una función conveniente, su dominio determina, por supuesto, las hipótesis que esta cumpla, es decir, si consideramos una función conveniente en un intervalo compacto entenderemos que en los extremos de dicho intervalo no deberá anularse y sus ceros serán no degenerados, por otra parte, si la consideramos en el conjunto de todos los reales, esta función deberá cumplir la característica de ser propia además de no tener ceros degenerados.

Ejemplos 1. Se muestran algunas funciones que ejemplifican la Definición 1.

1. Las rectas $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$, son funciones convenientes tanto en un intervalo cerrado como en los reales, pues f no tiene puntos donde su derivada se anule y tiene por raíz $x_0 = \frac{-b}{m}$. Si $m = 0$ debemos hacer $b \neq 0$ para que f conserve la característica de ser conveniente.
2. La función $f(x) = \text{sen}(x)$ definida sobre el conjunto de los números reales no es una función conveniente, pues el conjunto $\{0\}$ es compacto con la topología usual y $f^{-1}(\{0\}) = \{x = n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ no lo es. Sin embargo, podemos restringir a f en un intervalo cerrado que contenga un número finito de raíces y estas no están en los extremos del intervalo, en tal caso, f sí sería una función conveniente en dicho intervalo.
3. La función f definida para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ como $f(x) = x^n$ no es una función conveniente si consideramos el conjunto de los números reales o un intervalo cerrado que contenga al cero en el dominio de la función, puesto que $x = 0$ será un cero degenerado, ya que $f'(x) = nx^{n-1}$.

En la Figura 1 se muestran las gráficas de dos funciones convenientes.

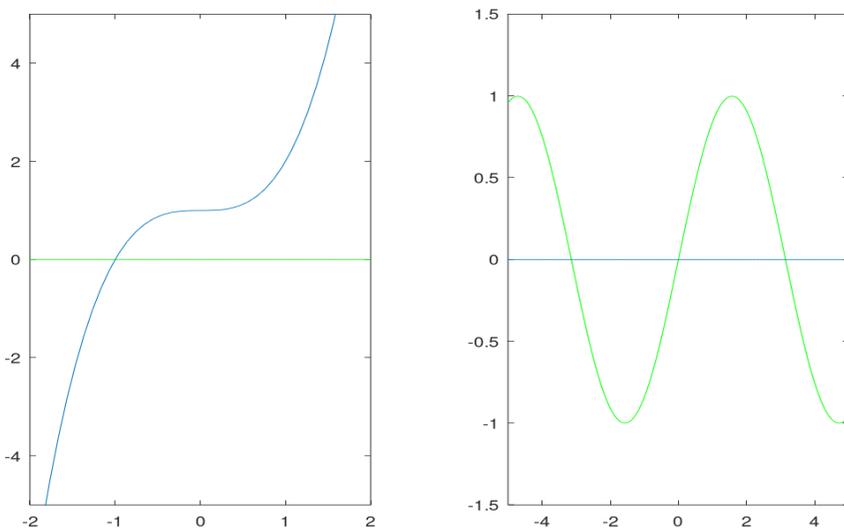


FIGURA 1. El gráfico de la izquierda representa un polinomio de la forma $p(x) = x^3 + 1$ y el de la derecha es la función $f(x) = \text{sen}(x)$, ambas son funciones convenientes en el dominio que se presenta.

Consideremos la siguiente definición.

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos

$$(2) \quad N(f, A) = |\{t \in A : f(t) = 0\}|,$$

donde $|B|$ se refiere a la cardinalidad del conjunto B . De esta manera $N(f, A)$ representa el número de raíces de f en el subconjunto A .

La proposición que presentamos a continuación es conocida como la fórmula de Kac (vea [14]). Hemos incluido un resultado obtenido en [6] en el primer punto de la proposición.

PROPOSICIÓN 3.

I. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función conveniente, entonces

$$N(f, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{|f(t)| < \varepsilon} |f'(t)| dt.$$

Más aún, para $0 < \varepsilon < \min(|f(a)|, |f(b)|, \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)|)$, se tiene

$$N(f, [a, b]) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{|f(t)| < \varepsilon} |f'(t)| dt.$$

II. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función conveniente, entonces se satisface que

$$N(f, \mathbb{R}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} I_{|f(t)| < \varepsilon} |f'(t)| dt.$$

III. Sea $A \in \{[a, b], \mathbb{R}\}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función conveniente con $v < \infty$ raíces y $c < \infty$ puntos críticos. Entonces para $\varepsilon > 0$, se cumple

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt \leq v + 2c.$$

Demostración.

I. Consideremos la función $g(t) = |f(t)| + |f'(t)|$ que es una función continua sobre un conjunto compacto, entonces alcanza un valor mínimo, es decir, existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $|f(t_0)| + |f'(t_0)| = \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)| > 0$, este mínimo es positivo porque las raíces de f no son degeneradas. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < |f(t_0)| + |f'(t_0)|$. Vamos a demostrar ahora que $N(f, [a, b]) < \infty$, procedemos por contradicción como en [6]. Supongamos que existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ tal que $t_n < t_m$ si $n < m$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y $f(t_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado que $[a, b]$ es un compacto, siempre podemos extraer una subsucesión convergente de la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sea esta $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge a $T \in [a, b]$, para simplificar la notación, definimos $r_k := t_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema del Valor Medio, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $s_k \in (r_k, r_{k+1})$ tal que:

$$f'(s_k) = \frac{f(r_{k+1}) - f(r_k)}{r_{k+1} - r_k} = 0.$$

Como $s_k \in (r_k, r_{k+1})$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = T$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = T$, la continuidad de las funciones f y f' implica que $f(T) = f'(T) = 0$, de esta manera, $T \in \{t \in [a, b] : f(t) = 0 \text{ y } f'(t) = 0\}$, lo cual es una contradicción. Se sigue entonces que $N(f, [a, b]) < \infty$. Notemos la validez de la fórmula de Kac si $N(f, [a, b]) = 0$, en este caso $f(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ entonces $|f(t)| > 0, \forall t \in [a, b]$, por la continuidad de f , se tiene que el valor mínimo de la función es también mayor que 0, sea este $|f(s_0)| = \min_{t \in [a, b]} |f(t)| > 0$, para $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |f(s_0)|$ se sigue que $\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\} = \emptyset$ por lo que $\int_a^b I_{\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt = 0$, y así

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt = 0.$$

Supongamos ahora que f tiene al menos una raíz en $[a, b]$, consideramos entonces $\{s_1, \dots, s_n\}$ el conjunto de raíces de f en $[a, b]$, tal que $s_k < s_{k+1}$ con $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y sea $\varepsilon < \min(|f(a)|, |f(b)|, \frac{1}{2} \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)|)$. Observemos que la componente conexa de s_k en el conjunto $\{t \in [a, b] : |f(t)| < \varepsilon\}$ es un intervalo de la forma (a_k, b_k) por la continuidad de la función, de manera que las componentes de s_k y s_{k+1} son disjuntas entre sí, si se intersectaran, tendríamos que dicha intersección es un intervalo de la forma (a_{k+1}, b_k) , que contiene a ambas raíces, de ser así, $|f|$ restringida a este, es

continuamente diferenciable, por el Teorema del Valor Medio, existe un punto crítico en la componente conexa, lo cual es una contradicción a la elección de ε , pues al elegir $\varepsilon < \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)|$, si existiera un punto crítico en tal conjunto, digamos c_0 , necesariamente

$$|f(c_0)| = |f(c_0)| + |f'(c_0)| < \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)|.$$

Esto último no puede pasar. De esta manera, las componentes conexas de raíces distintas son disjuntas entre sí, además, por la continuidad de f se cumple $|f(a_k)| = |f(b_k)| = \varepsilon$, como ya vimos que no puede haber puntos críticos en la componente conexa (a_k, b_k) , entonces f' no cambia de signo, lo que implica que $f(a_k)f(b_k) < 0$, además f es biyectiva en tal intervalo y s_k es la única raíz contenida ahí, por lo tanto:

$$|f(b_k) - f(a_k)| = \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt = 2\varepsilon.$$

Vemos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$;

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt = 1.$$

Luego,

$$\{t \in [a, b], |f(t)| < \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k).$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$, tal que

$$\varepsilon < \delta = \min \left(|f(a)|, |f(b)|, \frac{1}{2} \min_{t \in [a, b]} |f(t)| + |f'(t)| \right)$$

se sigue

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b I_{\{t \in [a, b]: |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt = N(f, [a, b]).$$

- II. Como f es una función propia, se tiene que $f^{-1}([-1, 1]) = [c, d]$ para algunos $c, d \in \mathbb{R}$, la función restringida a ese intervalo es una función conveniente siempre que $f(c)f(d) \neq 0$, si ocurriera que alguno o ambos de los extremos fueran tales que la función se anule, basta considerar un intervalo de la forma $[-x, x]$ tal que $f^{-1}([-x, x]) = [c, d]$ cumpla lo necesario para que la función f sea conveniente, esto es posible por el teorema del valor intermedio. Más aún, $N(f, [c, d]) = N(f, \mathbb{R})$, utilizando el primer punto anterior, se sigue el punto (2) de la proposición.
- III. Ya se ha mostrado que, para $0 < \varepsilon < \delta$ se satisface

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t \in A: |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^v \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt = v \leq v + 2c.$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera, como la función f tiene c puntos críticos, por el Teorema de Rolle, $f(t) = \varepsilon$ tiene una cantidad finita de soluciones, por lo tanto, el conjunto $\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. Digamos entonces que el número de componentes conexas es n , dichas componentes tienen la forma (a_k, b_k) , son disjuntas y cumplen que $|f(a_k)| = |f(b_k)| = \varepsilon$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Note que si (a_k, b_k) no tiene puntos donde la derivada cambia de signo, entonces f es creciente, o bien, decreciente sobre la componente (a_k, b_k) , entonces $f(a_k)f(b_k) < 0$, la continuidad de f implica que hay una única raíz en la componente (a_k, b_k) .

Definimos los siguientes conjuntos:

$K_1 = \{i \in \{1, \dots, n\} : (a_i, b_i) \text{ contiene puntos donde}$
la derivada cambia de signo\},

$K_2 = \{i \in \{1, \dots, n\} : (a_i, b_i) \text{ no contiene puntos donde}$
la derivada cambia de signo\},

Por lo observado anteriormente $|K_2| = v$, además, $|K_1| \leq c$. Luego, para cada $k \in K_1$ sean $t_1 < t_2 < \dots < t_{l_k}$ los puntos de cambio de signo de la derivada sobre la componente (a_k, b_k) , entonces

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt &= \int_{a_k}^{t_1} |f'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt + \dots + \int_{t_{l_k}}^{b_k} |f'(t)| dt \\ &= |f(t_1) - f(a_k)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \dots + |f(b_k) - f(t_{l_k})| \\ &\leq 2\varepsilon(l_k + 1). \end{aligned}$$

Escribimos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}} |f'(t)| dt &= \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt + \sum_{K_2} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt \right) \\ &= |K_2| + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt \\ &= v + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt \\ &\leq v + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{K_1} 2\varepsilon(l_k + 1) \\ &\leq v + c + \sum_{k \in K_1} l_k \\ &\leq v + 2c. \end{aligned}$$

Note que en el caso en que $f(t) = \varepsilon$ no tiene soluciones, la componente conexa de $\{t \in A : |f(t)| < \varepsilon\}$ es el intervalo (a, b) , el cual tiene a lo más c puntos donde la derivada cambia de signo, entonces, sean estos t_1, t_2, \dots, t_c , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |f'(t)| dt &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{a_k}^{t_1} |f'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt + \dots + \int_{t_c}^{b_k} |f'(t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} (|f(t_1) - f(a_k)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \dots + |f(b) - f(t_c)|) \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon(c + 1) \leq v + 2c. \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos el resultado deseado. □

Antes de establecer el principal resultado de esta sección, introducimos la siguiente definición.

Definición 4. Una función aleatoria de variable real $t \in A \subseteq \mathbb{R}$ es una función tal que para cada t , el valor que toma la función es una variable aleatoria. Es decir, una función aleatoria es un proceso estocástico.

En este análisis centraremos la atención en funciones aleatorias de la siguiente forma

$$(3) \quad F(t) = F_\omega(t) = \sum_{k=0}^n X_k(\omega) f_k(t),$$

donde $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuamente diferenciables y $\{X_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza v_k .

Las funciones de covarianza y media de (3), respectivamente, están determinadas por

$$(4) \quad K(s, t) = \sum_{k=0}^n v_k f_k(t) f_k(s).$$

y

$$\mu_t = \mathbb{E}(F(t)) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(X_k) f_k(t).$$

2.2. Fórmula de Kac-Rice. Stephen Oswald Rice (1907 - 1986), fue un informático estadounidense que tuvo una gran influencia en la teoría de la información y las telecomunicaciones. Rice es a quien se le atribuye parte del nombre de la fórmula subyacente de la teoría de polinomios aleatorios, es decir, la llamada fórmula de Kac-Rice.

Ahora aplicaremos la fórmula de Kac, presentada en la Proposición 3, a la función F definida en la ecuación (3). Además, necesitaremos hacer uso de las siguientes hipótesis.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

- **Hipótesis 1:** La función aleatoria F es casi seguramente conveniente, es decir, el conjunto de puntos donde F no es conveniente tiene probabilidad cero.
- **Hipótesis 2:** $\exists M > 0$ en los reales, tal que $N(F, A) + N(F', A) < M$, donde $N(F, A)$ y $N(F', A)$ son como en (2). Aquí $A = \mathbb{R}$ ó A es un intervalo compacto.

El número de raíces reales de la función aleatoria F es una variable aleatoria discreta, así que encontrar el valor esperado de esta variable aleatoria es equivalente a contar las raíces de F haciendo uso de la Proposición 3, para cada $\omega \in \Omega$.

Supongamos que F satisface la Hipótesis 1, por lo tanto, la fórmula de conteo de Kac implica que

$$N(F_\omega, A) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_\omega, A).$$

Y en consecuencia

$$\mathbb{E}[N(F, A)] = \int_{\Omega} N(F, A) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_\omega, A) \mathbb{P}(d\omega).$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite intercambiar la integral con el límite en la ecuación anterior. Para aplicarlo se requiere que para $m \in \mathbb{N}$, $N_\varepsilon(F_\omega, A)$ converja puntualmente y este acotado. En efecto, considerando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, vemos que converge a $N(F, A)$ y por la Hipótesis 2, tenemos que $N(F, A)$ es acotada. Además, por el punto III de la Proposición 3 podemos asegurar que $N_\varepsilon(F_\omega, A) \leq v_w + 2c_w < 2M$, para todo $m \in \mathbb{N}$, así que utilizando el teorema de Fubini podemos intercambiar la esperanza con la integral, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \searrow 0} N_\varepsilon(F_\omega, A) \mathbb{P}(d\omega) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} N_\varepsilon(F_\omega, A) \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{E}(N_\varepsilon(F, A)) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_A I_{\{|F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)| dt \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \mathbb{E} [I_{\{|F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] dt. \end{aligned}$$

En resumen

$$(5) \quad \mathbb{E}[N(F, A)] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \mathbb{E} [I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] dt.$$

OBSERVACIÓN 5. *Note que todo lo que se ha realizado a partir de las hipótesis 1 y 2 se ha hecho sin hacer alguna suposición adicional sobre las variables aleatorias involucradas en la definición de la función F .*

Ahora supondremos que $X_k \sim N(0, v_k)$, la razón de hacer esta suposición adicional es que conocemos varias propiedades de variables y vectores aleatorios Gaussianos que simplifican considerablemente los cálculos.

Al querer calcular la esperanza en (5), buscamos entonces la densidad conjunta del vector aleatorio $(F(t), F'(t))$, pues $\mathbb{E} [I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|]$ es el valor esperado de una función H que depende de las variables aleatorias $X = F(t)$ y $Y = F'(t)$, H está definida por $H(x, y) = I_{|x| < \varepsilon} |y|$.

Para cada t , $F(t)$ y $F'(t)$ son una combinación lineal de variables aleatorias normales, entonces tienen distribución normal; mostraremos que el vector $(F(t), F'(t))$ es un vector Gaussiano, en efecto, basta probar que cualquier combinación lineal de las componentes del vector se distribuye normal, así que consideramos $a, b \in \mathbb{R}$, tales que

$$(6) \quad aF(t) + bF'(t) = a \sum_{k=0}^n X_k(w) f_k(t) + b \sum_{k=0}^n X_k(w) f'_k(t) = \sum_{k=0}^n X_k(w) (a f_k(t) + b f'_k(t)).$$

La función definida en la ecuación (6) se distribuye normal, ya que es una combinación lineal de variables aleatorias independientes normales, lo cual es suficiente para afirmar que $(F(t), F'(t))$ es un vector aleatorio Gaussiano. Su matriz de covarianza \mathcal{M}_t está determinada por:

$$\mathcal{M}_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ B_t & C_t \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbb{E}(X_k) = 0$ para toda k , entonces $\mathbb{E}(F(t)) = \mathbb{E}(F'(t)) = 0$ y por tanto:

$$\begin{aligned} A_t &= \text{Cov}(F(t), F(t)) = \mathbb{E} [(F(t) - \mu_t)(F(t) - \mu_t)] = \mathbb{E}[F(t)^2]. \\ B_t &= \text{Cov}(F(t), F'(t)) = \mathbb{E} [(F(t) - \mu_t)(F'(t) - \mu'_t)] = \mathbb{E}[F(t)F'(t)]. \\ C_t &= \text{Cov}(F'(t), F'(t)) = \mathbb{E} [(F'(t) - \mu'_t)(F'(t) - \mu'_t)] = \mathbb{E}[F'(t)^2]. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $A_t > 0$ así que definimos $U_t := \frac{\Delta_t}{A_t}$ donde $\Delta_t := \det \mathcal{M}_t = A_t C_t - B_t^2, \forall t \in A$. Note que si $\Delta_t > 0$ y $A_t > 0$ entonces $C_t > 0$.

Es momento de hacer una hipótesis adicional:

Hipótesis 3: $\Delta_t > 0, \forall t \in A$.

La intención de esta tercera hipótesis es asegurar la existencia de la función de densidad conjunta de $(F(t), F'(t))$, la cual, en este caso es normal bivariada.

Por lo tanto,

$$(7) \quad \mathbb{E} [I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_{|x| < \varepsilon} |y| g(x, y) dx dy.$$

Donde,

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x, y) \mathcal{M}_t^{-1} (x, y)^\top \right\}$$

es la densidad conjunta del vector aleatorio $(F(t), F'(t))$. Completando cuadrados en el argumento de la exponencial que se encuentra en la definición en g se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (x, y)\mathcal{M}_t^{-1}(x, y)^\top &= \frac{1}{\Delta_t} (C_t x^2 - 2B_t xy + A_t y^2) \\
 &= \frac{1}{\Delta_t} \left(A_t y^2 - 2B_t xy + \frac{B_t^2}{A_t} x^2 + \left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t} \right) x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta_t} \left(A_t \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 + \left(C_t - \frac{B_t^2}{A_t} \right) x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta_t} \left(A_t \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 + \frac{\Delta_t}{A_t} x^2 \right) \\
 &= \frac{A_t}{\Delta_t} \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 + \frac{x^2}{A_t}.
 \end{aligned}$$

Con lo anterior,

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} \exp \left\{ -\frac{A_t}{2\Delta_t} \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 - \frac{x^2}{2A_t} \right\}.$$

Así que, sustituyendo en la ecuación (7), se tiene:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} [I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} I_{|x| < \varepsilon} |y| \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} \exp \left\{ -\frac{A_t}{2\Delta_t} \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 - \frac{x^2}{2A_t} \right\} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} I_{|x| < \varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} |y| \exp \left\{ -\frac{A_t}{2\Delta_t} \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 - \frac{x^2}{2A_t} \right\} dy \right) dx \\
 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta_t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2A_t} \right\} \left(\int_{\mathbb{R}} |y| \exp \left\{ -\frac{A_t}{2\Delta_t} \left(y - \frac{B_t}{A_t} x \right)^2 \right\} dy \right) dx \\
 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x) dx.
 \end{aligned}$$

Usando la notación

$$\begin{aligned}
 \Phi_t(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2A_t} \right\} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\Delta_t}{A_t}}} \int_{\mathbb{R}} |y| \exp \left\{ -\frac{A_t}{2\Delta_t} \left(y - \frac{B_t x}{A_t} \right)^2 \right\} dy \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2A_t} \right\} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi U_t}} |y| \exp \left\{ -\frac{1}{2U_t} \left(y - \frac{B_t x}{A_t} \right)^2 \right\} dy.
 \end{aligned}$$

Definimos $\psi_{\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)}(y)$ como la función de densidad de la variable aleatoria $Y \sim N\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)$, de esta manera

$$\begin{aligned}
 \Phi_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2A_t} \right\} \int_{\mathbb{R}} |y| \psi_{\left(\frac{B_t x}{A_t}, U_t\right)}(y) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2A_t} \right\} \mathbb{E}[|Y|].
 \end{aligned}$$

Luego,

$$(8) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{E} [I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}} |F'(t)|] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x) dx = \Phi_t(0).$$

La última igualdad se da por la aproximación a la Delta de Dirac, ya que podemos pensar a la función Φ_t como una función de prueba que se anula fuera del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, debido a que $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño (vea por ejemplo [15]).

Ahora, queremos utilizar el resultado obtenido en (8) para calcular el valor esperado del número de raíces de F con la fórmula en (5), por lo que debemos intercambiar la integral con el límite, para esto, se sabe por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\mathbb{E}(|Y|) \leq \sqrt{\text{Var}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2}.$$

Como la $\text{Var}(Y) = U_t$ y $\mathbb{E}[Y] = \frac{B_t}{A_t}x$, se sigue que

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{U_t + \left(\frac{B_t}{A_t}x\right)^2} \leq \sqrt{U_t} + \frac{|B_t x|}{A_t}.$$

Se observa que $\Phi_t(x)$ es siempre positiva, más aún, si consideramos $|x| \leq 1$, que $\exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\} \leq 1$ y definimos $\varphi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}}\right)$, entonces

$$\Phi_t(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2A_t}\right\} \left(\sqrt{U_t} + \frac{|B_t x|}{A_t}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}}\right) = \varphi(t).$$

Es decir, para $|x| \leq 1$, $\Phi_t(x) \leq \varphi(t)$, notemos que la condición $|x| \leq 1$ no afecta al resultado que queremos obtener, puesto que $X = F(t)$ la cual en la Fórmula de que Kac (vea Proposición 3) está acotada por ε . Ahora, como queremos utilizar nuevamente el Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral en cuestión, necesitamos agregar la siguiente hipótesis:

Hipótesis 4: La función $\varphi(t)$ es integrable sobre el conjunto A , lo cual significa que, $\int_A \varphi(t)dt < \infty$.

De esta manera, $\mathbb{E}[I_{\{F(t) < \varepsilon\}}|F'(t)|] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x)dx \leq \int_A \varphi(t)dt$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(F, A)] &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_A \mathbb{E}[I_{\{t \in A: |F(t)| < \varepsilon\}}|F'(t)|]dt \\ &= \int_A \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_t(x)dx \\ &= \int_A \Phi_t(0) \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}} \int_{\mathbb{R}} |y| \psi_{0, U_t}(y) dy. \end{aligned}$$

Por la simetría de la distribución normal, se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_t(0) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi A_t}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi U_t}} y \exp\left\{-\frac{y^2}{2U_t}\right\} dy \\ &= \frac{U_t}{\pi \sqrt{A_t U_t}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U_t}{A_t}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta_t}}{\pi A_t}. \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$K'_t(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^n v_k f_k(s) f_k(t) = \sum_{k=0}^n v_k f_k(s) f'_k(t) = \mathbb{E}[F(s)F'(t)],$$

por lo que $B_t = K'_t(t, t)$. Así mismo,

$$K''_{st}(s, t) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \sum_{k=0}^n v_k f_k(s) f_k(t) = \sum_{k=0}^n v_k f'_k(s) f'_k(t) = \mathbb{E}[F'(s)F'(t)],$$

de este modo, $C_t = K''_{st}(t, t)$ y $A_t = K(t, t)$.

Finalmente,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (\log K(t, t)) = \frac{K(t, t)K''_{st}(t, t) - K'_t(t, t)^2}{K(t, t)^2} = \frac{A_t C_t - B_t^2}{A_t^2} = \frac{\Delta_t}{A_t^2}.$$

De esta manera, concluimos que

$$\mathbb{E}[N(F, A)] = \frac{1}{\pi} \int_A \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \log(K(t, t))} dt.$$

Así hemos demostrado el siguiente Teorema que lleva por nombre “Fórmula de Kac-Rice” (Vea Teorema 2.3 de [14]).

TEOREMA 6. *Sea F una función aleatoria definida como en (3) con $X_k \sim N(0, v_k)$, tal que cumple las Hipótesis 1, 2, 3 y 4. Entonces se satisface lo siguiente*

$$\mathbb{E}[N(F, A)] = \frac{1}{\pi} \int_A \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \log(K(t, t))} dt,$$

donde $N(F, A)$ y $K(s, t)$ están definidos en (2) y (4), respectivamente.

3. POLINOMIOS ALEATORIOS TRIGONOMÉTRICOS

Si en la función definida en la ecuación (3) se toma $f_k(t) = \cos(kt)$ ó $f_k(t) = \sin(kt)$, entonces F es un polinomio trigonométrico con coeficientes aleatorios. En esta sección vamos a considerar las funciones $f_0, f_1, \dots, f_{2n} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma: $f_0 = 0$ y

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{cases} \sin\left(\frac{rt}{n}\right), & \text{si } k = 2r, \\ \cos\left(\frac{rt}{n}\right), & \text{si } k = 2r + 1, \end{cases}$$

donde $r \in \mathbb{N}$. Además, vamos a considerar $X_k = a_k$ si k es par y $X_k = b_k$ si es impar, para $k = 1, 2, \dots, 2n$ con $\{a_k\}, \{b_k\}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar. De esta manera, F_n tiene la forma de un *polinomio aleatorio trigonométrico de grado n normalizado*:

$$(9) \quad F_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left(a_j \sin\left(\frac{jt}{n}\right) + b_j \cos\left(\frac{jt}{n}\right) \right).$$

3.1. Valor esperado del número de raíces. Vamos a calcular el valor esperado del número de raíces de F_n utilizando el Teorema 6, para lo cual debemos verificar las cuatro hipótesis que se plantean en el teorema.

Comenzamos observando que F_n es casi seguramente conveniente en el intervalo $[0, 1]$. Para esto es necesario enunciar el siguiente resultado de E. V. Bulinskaya [4, Teorema 1] el cual proporciona condiciones generales para asegurar que un proceso estocástico no tenga puntos críticos en ciertos puntos.

PROPOSICIÓN 7. *Sea $\{X(t) : t \in [a, b]\}$ un proceso estocástico con trayectorias de clase C^1 . Suponga que para cada $t \in [a, b]$ la variable aleatoria $X(t)$ es absolutamente continua con densidad uniformemente acotada en $t \in [a, b]$. Entonces*

$$P(\{t : t \in [a, b], X(t) = 0, X'(t) = 0\} \neq \emptyset) = 0.$$

Como a_j y b_j son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar el resultado se sigue directamente de la Proposición 7 (el lector interesado puede ver el trabajo de Ylvisaker [18] para ver una prueba complementaria de esta afirmación).

Ahora veamos que se satisface la *hipótesis 2*. Los polinomios trigonométricos no normalizados, es decir, $F(t) = \sum_{j=1}^n (a_j \operatorname{sen}(jt) + b_j \operatorname{cos}(jt))$ tiene a lo más $2n$ ceros (vea [14, pp. 7]). Por lo anterior, como el polinomio que estamos trabajando sí es normalizado, el número de raíces es a lo más n ya que los argumentos de las funciones sen y cos están divididos por n , más aún $F'_n(t)$ es también un polinomio trigonométrico de grado n entonces F_n tienen a lo más n puntos críticos, de esta manera $N(F_n, [0, 1]) + N(F'_n, [0, 1]) < 2n + 1$.

Para la *hipótesis 3* debemos verificar que el determinante $\Delta_t = A_t C_t - B_t > 0$. Recordando que $A_t = K(t, t)$, $B_t = K'_t(t, t)$ y $C_t = K''_{st}(t, t)$, es necesario establecer la función de covarianza para el polinomio trigonométrico F_n , entonces

$$\begin{aligned} K(s, t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\operatorname{sen} \left(\frac{jt}{n} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{js}{n} \right) + \operatorname{cos} \left(\frac{jt}{n} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{js}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \operatorname{cos} \left(\frac{j(s-t)}{n} \right). \end{aligned}$$

Cabe mencionar que la función de covarianza depende solamente de la diferencia $s - t$, es decir, los polinomios trigonométricos son procesos estacionarios. Calculamos las parciales de K , lo cual nos permite determinar A_t , B_t y C_t

$$\begin{aligned} K'_s(s, t) &= -\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j \operatorname{sen} \left(\frac{j(s-t)}{n} \right), \\ K''_{st}(s, t) &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 \operatorname{cos} \left(\frac{j(s-t)}{n} \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} A_t &= K(t, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\operatorname{sen}^2 \left(\frac{jt}{n} \right) + \operatorname{cos}^2 \left(\frac{jt}{n} \right) \right) = 1, \\ B_t &= K'_t(t, t) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n j \operatorname{sen}(0) = 0, \\ C_t &= K''_{st}(t, t) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 \operatorname{cos}(0) = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el determinante en cuestión es $\Delta_t = C_t$, es decir,

$$\Delta_t = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} > 0.$$

De esta manera, se satisface la Hipótesis 3.

Resta comprobar la *hipótesis 4*. Sea

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sqrt{\Delta_t}}{A_t} + \frac{|B_t|}{A_t^{\frac{3}{2}}} \right) = \sqrt{\frac{\Delta_t}{2\pi}} = \frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{2n\sqrt{3\pi}},$$

entonces φ es una función constante que sobre el intervalo $[0, 1]$ es integrable.

Como consecuencia de lo anterior podemos usar la fórmula de Kac-Rice (vea Teorema 6), recordemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (\log K(t, t)) = \frac{\Delta_t}{A_t^2}.$$

En el caso de polinomios trigonométricos, resulta entonces que

$$\frac{\Delta_t}{A_t^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[N(F_n, [0, 1])] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}} dt = \frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6\pi n}}.$$

Observemos que

$$\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n} = \sqrt{\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}} = \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Luego, cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que $\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{n} = \sqrt{2}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(F_n, [0, 1])] = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} < 1.$$

En realidad, si analizamos la expresión obtenida para el valor esperado del número de raíces de F_n :

$$\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6\pi n}}$$

notamos que siempre es un número estrictamente menor que 1. Esto se verifica al realizar algunos cálculos y observar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $(2 - 6\pi^2)n^2 + 3n + 1 < 0$; esto último es cierto ya que al considerar la parábola descrita por $y = (2 - 6\pi^2)x^2 + 3x + 1$ se puede mostrar que es una parábola vertical que abre hacia abajo con sólo una raíz positiva $\frac{(3 \pm \sqrt{1+24\pi})}{-4+12\pi} < 1$, entonces todo $x > 1$ cumple $(2 - 6\pi^2)x^2 + 3x + 1 < 0$ y de manera particular $\frac{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}{\sqrt{6\pi n}} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dicho de otra manera, para cualquier grado del polinomio trigonométrico, el valor esperado del número de raíces reales tiende al valor constante $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$, es decir, se esperaría que no haya raíces en el intervalo $[0, 1]$.

OBSERVACIÓN 8. *La varianza del número de raíces reales de polinomios trigonométricos ya se ha estudiado en [10]. En este trabajo se puede encontrar una estimación de la varianza para polinomios de la forma $\sum_{j=1}^n a_j \cos(jt)$, en el intervalo $(0, 2\pi)$, si bien, la forma de los polinomios y el intervalo no son los que estamos considerando en este trabajo, se puede realizar un cambio de variable para ajustar los resultados.*

3.2. Regularidad L^p . El objetivo de esta sección es probar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 9. *Sea $N(F_n, I)$ el número de raíces sobre el intervalo $I = [0, 1]$ del polinomio trigonométrico F_n definido en (9). Entonces*

$$\mathbb{E}[N(F_n, I)^p] < \infty,$$

para toda $p \geq 1$.

Para esto, vamos a utilizar, entre otros resultados, el siguiente lema que generaliza el Teorema de Rolle y el error de interpolación polinomial de Lagrange (vea por ejemplo [5]).

LEMA 10. *Suponga que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k con $k \geq 1$, y que existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$ tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Entonces para $j < k$ existen $y_1, \dots, y_{k-j} \in [a, b]$ en los cuales $f'(y_i) = 0$ con $i = 0, 1, 2, \dots, k-j$, más aún, para todo $x \in [a, b]$ existen $\xi, \eta \in (a, b)$ que satisfacen:*

$$f(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi) \prod_{i=1}^k (x - x_i) \quad y \quad f^{(j)}(x) = \frac{1}{(k-j)!} f^{(k)}(\eta) \prod_{i=1}^{k-1} (x - y_i).$$

Demostración. Se hará un argumento inductivo para probar la afirmación anterior, si $j = 0$, sólo se debe probar que $f(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi) \prod_{i=1}^k (x - x_j)$, lo cual se sigue de usar el polinomio de interpolación de Lagrange (vea [5]), el cual establece que si conocemos los valores que toma la función f en k puntos, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \prod_{i=1}^k (x - x_i),$$

donde $P(x) = \sum_{s=0}^k f(x_s) \prod_{s=1, s \neq i}^k \frac{x - x_s}{x_i - x_s}$, como $f(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ se sigue que $P(x) = 0$ y así

$$f(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \prod_{i=1}^k (x - x_i).$$

Ahora, para $j = 1$, consideramos los $k - 1$ intervalos de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 1, 2, \dots, k - 1$, en cada uno de estos intervalos f es continuamente diferenciable y se anula en los extremos, por lo que podemos hacer uso del Teorema de Rolle, lo que significa que para cada $i = 1, 2, \dots, k - 1$ existe $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f'(y_i) = 0$, entonces conocemos el valor de f' en $k - 1$ puntos, dicho valor es cero y tal como se hizo arriba, por el teorema de interpolación de Lagrange, existe $\tau \in (a, b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f^{(k)}(\tau)}{(k - 1)!} \prod_{i=1}^{k-1} (x - y_i).$$

Supongamos válido el caso $k = n$, es decir, existen $w_i \in (a, b)$ tales que $f^{(n)}(w_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k - n$, de manera que

$$f^{(n)}(x) = \frac{f^{(k)}(\tau)}{(k - n)!} \prod_{i=1}^{k-n} (x - w_i),$$

Para algún $\tau \in (a, b)$. Consideramos ahora los $k - n - 1$ intervalos de la forma $[w_i, w_{i+1}]$ con $i = 1, 2, \dots, k - n - 1$, en los cuales es válido el teorema de Rolle para $f^{(n)}$, así que existe $y_i \in [w_i, w_{i+1}]$ tal que $f^{(n+1)}(y_i) = 0$ con $n + 1 \leq k$, utilizando el mismo argumento que en el caso anterior, existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(k)}(\eta)}{(k - n - 1)!} \prod_{i=1}^{k-n-1} (x - y_i),$$

con lo cual queda probado el resultado. □

También haremos uso del siguiente resultado obtenido de [2].

LEMA 11. *Sea I un intervalo fijo de longitud $|I|$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)|^2 \right] \leq \frac{2}{|I|} (1 + |I|^2).$$

donde F_n^k representa la derivada k -ésima de F_n .

Demostración. Haremos la demostración utilizando los siguientes dos puntos.

1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 , escribimos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{b - a} \left(\int_a^b f(s) ds - \int_a^t f(s) ds - \int_t^b f(s) ds + (b - a) f(t) \right) \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b f(s) ds + \frac{1}{b - a} \left(\int_t^b (s - a) f'(s) ds + \int_a^t (s - b) f'(s) ds \right). \end{aligned}$$

A partir de esto, se tiene

$$\begin{aligned}
|f(t)| &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(s)| ds + \frac{1}{b-a} \left(\int_a^t |b-a| |f'(s)| ds + \int_t^b |a-b| |f'(s)| ds \right) \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(s)| ds + \int_a^b |f'(s)| ds.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{t \in I} |f(t)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(s)| ds + \int_a^b |f'(s)| ds.$$

Recordamos que para $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface $(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$, entonces, consideramos $x = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(s)| ds$ y $y = \int_a^b |f'(s)| ds$, así

$$\left(\sup_{t \in I} |f(t)| \right)^2 \leq \frac{2}{(b-a)^2} \left(\int_a^b |f(s)| ds \right)^2 + 2 \left(\int_a^b |f'(s)| ds \right)^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(b-a)^2} \left(\int_a^b |f(s)| ds \right)^2 + 2 \left(\int_a^b |f'(s)| ds \right)^2 \\
&\leq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b f(s)^2 ds + 2 \int_a^b f'(s)^2 ds.
\end{aligned}$$

De esta manera, por transitividad

$$\sup_{t \in I} |f(t)|^2 \leq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b f(s)^2 ds + 2 \int_a^b f'(s)^2 ds.$$

2. Para $n, m \in \mathbb{N}$, se observa que

$$\begin{aligned}
F_n^{(2m)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n a_j (-1)^m \left(\frac{j}{n} \right)^{2m} \cos \left(\frac{j}{n} t \right) \\
&\quad + b_j (-1)^m \left(\frac{j}{n} \right)^{2m} \sin \left(\frac{j}{n} t \right) \\
F_n^{(2m+1)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n a_j (-1)^{m+1} \left(\frac{j}{n} \right)^{2m} \sin \left(\frac{j}{n} t \right) \\
&\quad + b_j (-1)^{m+1} \left(\frac{j}{n} \right)^{2m+1} \cos \left(\frac{j}{n} t \right).
\end{aligned}$$

Entonces, por las suposiciones sobre a_j y b_j se sigue que:

$$(10) \quad \mathbb{E}[F_n^{(k)}(t)^2] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^{2k} = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{2k} + \left(\frac{2}{n} \right)^{2k} + \dots \right) \leq 1.$$

La desigualdad (10) nos permite utilizar el teorema de Fubini de manera que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)|^2 \right) &\leq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b \mathbb{E}(F_n^{(k)}(s)^2) ds + 2 \int_a^b \mathbb{E}(F_n^{(k+1)}(s)^2) ds \\
&\leq \frac{2}{b-a} + 2(b-a),
\end{aligned}$$

concluyendo así la prueba. \square

Demostración de la Proposición 9. La variable aleatoria $N = N(F_n, I)$ es discreta, ya que cuenta el número de raíces reales en el intervalo I , entonces

$$\mathbb{E}(N^p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N \geq k).$$

Para acotar la suma del lado derecho de la desigualdad anterior vamos a trabajar con $P(N \geq k)$ usando el Lema 10. Resulta que si suponemos que $\sup_{t \in I} |F^{(k)}(t)| \leq M$ con $M > 0$ se satisface lo siguiente

$$|F_n(c)| \leq \frac{M|I|^k}{k!} \quad \text{y} \quad |F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}$$

con $c = \frac{a+b}{2}$. Así, podemos descomponer esta probabilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(N \geq k) &= P(N \geq k, \sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) + P(N \geq k, \sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| > M) \\ &\leq P(N \geq k, \sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) + P(\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| > M) \\ &= T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Analizamos primero T_1 , se observa que $\{N \geq k, \sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M\}$ implica que estamos considerando que existan al menos k raíces y que $\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M$, así que por lo discutido antes, tenemos

$$\begin{aligned} T_1 &= P(N \geq k, \sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| \leq M) \leq P\left(|F_n(c)| \leq \frac{M|I|^k}{k!}, |F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right) \\ &\leq P\left(|F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Markov, que establece que para una variable aleatoria X y $a \in \mathbb{R}$ se cumple $a^2 P(|X| \geq a) \leq \mathbb{E}(X^2)$, se sigue que:

$$T_2 = P\left(\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| > M\right) \leq \frac{1}{M^2} \mathbb{E}\left(\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)|^2\right).$$

Además por el Lema 11, $\mathbb{E}(\sup_{t \in I} |F_n(t)|^2) \leq \frac{2}{|I|}(1 + |I|^2)$, de esta manera

$$P\left(\sup_{t \in I} |F_n^{(k)}(t)| > M\right) \leq \frac{2}{M^2|I|}(1 + |I|^2).$$

Entonces,

$$P(N \geq k) \leq \frac{2}{M^2|I|}(1 + |I|^2) + P\left(|F_n^{(j)}(c)| \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right).$$

Para trabajar con la última expresión, enunciamos el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [11]:

LEMA 12. *Sea $j \in \mathbb{N}_0$ fijo. Existe una constante $C = C(j) > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ y $\beta \in [0, 2\pi]$ se cumple*

$$P\left(\left|\frac{X_n^{(j)}(\beta)}{n^j}\right| \leq T\right) \leq C(T + T^{-1/2}n^{-\frac{2j+1}{4}})$$

donde $X_n = \sum_{k=1}^n a_t \sin(kt) + b_t \cos(kt)$.

El lema anterior es válido para $\beta \in [0, 2\pi]$, en particular es válido para $\beta = \frac{c}{n}$, de manera que, $\frac{X_n^{(j)}(\beta)}{n^j} = F_n^{(j)}(c)$, y considerando $T = \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}$ resulta que

$$P\left(F_n^{(j)}(c) \leq \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!}\right) \leq C\left(\frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M|I|^{k-j}}}n^{-\frac{2j+1}{4}}\right)$$

Entonces,

$$P(N \geq k) \leq C\left(\frac{1}{M^2} + \frac{M|I|^{k-j}}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M|I|^{k-j}}}n^{-\frac{2j+1}{4}}\right)$$

Estamos considerando $I = [0, 1]$ entonces la expresión anterior se reduce a

$$(11) \quad P(N \leq k) \leq C \left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M} n^{-\frac{2j+1}{4}}} \right).$$

Lo que sigue es acotar $(k-j)!$ inferiormente, para esto se utiliza una aproximación del factorial. En [3] se menciona que, para cualquier natural, en particular $k-j$ se satisfacen las siguientes desigualdades

$$(12) \quad \frac{(k-j)^{k-j}}{e^{k-j}} \sqrt{2\pi \left(k-j + \frac{1}{6} \right)} < (k-j)! \leq \frac{(k-j)^{k-j}}{e^{k-j}} \sqrt{2\pi \left(k-j + \frac{e^2}{2\pi} - 1 \right)}$$

Entonces, podemos considerar que

$$(k-j)! \geq (k-j)^{k-j} e^{-(k-j)} c (k-j)^{1/2}.$$

Donde c es alguna constante que puede ir cambiando a lo largo del siguiente análisis, pero que no deja de ser constante.

Supongamos que $j = \lfloor \beta k \rfloor$ para $\beta > 0$, donde estamos considerando $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, de esta manera, como $\lfloor \beta k \rfloor \leq \beta k$ entonces $(k - \lfloor \beta k \rfloor)^{1/2} \geq (k - \beta k)^{1/2}$, por lo tanto $(k-j)^{1/2} \geq (1-\beta)^{1/2} k^{1/2}$. Así

$$(k-j)! \geq c (k-j)^{k-j} e^{-(k-j)} (1-\beta)^{1/2} k^{1/2}.$$

Como $\beta k - 1 \leq \lfloor \beta k \rfloor$ y $k \geq 1$ se sigue que

$$k-j = k - \lfloor \beta k \rfloor \leq k - \beta k + 1 \leq k - \beta k + k = (2-\beta)k.$$

Por lo tanto $e^{-(k-j)} \geq e^{-(2-\beta)k}$. Así, $(k-j)! \geq (k-j)^{k-j} e^{-(2-\beta)k} (1-\beta)^{1/2} k^{1/2}$.

En cuanto a $(k-j)^{k-j}$, vemos que como $\lfloor \beta k \rfloor \leq \beta k$ entonces $k - \lfloor \beta k \rfloor \geq (1-\beta)k$, además, si consideramos $\beta \in (0, 1)$ vemos que $(1-\beta)^{k-j} \geq (1-\beta)^k$, por tanto, para $k > 1$

$$\begin{aligned} (k-j)^{k-j} &= (k - \lfloor \beta k \rfloor)^{k-j} \\ &\geq (k - \beta k)^{k-j} \\ &= (1-\beta)^{k-j} k^{k-j} \\ &\geq (1-\beta)^k k^{(1-\beta)k}. \end{aligned}$$

Hemos encontrado entonces la siguiente cota inferior para $(k-j)!$

$$(k-j)! \geq c (1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k} (1-\beta)^{1/2} k^{(1-\beta)k+1/2}.$$

Como $(1-\beta)^{1/2}$ es una constante que depende sólo de β podemos reescribir la cota como sigue

$$(k-j)! \geq C_\beta (1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2}$$

Ahora, como la desigualdad (11) también requiere que acotemos $(k-j)!$ superiormente, entonces para alguna constante c , por la ecuación (12) se tiene

$$(k-j)! \leq c (k-j)^{k-j} e^{-(k-j)} \sqrt{2\pi(k-j)},$$

como antes, $j = \lfloor \beta k \rfloor$ con $\beta \in (0, 1)$, sabemos entonces que $-\lfloor \beta k \rfloor = -j \leq 1 - \beta k$, lo que implica

$$k-j \leq k+1 - \beta k = (1-\beta)k + 1 \leq (1-\beta)k + k,$$

en consecuencia

$$(k-j)^{1/2} \leq \sqrt{(1-\beta)k + k} = (2-\beta)^{1/2} k^{1/2}.$$

Entonces

$$(k-j)! \leq c (k-j)^{k-j} e^{-(k-j)} (2-\beta)^{1/2} k^{1/2}.$$

Además, $k - j \geq (1 - \beta)k$, por lo que $e^{-(k-j)} \leq e^{-(1-\beta)k}$, de manera que

$$(k - j)! \leq c(k - j)^{k-j} e^{-(1-\beta)k} (2 - \beta)^{1/2} k^{1/2}.$$

Luego, sabemos que $\lfloor \beta k \rfloor \geq \beta k - 1$, por tanto $k - \lfloor \beta k \rfloor \leq 1 + (1 - \beta)k$, así que

$$\begin{aligned} (k - j)^{k-j} &= (k - \lfloor \beta k \rfloor)^{k-j} \\ &\leq (1 + (1 - \beta)k)^{k-j} \\ &\leq (k + (1 - \beta)k)^{k-j} \\ &\leq (2 - \beta)^{k-j} k^{k-j} \\ &\leq (2 - \beta)^k k^{1+(1-\beta)k} \text{ pues } 2 - \beta > 1. \end{aligned}$$

Resultando que

$$(k - j)! \leq c_\beta (2 - \beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}.$$

Tenemos así, las siguientes desigualdades:

$$C_\beta (1 - \beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2} \leq (k - j)! \leq c_\beta (2 - \beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}.$$

Dado que $P(N \geq k) \leq C \left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M}} n^{-(2j+1)/4} \right)$ donde n es el grado del polinomio, entonces necesariamente, $k \leq n$, por tanto $n^{-(2j+1)/4} \leq k^{-(2j+1)/4}$. A su vez, como $j = \lfloor \beta k \rfloor \geq \beta k - 1$, se satisface que $k^{-(2j+1)/4} \leq k^{-(2\beta k+1)/4}$. Entonces

$$P(N \geq k) \leq C \left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(k-j)!} + \sqrt{\frac{(k-j)!}{M}} k^{-2\beta k+1/4} \right).$$

Con las cotas encontradas, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} k^p P(N \geq k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} C a_k$, donde estamos considerando $C = \max\{c_\beta, \frac{1}{C_\beta}\}$ y

$$\begin{aligned} a_k &= k^p \left(\frac{1}{M^2} + \frac{M}{(1 - \beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{(2 - \beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}}{M}} k^{-2\beta k+1/4} \right). \end{aligned}$$

Así que, descomponemos $a_k = b_k + c_k + d_k$, donde

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{k^p}{M^2}, \\ c_k &= \frac{Mk^p}{(1 - \beta)^k e^{-(2-\beta)k} k^{(1-\beta)k+1/2}}, \\ d_k &= \sqrt{\frac{(2 - \beta)^k e^{-(1-\beta)k} k^{(1-\beta)k+3/2}}{M}} k^{-2\beta k+1/4}, \end{aligned}$$

de manera que, si vemos que las series de b_k , c_k y d_k convergen, entonces la de a_k también. Para ello, por simplicidad, vamos a considerar $M = k^{k\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ se determinará de manera adecuada para que las series en cuestión converjan. Así pues comenzamos analizando la suma de c_k , utilizamos el criterio del cociente de d'Alembert, que establece que es suficiente con que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} < 1$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Hacemos $a = 1 - \beta - \alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{c_{k+1}}{c_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)k}}{(1-\beta)^k e^{-(2-\beta)(k+1)}} \frac{k^{ak+1/2}}{(k+1)^{a(k+1)+1/2}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p \frac{1}{(1-\beta)e^{-(2-\beta)}} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{ak+1/2} \left(\frac{1}{k+1}\right)^a \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p \frac{1}{(1-\beta)e^{-(2-\beta)}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{ak+1/2} \left(\frac{1}{k+1}\right)^a.
\end{aligned}$$

Cuando $k \rightarrow \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p &\rightarrow 1, \\
\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{ak+1/2} &= \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^a \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1/2} \rightarrow e^a, \\
\left(\frac{1}{k+1}\right)^a &\rightarrow 0, \text{ si y sólo si } a > 0.
\end{aligned}$$

Así que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge si $\alpha < 1 - \beta$.

Procedemos a verificar la suma para d_k , nuevamente, usando el criterio del cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{d_{k+1}}{d_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{[(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{(k+1)/2}}{[(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{k/2}} \frac{k^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1}}{(k+1)^{(\alpha-1)(k+1)/2+\beta(k+1)-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p [(2-\beta)e^{-(1-\beta)}]^{1/2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{(\alpha-1)/2+\beta}.
\end{aligned}$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{k}\right)^p &\rightarrow 1, \\
\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{(\alpha-1)k/2+\beta k-1} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{(\alpha-1)k/2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-\beta k} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow e^{(\alpha-1)/2-\beta}, \\
\left(\frac{1}{k+1}\right)^{(\alpha-1)/2+\beta} &\rightarrow 0, \text{ si y sólo si } \alpha > 1 - 2\beta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ converge si $\alpha > 1 - 2\beta$. Resta verificar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{b_{k+1}}{b_k} &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^p \frac{k^{2\alpha k}}{(k+1)^{2\alpha k+2\alpha}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^{2\alpha k} \left(\frac{1}{k+1}\right)^{2\alpha}
\end{aligned}$$

De la última igualdad vemos que cuando $k \rightarrow \infty$ el cociente $\frac{b_{k+1}}{b_k} \rightarrow 0$ siempre que $\alpha > 0$. Hemos necesitado que la constante α sea positiva y $1 - 2\beta < \alpha < 1 - \beta$, por lo tanto, si elegimos $\alpha = 1 - \frac{3}{2}\beta$ siempre que $\beta < \frac{2}{3}$ podemos concluir que $\mathbb{E}(N^p) < \infty$. \square

AGRADECIMIENTOS. Las autoras agradecen los comentarios hechos por el(la) revisor(a) anónimo(a) que ayudaron a mejorar sustancialmente este trabajo. El trabajo de la primera autora fue apoyado por el programa “Becas Nacionales para estudios de posgrado” del CONAHCYT.

REFERENCIAS

- [1] Angst J., Pham V.-H. and Poly G., *Universality of the nodal length of bivariate random trigonometric polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. 370 8331-8357, (2018).
- [2] Azaïs J.-M. , Dalmao F., León J., Nourdin I. y Poly G., *Local universality of the number of zeros of random trigonometric polynomials with continuous coefficients*, preprint at <http://arxiv.org/abs/1512.05583>
- [3] Batir N. *An approximation formula for $n!$ Proyecciones* (Antofagasta, Online), 32(2):173-181, 2013.
- [4] Bulinskaya, E. V., *On the mean number of crossings of a level by a stationary Gaussian process*, Theory Probab. Appl. 6 (1962), 435-438.
- [5] Burden R. L., Douglas Faires J. *Análisis numérico*. Décima edición, 2017.
- [6] Coutin L. Peralta L., *Rates of convergence for the number of zeros of random trigonometric polynomials*, to appear in *Bernoulli*, 2022.
- [7] Dunnage, J. E. A., *The number of real zeros of a random trigonometric polynomial*. Proc. London Math. Soc. (3) 16 53-84. (1966).
- [8] Farahmand, K., *On the number of real zeros of a random trigonometric polynomial: coefficients with nonzero infinite mean*. Stochastic Anal. Appl. 5 379-386. (1987).
- [9] Farahmand, K., *Level crossings of a random trigonometric polynomial with dependent coefficients*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 58 39-46. (1995).
- [10] Farahmand K. *On the variance of the number of real zeros of a random trigonometric polynomial*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 10(1):57-66, 1997.
- [11] Flasche H., *Expected number of real roots of random trigonometric polynomials*. Stochastic Processes and their Applications, 127(12):3928-3742, 2017.
- [12] Kac, M., *On the average number of real roots of a random algebraic equation*. II. Proc. London Math. Soc. (2) 50 390-408. MR30713, (1949).
- [13] Littlewood, J. E. and Offord, A. C. *On the Number of Real Roots of a Random Algebraic Equation*. J. London Math. Soc. 13 288-295. (1938).
- [14] Nicolaescu, L., *On the kac-ricce formula*, Notes, 1, 2014.
- [15] Salsa S. *Partial differential equations in action. From modelling to theory*. Third edition. Unitext, 99. La Matematica per il 3+2. Springer, [Cham], 2016. xviii+686 pp. ISBN: 978-3-319-31237-8; 978-3-319-31238-5
- [16] Sard, A. *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bulletin of the American Mathematical Society 48 (1942), 883-890.
- [17] Bogomolny, E., Bohigas, O. and Leboeuf, P., *Quantum chaotic dynamics and random polynomials*. J. Statist. Phys. 85 639-679. (1996).
- [18] Ylvisaker, N. D., *A note on the absence of tangencies in Gaussian sample paths*, Ann. Math. Statist. 39 (1968), 261-262. MR-0226725

Verania Hernández Orgaz:

Universidad Nacional Autónoma de México,
 Facultad de Ciencias,
 Circuito Exterior, C.U.,
 Del. Coyoacan, C.P. 04510, CDMX, México.
 e-mail: vhdez12@comunidad.unam.mx

Liliana Peralta:

Universidad Nacional Autónoma de México,
 Facultad de Ciencias,
 Departamento de Matemáticas.
 Circuito Exterior, C.U.,
 Del. Coyoacan, C.P. 04510, CDMX, México.
 e-mail: lylyaanaa@ciencias.unam.mx



FORMAS $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

RENÉ BENÍTEZ LÓPEZ

RESUMEN. En esta nota, se da una nueva demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a , y en $\pm\infty$.

1. INTRODUCCIÓN

La regla de L'Hôpital surge a fines del siglo XVII, fue descubierta por Jean Bernoulli (1667-1746) quien por razones económicas firma un pacto con Guillaume Francois Antoine marqués de L'Hôpital (1661-1704); en ese pacto, Jean Bernoulli a cambio de un salario se comprometió a enviarle sus descubrimientos matemáticos al marqués de L'Hôpital para que éste los utilizara como quisiera; así, el año 1696 en París el marqués de L'Hôpital publica un libro de Cálculo Diferencial titulado "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" el cual históricamente se considera el primer libro de Cálculo Diferencial, y en él da a conocer la famosa regla conocida como Regla de L'Hôpital, la cual descubre Jean Bernoulli en 1694 y la envía escrita al marqués para cumplir el referido pacto (véase la sección 4 del capítulo XX en [2]); además, en la introducción de esta obra el marqués reconoce que se ha servido libremente de los descubrimientos de Leibniz y de Bernoulli. En 1694, Jean Bernoulli descubrió que, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$ tales que $f(a) = g(a) = 0$, y si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es una herramienta muy eficaz para el cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$; con el paso de los años la regla evolucionó y se demostró para resolver límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Hoy en día, hay varias (quizá muchas) demostraciones de las formas $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital, y en este artículo doy a conocer una nueva demostración de las referidas formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a y en ∞ .

2. PRELIMINARES Y NOTACIÓN

Vale la pena mencionar que, todas las funciones aludidas en este artículo son funciones reales de variable real. En la siguiente sección, se demuestran dos sencillos lemas, los cuales simplificarán la demostración de la Regla de L'Hôpital para las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ en un punto a real. Para ello, se utilizará la teoría de límites infinitos y al infinito, la cuál puede consultarse en [1], en [3], en [4] y en [5]; aquí, sólo se recuerdan algunos conceptos vertidos en la definición 1 dada más adelante, en donde $+\infty$ se lee "más infinito", $-\infty$ se lee "menos infinito" e ∞ se lee "infinito sin signo" y debe interpretarse como $\pm\infty$, lo cual se lee "más o menos infinito" es decir, $\infty = \pm\infty$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A05, 00A06, 26A06, 26A24, 97I40.

Palabras clave. Regla de L'Hôpital, formas indeterminadas, infinito entre infinito, límites infinitos, límites al infinito.

y deberá entenderse como una forma abreviada de referirse a las opciones $+\infty$ y/o $-\infty$; por ejemplo, $x \rightarrow \infty$ es lo mismo que $x \rightarrow \pm\infty$, y expresa en forma abreviada las posibilidades $x \rightarrow +\infty$ y/o $x \rightarrow -\infty$; asimismo, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ es lo mismo que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, lo cual expresa las opciones $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$ es lo mismo que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$, lo cual expresa las opciones $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, mientras que, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ expresa las posibilidades $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, y/o $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -\infty$, y/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$ y/o $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, de las cuales sólo ocurren dos; a saber, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. También es oportuno mencionar que, $+\infty$, $-\infty$ e ∞ se comportan opcionalmente en relación con los puntos de acumulación en los límites. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ es equivalente a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, lo cual se precisa como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

en este caso, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$ se traduce como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; mientras que, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ se traduce en una única posibilidad; a saber, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, de donde $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Además, $+\infty$ y $-\infty$ no son números, son puntos ideales y representan, por así decirlo, los extremos de la recta real, la cual se expresa como el intervalo abierto $] -\infty, +\infty[$; es decir, $\mathbb{R} =] -\infty, +\infty[$. Por tanto, ∞ también es un punto ideal, y como puntos, $+\infty$, $-\infty$ e ∞ son considerados puntos de acumulación en los límites; más aún, para cualquier $N > 0$ los intervalos $]N, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > N\}$ son vecindades de $+\infty$, los intervalos $] -\infty, -N[= \{x \in \mathbb{R} : x < -N\}$ son vecindades de $-\infty$, y los conjuntos abiertos $] -\infty, -N[\cup]N, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : |x| > N\}$ son vecindades de ∞ . Más aún, los intervalos abiertos $]a - \delta, a + \delta[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\}$ con $\delta > 0$ son vecindades de un punto real a .

Definición 1. Suponga que f es una función de dominio \mathcal{D} tal que $(I \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ para toda vecindad I de un punto a .

1. Si a es un número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N.$$

2. Si a es un número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) < -N.$$

3. Si $a = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N.$$

4. Si $a = -\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N.$$

5. Si $a = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) < -N.$$

6. Si $a = -\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) < -N.$$

7. Si el límite es ∞ , léase “infinito sin signo” entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies |f(x)| > N.$$

8. Si el punto de acumulación es ∞ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N.$$

9. Si el punto de acumulación es ∞ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) < -N.$$

10. Si el límite y el punto de acumulación son ambos ∞ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N.$$

Además, para demostrar la Regla de L'Hôpital en cuestión, se utilizará el Teorema del Valor Medio de Cauchy, llamado también Segundo Teorema del Valor Medio, cuya demostración también puede verse en [1] o en [4], y cuyo enunciado es como sigue:

TEOREMA 2. *Suponga que f y g son funciones reales de variable real, tales que*

1. *f y g son continuas en $[a, b]$, con $a \neq b$;*
2. *f y g son diferenciables en $]a, b[$;*
3. *$g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a, b[$;*

entonces, hay un punto c en $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

También, es conveniente mencionar que, la notación $\frac{\infty}{\infty}$ es equivalente con $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, la cual es un manera abreviada de referirse a los casos $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ y $\frac{-\infty}{-\infty}$ de la regla de L'Hôpital en cuestión, y que utilizando las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ alrededor de un número real a , se demuestran las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en $\pm\infty$; es decir, en $+\infty$ y en $-\infty$.

3. FORMAS $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ DE LA REGLA DE L'HÔPITAL EN UN PUNTO a , Y EN $\pm\infty$.

Para simplificar la demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a , se utilizará el siguiente lema.

LEMA 3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, entonces existe una vecindad I de a tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\}$.

Demostración. Suponga primero que a es un número real, y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, lo cual implica que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; ahora, considere cualquier número $N > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ implica que existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > N > 0$ para todo x en $]a - \delta_1, a + \delta_1[\setminus \{a\}$, y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) < -N < 0$ para todo x en $]a - \delta_2, a + \delta_2[\setminus \{a\}$; en consecuencia, al tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I =]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$.

Por otra parte, suponga que $a = +\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Para cada una de estas posibilidades, se demostrará que existe una vecindad I de $a = +\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ en $I \setminus \{a\} = I$. Para este propósito, considere cualquier número $N > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ implica que existe $M > 0$ tal que $f(x) > N > 0$ siempre que $x > M$; por tanto, existe una vecindad $I =]M, +\infty[$ de $a = +\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\} = I$; y si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) < -N < 0$ siempre que $x > K$; así, existe una vecindad $I = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$ de $a = +\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\} = I$. Similarmente, cuando $a = -\infty$ existe una vecindad $I = \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}$ de $-\infty$ en donde $M > 0$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\} = I$. \square

Más aún, para la demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a , también se utilizarán la definición de límite restringido a un conjunto \mathcal{S} dada en [3] y enunciada enseguida, y el lema 5 demostrado a continuación.

Definición 4. Sean f una función de dominio \mathcal{D} y \mathcal{S} un conjunto. La función f restringida a \mathcal{S} se escribe $f_{\mathcal{S}}$, se lee “ f restringida a \mathcal{S} ” y tiene dominio $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$, y se define como

$$f_{\mathcal{S}}(x) = f(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}.$$

El límite de f en x_0 restringido a \mathcal{S} se escribe $\lim_{x_0} f_{\mathcal{S}}$ o $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\mathcal{S}}(x)$, y se define así

$$\lim_{x_0} f_{\mathcal{S}} = \lim_{x \rightarrow x_0} f_{\mathcal{S}}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}.$$

LEMA 5. Sean f una función de dominio \mathcal{D} , $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, y a un punto de acumulación de \mathcal{D} y de \mathcal{S} .

1. Si a y L son números reales, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$

2. Si a es número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

3. Si a es número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

4. Si $a = +\infty$ y L es número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$

5. Si $a = -\infty$ y L es número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$

6. Si $a = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

7. Si $a = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

8. Si $a = -\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

9. Si $a = -\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

10. Si a es número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \implies \lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty.$$

11. Si $a = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

12. Si $a = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

13. Si $a = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \implies \lim_{x \rightarrow \infty} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty.$$

Demostración. Utilizando las definiciones 1 y 4, se demostrarán sólo las partes 1, 8, 10 y 13, las otras partes se demuestran de igual manera. Ahora, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, en la demostración de cada una de las partes se dará por hecho que $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \mathcal{S}$.

1. Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies |f(x) - L| < \varepsilon;$$

además, por la definición 4 se sigue que $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ se tiene

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \implies |f_{\mathcal{S}}(x) - L| = |f(x) - L| < \varepsilon;$$

entonces, por la definición de límites finitos en un punto real a se obtiene que $\lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = L$.

8. Suponga que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, entonces por la parte 4 de la definición 4, para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies f(x) > N; \quad (*)$$

además, la definición 4 afirma $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de (*) se sigue que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \implies f_{\mathcal{S}}(x) = f(x) > N;$$

entonces, por la parte 4 de la definición 4, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty$.

10. Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, entonces por la parte 7 de la definición 1, para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies |f(x)| > N; \quad (**)$$

además, por la definición 4, $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de (**) se sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \implies |f_{\mathcal{S}}(x)| = |f(x)| > N;$$

entonces, por la parte 7 de la definición 4, $\lim_{x \rightarrow a} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty$.

13. Suponga que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, entonces por la parte 10 de la definición 1 para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \implies |f(x)| > N; \quad (***)$$

además, la definición 4 afirma $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de (***) se sigue que

$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \implies |f_{\mathcal{S}}(x)| = |f(x)| > N;$$

entonces, por la parte 10 de la definición 4, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty$.

□

Utilizando las definiciones 1 y 4, los lemas 2 y 5 y el teorema 2, se demuestra el siguiente resultado, conocido como la Regla de L'Hôpital para las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ en un punto real a .

TEOREMA 6. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. f y g son diferenciables en $]a - \delta, a + \delta[$ para todo $\delta > 0$, excepto quizá en $x = a$.
2. $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en $]a - \delta, a + \delta[$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Suponga que $I =]a - \delta, a + \delta[$. Entonces, de la hipótesis 3 y el lema 3 se sigue que $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ para todo z en $I \setminus \{a\}$, por lo que las funciones

$$\frac{1}{f(z)} = (f(z))^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{g(z)} = (g(z))^{-1}$$

son funciones bien definidas para todo z en $I \setminus \{a\}$; así, al considerar las funciones

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a, \end{cases}$$

la hipótesis 1 implica que F y G son funciones diferenciables en $I \setminus \{a\}$, y para todo z en $I \setminus \{a\}$ se tiene

$$F'(z) = - \left(\frac{1}{f(z)} \right)^2 f'(z) \quad \text{y} \quad G'(z) = - \left(\frac{1}{g(z)} \right)^2 g'(z); \quad (i)$$

por tanto, F y G son continuas en $I \setminus \{a\}$; además,

$$\lim_{z \rightarrow a} F(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 = F(a) \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow a} G(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{g(z)} = 0 = G(a),$$

por lo que F y G son continuas en todo \mathbb{R} ; más aún,

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)}{h} = 0, \quad y$$

$$G'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(a+h) - G(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(a+h)}{h} = 0;$$

en consecuencia, las funciones F y G son diferenciables en todo \mathbb{R} . En particular, al fijar cualquier punto x en $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ se tiene que, las funciones F y G son continuas en $[a, x]$ y diferenciables en $]a, x[$; y también, F y G son continuas en $[x, a]$ y diferenciables en $]x, a[$. Ahora, la hipótesis 2 e (i) implican que $G'(z) \neq 0$ para todo z en $I \setminus \{a\}$, en particular $G'(z) \neq 0$ para todo z en $]x, a[$ o en $]a, x[$; también, dado que $g(z) \neq 0$ en $I \setminus \{a\}$, entonces $G(z) = G(z) - G(a) = g(z) \neq 0$ para todo z en $I \setminus \{a\}$; por tanto, al aplicar el Teorema del Valor Medio de Cauchy a las funciones F y G se tiene que, para el referido punto x existe $y = y_x$ en $]a, x[$ tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(y)}{G'(y)}; \quad (ii)$$

o bien, existe $y = y_x$ en $]x, a[$ tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{-F(x)}{-G(x)} = \frac{F(a) - F(x)}{G(a) - G(x)} = \frac{F'(y)}{G'(y)}; \quad (iii)$$

en consecuencia, de (i) y (ii), o de (i) y (iii) se sigue que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f'(y)}{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g'(y)};$$

de donde, por el hecho de que $\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 \neq 0$ y $\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 \neq 0$ para todo y en $I \setminus \{a\}$, resulta

$$\frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(x)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}. \quad (iv)$$

Ahora, dado que a es punto de acumulación de $\mathcal{S} = \{y \in \mathbb{R} : a < y < a + \delta\} \subset I$; entonces, de (iv) y el lema 5 se infiere que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(x)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(x)} = \lim_{a^+} \left(\frac{\left(\frac{1}{g}\right)^2 g}{\left(\frac{1}{f}\right)^2 f} \right)_{\mathcal{S}} \\ &= \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(y)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(y)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

De igual manera, considerando $\mathcal{S} = \{y \in \mathbb{R} : a - \delta < y < a\}$ se obtiene que

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Así, de la hipótesis 4 se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Vale la pena mencionar que, si en el enunciado del teorema anterior se cambia $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ en $]a, a + \delta[$, o $x \rightarrow a^-$ en $]a - \delta, a[$, y/o se reemplaza la palabra “existe” por $= \pm\infty$, se obtiene un resultado verdadero, cuya demostración es similar a la del teorema 6. Por ejemplo, estos cambios dan como resultado el teorema que sigue.

TEOREMA 7. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. f y g son diferenciables en $]a, a + \delta[$ para todo $\delta > 0$, excepto quizá en $x = a$.
2. $g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a, a + \delta[$.
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$.
4. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.

Entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Es análoga a la demostración del teorema 6. □

Finalmente, se utilizará el teorema 6 para demostrar las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en $\pm\infty$, la cual se enuncia enseguida, en donde la expresión “para todo $|x| > N$ ” debe traducirse como “para todo x en $] -\infty, -N[$ si $x \rightarrow -\infty$ ” o “para todo x en $]N, +\infty[$ si $x \rightarrow +\infty$ ”, y como se mencionó en la sección 2 anterior, la notación $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ es una forma abreviada de enunciar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

TEOREMA 8. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. f y g son diferenciables para todo $|x| > N$ y todo $N > 0$.
2. $g'(x) \neq 0$ para todo $|x| > N$ y todo $N > 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$.
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Considere las siguientes funciones.

$$F(z) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad G(z) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{z}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Note que, por la propiedad arquimediana (véase la sección 3 del capítulo 9 de [3]) para cada $\delta > 0$ y cada z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$ existe $N > 0$ tal que $\frac{1}{z} > N$ si $z > 0$, o $-\frac{1}{z} > N$ si $z < 0$, lo cual implica que $|\frac{1}{z}| > N$ para todo z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$; entonces, $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ y $G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ para todo z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$; en consecuencia, de la hipótesis 1 se infiere que F y G son diferenciables en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$; en tal caso, para cada z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} F'(z) &= \left(f\left(\frac{1}{z}\right) \right)' = f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right), \quad \text{y} \\ G'(z) &= \left(g\left(\frac{1}{z}\right) \right)' = g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right); \end{aligned} \tag{*}$$

Más aún, de (*) y la hipótesis 2 se sigue que $F'(z) \neq 0$ y $G'(z) \neq 0$ para todo z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$. Además, para todo z en $] -\delta, \delta[\setminus \{0\}$ de (*) se obtiene

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Ahora, al considerar el cambio de variable $x = \frac{1}{z}$, se tiene que $x \rightarrow \pm\infty$ es equivalente con $z \rightarrow 0^\pm = 0$; precisando se tiene, $x \rightarrow +\infty$ si sólo si $z \rightarrow 0^+$, y $x \rightarrow -\infty$ si y sólo si $z \rightarrow 0^-$; entonces, con este cambio de variable resulta

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}; \tag{**}$$

así, de la hipótesis 4 se infiere que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{G'(z)}$ existe; además, con el cambio de variable aludido y la hipótesis 3 se tiene

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad y$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} G(z) = \lim_{z \rightarrow 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty;$$

por tanto, al aplicar el teorema 6 a las funciones F y G se obtiene

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{G'(z)}; \quad (***)$$

en consecuencia, de (**), (***) y el cambio de variable multicitado se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es decir, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

También aquí, vale la pena mencionar que esta Regla es válida si en el enunciado del teorema 8 se reemplaza la palabra “existe” por $= \pm\infty$. La demostración esencialmente es la misma.

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud al árbitro(a) anónimo(a) que propuso mejoras para el artículo.

REFERENCIAS

- [1] Benítez, López, R., *Cálculo diferencial*, Editorial Trillas, México 2018.
- [2] Boyer, Carl, B., *Historia de las matemáticas*, Alianza Editorial S. A., Madrid, 1986.
- [3] Haaser, B., Norman, LaSalle P., Joseph, Sullivan, A., Joseph, *Análisis matemático 1, curso de introducción*, Editorial Trillas, México, 1976.
- [4] Leithold, Louis, *El cálculo con geometría analítica*, Editorial Harla, México 1978.
- [5] Piskunov, N., *Diferential and integral calculus*, Mir Publisher, Moscow, 1969.

René Benítez López:

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1A Sección,

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, CDMX, México

e-mail: rbl@xanum.uam.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0405-6998>



ELEMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

JORGE R. BOLAÑOS SERVÍN
ROBERTO QUEZADA BATALLA
JOSUÉ I. RIOS CANGAS

RESUMEN. En estas notas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, que son necesarias para un primer estudio, matemáticamente riguroso, de la mecánica cuántica. En la última parte incluimos una introducción axiomática a la mecánica cuántica y una breve exposición del modelo del oscilador armónico y de la teoría de estados cuánticos Gaussianos.

INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica es la rama de la física que estudia los fenómenos físicos que ocurren en escalas de longitudes muy pequeñas. El calificativo “cuántico” surge de, en contraste con la mecánica clásica, considerar algunas cantidades que toman solamente valores discretos i.e., en “paquetes” o *quantum-quantum* en latín. Aún cuando hay muchas nociones de la mecánica cuántica que aún suscitan controversia, esta teoría se aplica exitosamente para describir el comportamiento de sistemas físicos y sus predicciones son consistentes con los experimentos.

Los sistemas físicos que estudia la mecánica cuántica, exhiben propiedades ondulatorias que se pueden describir mediante una ecuación de onda, por ejemplo, la bien conocida “ecuación de Schrödinger”, que describe la evolución temporal de una partícula subatómica con masa, en el contexto no relativista. En estas notas trabajamos con el formalismo de matrices de densidad, que permite describir estados que son mezclas de estados puros. En consecuencia, este enfoque resulta ser una herramienta poderosa para describir sistemas cuánticos más generales, por ejemplo, acoplamientos (ensambles) de muchos sistemas cuánticos idénticos.

El material que se presenta en este trabajo está dividido en cuatro secciones compuestas de la siguiente manera: la sección 1 contiene una selección de resultados de índole geométrico y analítico de la teoría de espacios de Hilbert: ortogonalidad y descomposición ortogonal, convexidad, operadores lineales, norma de operadores y funcionales lineales.

La sección 2 se concentra en la clase de los operadores compactos, particularmente en los operadores de la clase de traza y de manera especial, en los operadores de Hilbert-Schmidt. Es relevante mencionar que los estados cuánticos se representan mediante operadores positivos de traza uno.

La sección 3 se dedica al estudio de operadores no acotados que pueden no estar densamente definidos en un espacio de Hilbert. Abordamos también el estudio de operadores cerrados y cerrables, el adjunto de un operador y una introducción a la teoría espectral de operadores. Una parte esencial de esta sección son los operadores simétricos e isométricos, los cuales exhiben similitudes en sus propiedades geométricas y espectrales. Cabe señalar que las observables físicas se representan por operadores simétricos típicamente no acotados.

Por último, en la sección 4 se discuten brevemente postulados de la mecánica cuántica en el marco del formalismo de matrices de densidad, se revisa el modelo del oscilador armónico cuántico y se ofrece una introducción a los estados cuánticos Gaussianos.

Al final de cada sección incluimos una selección de problemas que sirven para complementar estas notas. El lector interesado puede profundizar en el estudio de resultados aquí expuestos, desde los más básicos hasta los más avanzados, en la literatura clásica de operadores lineales, por ejemplo en [1, 2, 3, 4, 13, 20].

Una versión preliminar de estas notas se elaboró para un curso corto de la Escuela Taller de Verano 2022 realizado en la Facultad de Matemáticas de la UAGro en Chilpancingo. Agradecemos el apoyo de CONAHCYT para la escritura de este texto y la retroalimentación por parte de los estudiantes que las han utilizado.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 46C05; 47A05; 47B07; 47L60; 81Q10.

Palabras clave. Espacios de Hilbert, operadores lineales acotados y no acotados, mecánica cuántica.

Índice

Introducción		143
1. Espacios de Hilbert		145
1.1. Productos internos y funcionales lineales		145
1.2. Subespacios		148
1.3. Ortogonalidad		150
1.4. Conjuntos ortonormales		154
1.5. Bases ortonormales: un problema de aproximación		155
1.6. Existencia de bases ortonormales		159
1.7. El sistema trigonométrico		159
Problemas de la sección		162
2. Clases Especiales de Operadores		163
2.1. Operadores de rango finito y compactos		163
2.2. La clase de traza		174
2.3. Operadores de Hilbert-Schmidt		182
Problemas de la sección		187
3. Operadores Lineales no Acotados		187
3.1. Preliminares		187
3.2. La gráfica de un operador		189
3.3. Operadores cerrados y cerrables		191
3.4. El adjunto de un operador		193
3.5. Teoría espectral		196
3.5.1. El espectro		196
3.5.2. La resolvente		199
3.6. Operadores simétricos e isométricos		200
3.6.1. Operadores simétricos y autoadjuntos		201
3.6.2. Operadores isométricos y unitarios		204
3.7. Operadores de posición y momento		206
3.7.1. Operador de posición		206
3.7.2. Operador de momento		207
Problemas de la sección		208
4. Principios Básicos de la Mecánica Cuántica		210
4.1. Postulados		210
4.1.1. Postulado uno (estados)		210
4.1.2. Postulado dos (ley dinámica).		211
4.1.3. Postulado tres (mediciones cuánticas)		212
4.1.4. Postulado cuatro (sistemas compuestos)		213
4.2. El oscilador armónico cuántico		213
4.2.1. Forma diferencial de Schrödinger del oscilador armónico		213
4.2.2. Relaciones canónicas de conmutación (CCR)		214
4.3. Estados Gaussianos		215
4.3.1. Representación de estados coherentes		215
4.3.2. Transformada de Fourier no conmutativa		218
4.3.3. Estados cuánticos Gaussianos		219
Problemas de la sección		220
Referencias		221

1. ESPACIOS DE HILBERT

Iniciaremos esta sección con el estudio de los elementos que le dan estructura geométrica a un espacio de Hilbert.

1.1. Productos internos y funcionales lineales. A menos que se diga lo contrario todos los espacios vectoriales considerados son **complejos**, es decir, sobre el campo de los números complejos. Recordemos que una transformación lineal de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W es una función Λ de V en W tal que:

$$(1) \quad \Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda(x) + \beta \Lambda(y),$$

para todo $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En el caso particular cuando $W = \mathbb{C}$, Λ se llama **funcional lineal**. Por lo tanto, un funcional lineal es una función que toma valores complejos y satisface (1).

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial \mathcal{H} se llama **espacio con producto interno** (o espacio unitario) si a cada par ordenado de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ se le asocia un número complejo $\langle x, y \rangle$, llamado **producto interno** (o producto escalar) de x con y , que satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ (la barra denota conjugación compleja).
- (b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- (c) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
- (e) $\langle x, x \rangle = 0$ solo si $x = 0$.

Entonces un espacio con producto interno es un par de la forma $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Listemos algunas consecuencias inmediatas de estos axiomas:

- (1) El inciso (c) implica que $\langle 0, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathcal{H}$.
- (2) Los incisos (b) y (c) se pueden combinar en sólo una proposición: *para cada $x \in \mathcal{H}$, la función $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ es un funcional lineal en \mathcal{H} .*
- (3) Los incisos (a) y (b) implican que $\langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$ (se distribuye en la segunda coordenada).
- (4) Incisos (a) y (c) implican que $\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$. Es decir, *para cada $y \in \mathcal{H}$ la función $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ es **lineal conjugada** (o *anti-lineal*).*
- (5) Los incisos (1) y (e) implican que $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

El producto interno es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ que es *lineal* en la segunda coordenada y *anti-lineal* en la primera. Es importante remarcar que la anterior es una elección *arbitraria* y es la convención típicamente usada en la literatura de la Física y Física-Matemática. En contraposición a esto es común encontrar textos matemáticos donde se usa el producto interno como una función que es *anti-lineal* en la segunda coordenada y *lineal* en la primera. Ambas corrientes dan origen a teorías equivalentes, sin embargo aconsejamos al lector que cada vez que consulte material de un nuevo autor verifique a cuál de estas convenciones se adhiere.

Dicho lo anterior, de manera general una función $S : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ que es lineal en una de las coordenadas y antilineal en la otra se llama **forma sesquilineal**.

Como una consecuencia de (d), podemos definir la **norma** $\|x\|$ del vector $x \in \mathcal{H}$, como la raíz cuadrada no negativa de $\langle x, x \rangle$. De manera que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

LEMA 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para $x, y \in \mathcal{H}$, se cumple que*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demostración. Para $A = \|x\|^2$, $B = |\langle x, y \rangle|$ y $C = \|y\|^2$, existe un número complejo α de módulo unitario $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha \langle y, x \rangle = B$. De hecho,

$$\alpha = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\langle y, x \rangle}, \quad \text{si } \langle y, x \rangle \neq 0.$$

Además, para cualquier λ real tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \lambda\alpha y, x - \lambda\alpha y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \lambda\bar{\alpha}\langle y, x \rangle - \lambda\alpha\langle x, y \rangle + \lambda^2\langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\lambda|\langle x, y \rangle| + \lambda^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

De esta manera se cumple que

$$(2) \quad A - 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0,$$

de donde si $C = 0$, entonces $B = 0$, pues en caso contrario (2) es falsa para $\lambda > 0$ grande. Si $C > 0$, tomando $\lambda = B/C$ en (2) se obtiene que $B^2 \leq AC$. \square

Observación 1.1.3. La demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede extender al caso de formas sesquilineales que satisfagan las propiedades de un producto interno. Ciertamente, basta tomar la forma sesquilineal $S(x, x) = A \geq 0$, $|S(x, y)| = B$ y $S(y, y) = C$. De esta manera, se cumple la siguiente desigualdad de Cauchy-Schwarz para formas sesquilineales que satisfacen las propiedades de un producto interno:

$$(3) \quad |S(x, y)| \leq S(x, x)^{\frac{1}{2}} S(y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 1.1.4. Un espacio vectorial complejo \mathcal{X} se llama **espacio lineal normado** (o espacio vectorial normado) si cada $x \in \mathcal{X}$ tiene asociado un número real no negativo $\|x\|$, llamado la **norma** de x , tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

- (a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
- (c) Si $\|x\| = 0$, entonces $x = 0$.

Entonces un espacio lineal normado es un par $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Además, de (a) se cumple la desigualdad del triángulo

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|, \quad x, y, z \in \mathcal{X}.$$

Definiendo la función $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mediante

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

se obtiene que cada espacio lineal normado es un espacio métrico (\mathcal{X}, d) .

Es bien conocido que un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado que es completo en la métrica d inducida por la norma. Además, una seminorma sobre un espacio vectorial \mathcal{X} es una función real $p: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y para $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x).$$

A diferencia de una norma, una seminorma puede anularse sobre vectores no nulos de \mathcal{X} . Un par (\mathcal{X}, p) donde \mathcal{X} es un espacio vectorial y p una seminorma se llama **espacio semi-normado**.

Si s es una forma sesquilineal definida positiva en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, entonces $p(x) = \sqrt{s(x, x)}$ es una seminorma en \mathcal{H} . Si además satisface la implicación: $s(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, entonces p es una norma. En efecto, aplicando el lema de Cauchy-Schwarz a la forma sesquilineal positiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(x + y)^2 &= s(x + y, x + y) \\ &= s(x, x) + s(y, x) + s(x, y) + s(y, y) \\ &\leq s(x, x) + 2|s(x, y)| + s(y, y) \\ &\leq p(x)^2 + 2p(x)p(y) + p(y)^2 = (p(x) + p(y))^2. \end{aligned}$$

De esta manera $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Note que

$$p(\alpha x) = s(\alpha x, \alpha x)^{\frac{1}{2}} = [\alpha\bar{\alpha}s(x, x)]^{\frac{1}{2}} = |\alpha|p(x).$$

Por lo tanto p es una seminorma. Si $s(x, x) = 0$ implica $x = 0$, entonces $p(x) = 0$ conlleva $x = 0$, es decir, p es una norma.

Todo espacio unitario $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ puede considerarse como un espacio vectorial normado $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ con la norma inducida por su producto interno, y también puede considerarse como un espacio métrico (\mathcal{H}, d) con la métrica inducida por su norma. Si este espacio (\mathcal{H}, d) es completo, i.e., si cualquier sucesión de Cauchy converge en \mathcal{H} , entonces el espacio unitario original se llama **espacio de Hilbert**.

TEOREMA 1.1.5. *Para cada $y \in \mathcal{H}$ fijo, las funciones:*

$$(4) \quad x \mapsto \langle x, y \rangle, \quad x \mapsto \langle y, x \rangle, \quad x \mapsto \|x\|,$$

son uniformemente continuas en \mathcal{H} . Además, el producto interno es una función continua en el espacio $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Demostración. Para $x, y, h, h' \in \mathcal{H}$, se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x + h, y + h' \rangle| &= |\langle h, y \rangle + \langle x, h' \rangle + \langle h, h' \rangle| \\ &\leq \|h\|\|y\| + \|x\|\|h'\| + \|h\|\|h'\|, \end{aligned}$$

de donde haciendo $h = 0$ o $h' = 0$ se obtienen las continuidades. De hecho se cumple la continuidad uniforme de las dos primeras funciones en (4). Además se obtiene que $\langle x + h, y + h' \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ cuando $\|h'\| + \|h\| \rightarrow 0$, lo cual demuestra la continuidad del producto interno. \square

Ejemplo 1.1.I.

1.1.I.1 Si la aplicación $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $p(x) = |f(x)|$ es una seminorma en \mathcal{X} .

1.1.I.2 Sea $L_1(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones Lebesgue integrables en \mathbb{R} , i.e.,

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty \right\}.$$

La función $p : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dada por:

$$p(f) = \int_{\mathbb{R}} |f|$$

es una seminorma, pero no una norma, debido a que se anula en las funciones que son cero casi en todas partes.

1.1.I.3 Para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto \mathbb{C}^n de todas las n -uplas $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, donde ξ_1, \dots, ξ_n son números complejos, es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \eta_j, \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n).$$

1.1.I.4 El espacio vectorial de todas las funciones complejas continuas en $[0, 1]$ es un espacio con producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt,$$

pero no es un espacio de Hilbert.

1.1.I.5 El espacio $L_\infty(E, \mu)$ de todas las funciones $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ con (E, μ) un espacio de medida, que satisfacen la condición

$$\exists c > 0 \quad \text{tal que} \quad \mu_c(f) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > c\}) = 0.$$

Es decir, el espacio de las funciones **esencialmente acotadas**, es un espacio vectorial complejo. El par $(L_\infty(E, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio seminormado, donde la seminorma $\|\cdot\|_\infty$ está definida mediante

$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : \mu_c(f) = 0\}.$$

La seminorma $\|\cdot\|_\infty$ no es una norma, pues se anula en las funciones que son cero μ -c.d (casi dondequiera).

1.1.I.6 Denotemos por ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones complejas $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < \infty$, la estructura de espacio vectorial de ℓ_2 es clara. Defínase el producto interno en ℓ_2 mediante

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 1} \overline{x_n} y_n, \quad y = (y_n) .$$

ℓ_2 es un espacio de Hilbert. *Queda como ejercicio demostrar la completéz.*

1.1.I.7 Los espacios $\mathcal{L}_p(\mathcal{X}, \mu)$, $p \geq 1$, donde $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida, son espacios de Banach y $\mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de Hilbert.

1.1.I.8 El espacio de las matrices complejas 2×2 es un espacio de Hilbert con las operaciones de suma de matrices y producto por escalares y el producto escalar Hilbert-Schmidt definido por

$$\langle a, b \rangle := \text{tr}(a^* b) ,$$

donde $\text{tr}(a)$ represente la traza de a . ¿Puede dar una demostración de esto?

1.2. Subespacios. Un subconjunto M de un espacio vectorial \mathcal{X} se llama subespacio de \mathcal{X} si el mismo M es un espacio vectorial con las operaciones de \mathcal{X} restringidas a M . Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $M \subset \mathcal{X}$ sea subespacio es que sea cerrado bajo las operaciones de suma y producto por escalares, i.e., para cualesquiera $x, y \in M$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene $x + y \in M$ y $\alpha x \in M$.

Ejemplo 1.2.I.

1.2.I.1 Si \mathcal{X} es el espacio de todas las funciones complejas sobre un conjunto E , el conjunto de las funciones acotadas es un subespacio de \mathcal{X} .

1.2.I.2 Si \mathcal{X} es como en el ejemplo 1, el conjunto de las funciones que cumple $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$, no es un subespacio de \mathcal{X} , pues no es cerrado bajo las operaciones de \mathcal{X} .

1.2.I.3 El espacio vectorial \mathbb{R}^3 tiene los siguientes subespacios y solo estos:

- El espacio total \mathbb{R}^3 .
- Todos los planos que pasan por el origen.
- Todas las rectas que pasan por el origen.
- El espacio trivial $\{0\}$.

1.2.I.4 En ℓ_2 el conjunto de sucesiones complejas $(x_n)_{n \geq 1}$ tales que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} = 0 ,$$

es un subespacio de ℓ_2 .

1.2.I.5 Sea $C[0, 1]$ el espacio de las funciones complejas continuas en $[0, 1]$ y considere M como el conjunto de las funciones derivables; este es un subespacio.

Un conjunto de vectores x_1, \dots, x_n es **linealmente independiente** (abreviado l.i.), si cualquier combinación lineal

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 ,$$

implica que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso contrario se dice que el conjunto es **linealmente dependiente** (abreviado l.d.). Un subconjunto S es l.i. si cada subconjunto finito de S es l.i.

Un conjunto de elementos x_1, x_2, \dots de un espacio vectorial \mathcal{X} se dice que **generan** a \mathcal{X} , si cualquier elemento de $y \in \mathcal{X}$ se puede representar de manera única como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} .$$

Además, los vectores x_1, x_2, \dots forman una **base** de \mathcal{X} si lo generan y son l.i.

Un subespacio M de un espacio vectorial \mathcal{X} es de **dimensión finita** igual a k , si tiene una base con k elementos. Si ningún conjunto finito de vectores genera a M , entonces M tiene dimensión infinita.

TEOREMA 1.2.1. *Sea \mathcal{X} un espacio vectorial y M un subespacio de \mathcal{X} de dimensión k . Entonces, el máximo número de vectores l.i. en M es k .*

Demostración. Bastará demostrar que cualquier subconjunto de $k + 1$ vectores es l.d. Por inducción, sea $k = 1$ y x_1 una base de M . Si $y_1, y_2 \in M$ y ninguno de estos vectores es nulo, entonces existen escalares no nulos α_1, α_2 tales que $y_1 = \alpha_1 x_1$ y $y_2 = \alpha_2 x_2$. Así, $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$ y no todos los escalares son nulos.

Supongamos ahora que cualquier subconjunto de k vectores en un subespacio de dimensión $k - 1$ es l.d. Sean y_1, y_2, \dots, y_{k+1} vectores en un subespacio $M \subset \mathcal{X}$ de dimensión k , tales que ninguno de ellos es nulo. Si x_1, \dots, x_k es una base de M tenemos para cada $j = 1, 2, \dots, k + 1$, que

$$y_j = \alpha_{1j} x_1 + \alpha_{2j} x_2 + \alpha_{kj} x_k,$$

con α_{ij} 's no todos iguales a cero. Suponga $\alpha_{11} \neq 0$ y considere los k vectores

$$\alpha_{11} y_j - \alpha_{1j} y_1, \quad j = 2, 3, \dots, k + 1.$$

Estos vectores pertenecen a M_k , el subespacio generado por x_2, \dots, x_k , pues

$$\begin{aligned} \alpha_{11} y_j - \alpha_{1j} y_1 &= \alpha_{11} \alpha_{1j} x_1 + \alpha_{11} \alpha_{2j} x_2 + \alpha_{11} \alpha_{kj} x_k - \alpha_{1j} \alpha_{11} x_1 - \alpha_{1j} \alpha_{21} x_2 - \dots \\ &\quad \dots - \alpha_{1j} \alpha_{k1} x_k \\ &= (\alpha_{11} \alpha_{2j} - \alpha_{1j} \alpha_{21}) x_2 + \dots + (\alpha_{11} \alpha_{kj} - \alpha_{1j} \alpha_{k1}) x_k. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción existen escalares $\beta_2, \dots, \beta_{k+1}$, no todos nulos, tales que

$$\beta_2 (\alpha_{11} y_2 - \alpha_{12} y_1) + \dots + \beta_{k+1} (\alpha_{11} y_{k+1} - \alpha_{1k+1} y_1) = 0,$$

es decir,

$$\beta_2 \alpha_{11} y_2 + \dots + \beta_{k+1} \alpha_{11} y_{k+1} - (\beta_2 \alpha_{12} + \beta_{k+1} \alpha_{1k+1}) y_1 = 0$$

de donde se sigue la afirmación. \square

Un **subespacio cerrado** M de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un subespacio que es cerrado con la topología inducida por la métrica de \mathcal{H} .

Ejemplo 1.2.II.

1.2.II.1 En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , se cumple lo siguiente:

- El único subespacio de dimensión 3 es el mismo \mathbb{R}^3 .
- El único subespacio de dimensión cero es $\{0\}$.
- Los subespacios de dimensión dos son todos los planos que pasan por el origen.
- Las rectas que pasan por el origen son los subespacios de dimensión uno.
- Todo subespacio de \mathbb{R}^3 tiene dimensión finita menor o igual a tres.

1.2.II.2 Sobre el espacio ℓ_2 se tiene que:

- El subconjunto M de vectores (sucesiones) de la forma $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ es un subespacio de dimensión n .
- El subespacio M de todas las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ tales que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} = 0,$$

es un subespacio de ℓ_2 de dimensión infinita. Además, uno verifica que el conjunto de vectores $\{(1, -2, 3, -4, \dots, 2k - 1, -2k, \dots)\}_{k \geq 1}$ es l.i. en M .

1.2.II.3 En $L_2[0, 1]$, el subconjunto de las funciones que satisfacen la condición:

$$\int_0^1 f(t)dt = 0,$$

es un subespacio de dimensión infinita. Esto debido a que el conjunto de funciones $\{\sin(2\pi k)\}_{k \geq 1}$ es l.i. y

$$\int_0^1 \sin(2k\pi t)dt = 0, \quad \text{para toda } k \geq 1.$$

1.2.II.4 En ℓ_2 , el conjunto M de las sucesiones con solo un número finito de coordenadas distintas de cero es un subespacio pero no es un subespacio cerrado de ℓ_2 ; la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ definida por:

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

es una sucesión en M que converge en ℓ_2 al punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \notin M$.

1.2.II.5 En ℓ_2 , el subconjunto M de las sucesiones $(x_n)_{n \geq 1}$ tales que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} = 0$$

es un subespacio cerrado de ℓ_2 . En efecto, si $\{x_k = (x_{k,n})_{n \geq 1}\}_{k \geq 1}$ es una sucesión en M que converge en ℓ_2 a $x = (x_n)_{n \geq 1}$, entonces como

$$\langle x_0, x_k \rangle = \sum_{n \geq 1} \frac{x_{k,n}}{n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ y como el producto interno es una función continua en la segunda componente, tenemos que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} = \langle x_0, x \rangle = \lim_k \langle x_0, x_k \rangle = 0,$$

es decir, $x \in M$.

1.3. Ortogonalidad. Dos elementos x, y en un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dicen **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$ y se denota por $x \perp y$. Como $\langle x, y \rangle = 0$ implica que $\langle y, x \rangle = 0$, entonces \perp es una relación simétrica.

Mediante el símbolo x^\perp denotaremos al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ que son ortogonales a x . Si M es un subespacio de \mathcal{H} , M^\perp denota al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ que son ortogonales a cada $x \in M$. Se le llama **conjunto ortogonal** a M . Obsérvese que x^\perp es un subespacio de \mathcal{H} debido a que si $x \perp y$ y $x \perp y'$ entonces $x \perp y + y'$ y $x \perp \alpha y$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Además,

$$x^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0\},$$

es decir, es la imagen inversa del $\{0\}$ bajo la función continua $y \mapsto \langle x, y \rangle$, por lo tanto x^\perp es un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Más aún, de la definición se sigue que

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp,$$

por lo tanto M^\perp también es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , al ser intersección de subespacios cerrados.

Introduzcamos el siguiente concepto sobre espacios vectoriales. Decimos que un subconjunto E de un espacio vectorial \mathcal{X} es **convexo** si tiene la siguiente propiedad geométrica:

Para cualesquiera $x, y \in E$ y $0 < t < 1$, el punto

$$z_t = (1 - t)x + ty,$$

también pertenece a E . Además, se cumple lo siguiente:

(a) Cualquier subespacio de \mathcal{X} es convexo.

(b) Si $E \subset \mathcal{X}$ es convexo, entonces cada uno de sus trasladados

$$E + x = \{y + x : y \in E\}$$

también son convexos.

(c) La bola abierta unitaria B en un espacio normado es un subconjunto convexo. Ciertamente, si $x, y \in B$ y $0 < t < 1$, entonces:

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t) + t = 1.$$

El siguiente teorema es uno de los resultados geométricos más importantes en la teoría de los espacios de Hilbert.

TEOREMA 1.3.1 (Beppo-Levi). *Cualquier subconjunto convexo, cerrado y no vacío E de un espacio de Hilbert \mathcal{H} tiene un único elemento de norma mínima.*

Demostración. Debemos demostrar que existe un único $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leq \|x\|$ para cualquier $x \in E$. De la definición de producto interno se puede obtener, después de algunos cálculos, la siguiente **identidad del paralelogramo** (*Tarea*):

$$(5) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Sea $\delta = \inf\{\|x\| : x \in E\}$. Este ínfimo existe pues el conjunto está acotado inferiormente por 0 y por consiguiente $\delta \geq 0$. Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en E tal que $\lim_n \|x_n\| = \delta$. Como E es convexo, $(x_n + x_m)/2 \in E$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$(6) \quad \delta \leq \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\|.$$

Usando (5) y (6), uno tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 &= \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \frac{1}{4}\|x_n + x_m\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \delta^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

debido a que $\|x_n\|^2, \|x_m\|^2 \rightarrow \delta$, es decir, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Como \mathcal{H} es completo y E es cerrado, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_n \rightarrow x_0$ y como la norma es una función continua, $\|x_0\| = \lim_n \|x_n\| = \delta$. \square

Veamos a continuación dos consecuencias del teorema de Beppo-Levi 1.3.1.

COROLARIO 1.3.2. *Sea E un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$, existe un único vector $x_0 \in E$ tal que*

$$(7) \quad \|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Demostración. Considerando $E_x = \{x - y : y \in E\}$, uno comprueba de manera simple que E_x es cerrado, convexo y no vacío. Por lo tanto, aplicando el teorema 1.3.1 a E_x se obtiene la existencia de un único $x_0 \in E$ tal que (7) se cumple. \square

COROLARIO 1.3.3. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sea $x \in \mathcal{H}$ y $x_0 \in M$ el único vector que satisface:*

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Entonces, $x - x_0$ pertenece a M^\perp .

Demostración. Como $x_0 \in M$ para todo $y \in M$, con $\|y\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\|x - x_0 - \alpha y\|^2 \geq \|x - x_0\|^2,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - x_0 - \alpha y, x - x_0 - \alpha y \rangle - \langle x - x_0, x - x_0 \rangle \\ &= -\alpha \langle y, x - x_0 \rangle - \bar{\alpha} \langle x - x_0, y \rangle + |\alpha|^2. \end{aligned}$$

Haciendo $\alpha = \langle x - x_0, y \rangle$, se obtiene $0 \leq -|\langle x - x_0, y \rangle|^2$, i.e., $\langle x - x_0, y \rangle = 0$, para todo $y \in M$. Por lo tanto, $x - x_0 \in M^\perp$. Note que la restricción $\|y\| = 1$ no es esencial. \square

Observación 1.3.4. Al vector x_0 definido en el corolario 1.3.3 se le llama la **proyección ortogonal** de x sobre el subespacio cerrado M . Por consiguiente, cada elemento de \mathcal{H} tiene una representación única de la forma:

$$x = x_0 + (x - x_0),$$

con $x_0 \in M$ y $x - x_0 \in M^\perp$, es decir,

$$(8) \quad \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

donde \oplus representa la suma ortogonal. Más aún, si $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$, con $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^\perp$. Entonces,

$$(9) \quad \begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \|x_2\|^2 \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2, \end{aligned}$$

que es una generalización del **Teorema de pitágoras**.

TEOREMA 1.3.5. *Para un subespacio cerrado M de \mathcal{H} , existe un único par de transformaciones P y Q tales que P envía \mathcal{H} en M y Q envía \mathcal{H} en M^\perp y*

$$(10) \quad x = Px + Qx, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Además, estas transformaciones cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Si $x \in M$, entonces $Px = x$ y $Qx = 0$.
- (b) Si $x \in M^\perp$, entonces $Px = 0$ y $Qx = x$.
- (c) Para $x \in M$, se tiene que $\|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$.
- (d) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.
- (e) P y Q son operadores lineales.

Demostración. Considere a P como la proyección ortogonal de x sobre M y defina $Qx = x - Px \in M^\perp$. Entonces los puntos (a), (b) y (e) se cumplen. Además, P envía \mathcal{H} en M y Q envía \mathcal{H} en M^\perp . Para la unicidad, si P_1 y Q_1 son otro par de transformaciones que satisfacen (10), entonces $x = P_1x + Q_1x$, con $P_1x \in M$ y $Q_1x \in M^\perp$. Así,

$$P_1x - Px = Qx - Q_1x,$$

como $P_1x - Px \in M$, $Qx - Q_1x \in M^\perp$ y $M \cap M^\perp = \{0\}$ (que es una consecuencia inmediata de la propiedad; $\langle x, x \rangle = 0$ implica $x = 0$), entonces $P_1x = Px$ y $Q_1x = Qx$, que demuestra la unicidad. El punto (c) es consecuencia directa del corolario 1.3.2 y (d) se sigue de manera simple de (9). \square

El siguiente resultado es una implicación directa del teorema 1.3.5.

COROLARIO 1.3.6. *Si M es un subespacio cerrado de \mathcal{H} y $M \neq \mathcal{H}$, entonces existe $y \in \mathcal{H}$ no cero tal que $y \perp M$, i.e., $y \in M^\perp$ (o bien $M^\perp \neq 0$).*

Definición 1.3.7. Considere una transformación lineal Λ de un espacio normado \mathcal{X} en otro espacio normado \mathcal{Y} y defina su norma como

$$(11) \quad \|\Lambda\| = \sup \left\{ \frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} : x \in \mathcal{X}, \quad x \neq 0 \right\}.$$

Cuando $\|\Lambda\| \leq \infty$ se dice que Λ es una **Transformación lineal acotada** (o un operador lineal acotado).

No debe causar confusión en (11) el usar el mismo símbolo para la norma que aparece en el numerador y la que aparece en el denominador, pues note que son normas que actúan sobre vectores de espacios distintos. Trabajaremos de manera frecuente con

estas expresiones. Además, el conjunto sobre el que toma el supremo en (11) se puede restringir a vectores al conjunto de vectores unitarios. Pues por una parte,

$$\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\|, \quad x \in \mathcal{X}, \quad \|x\| = 1.$$

Mientras que por la otra, para todo $\epsilon > 0$ existe un vector unitario $x \in \mathcal{X}$, tal que $\|\Lambda x\| > \|\Lambda\| - \epsilon$, de donde se cumple que $\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Lambda x\|$. Note que $\|\Lambda\|$ es el número más pequeño que satisface la desigualdad $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Geoméricamente, se puede decir que un operador acotado envía la bola unitaria cerrada en \mathcal{X} en la bola cerrada en \mathcal{Y} con centro en 0 y radio $\|\Lambda\|$. En el caso cuando $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ al operador acotado Λ se llama **funcional lineal acotado**. Es decir, un funcional lineal acotado es un operador lineal acotado cuyo contradominio son los complejos.

TEOREMA 1.3.8. *Para una transformación lineal Λ entre dos espacios normados \mathcal{X}, \mathcal{Y} , los siguientes son equivalentes:*

- (a) Λ es acotada.
- (b) Λ es continua.
- (c) Λ es continua en punto de \mathcal{X} .

Demostración. Como $\|\Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \|\Lambda\| \|x_1 - x_2\|$, es claro que (a) implica (b) y a la vez (c). Supóngase que Λ es continua en x_0 . A cada $\epsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|\Lambda x - \Lambda x_0\| < \epsilon$. En otras palabras, $\|x\| < \delta$ conlleva a

$$\|\Lambda(x_0 + x) - \Lambda x_0\| < \epsilon.$$

Pero la linealidad de Λ cumple que $\|\Lambda x\| < \epsilon$. Por otro lado,

$$\forall x \neq 0 \quad \text{y} \quad \delta_1 < \delta, \quad \left\| \frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right\| = \delta_1 < \delta \Rightarrow \left\| \Lambda \left(\frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right) \right\| < \epsilon,$$

de donde se sigue que $\|\Lambda x\| / \|x\| < \epsilon / \delta_1$. Por lo tanto, por la propiedad del supremo, $\|\Lambda\| < \infty$, por lo que (c) implica (a). \square

Dos subespacios cerrados E_1, E_2 de un espacio vectorial normado \mathcal{X} son *l.i.* si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Además, si para cada $x \in \mathcal{X}$, existen $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2$, tales que

$$(12) \quad x = x_1 + x_2,$$

entonces \mathcal{X} es la **suma directa** de E_1 y E_2 y se denota como $\mathcal{X} = E_1 \oplus E_2$. Cuando en \mathcal{X} exista un producto interno, la suma directa se denota como $\dot{+}$ para diferenciarlo de la suma ortogonal \oplus .

Observación 1.3.9. Si un espacio de Hilbert \mathcal{H} es suma ortogonal de dos subespacios cerrados E_1, E_2 , entonces $E_1 = E_2^\perp$. Además, es simple ver que la suma ortogonal implica la suma directa.

Observación 1.3.10. La descomposición en (12) es única. Ciertamente, si tenemos $x = y_1 + y_2$, con $y_1 \in E_1$ y $y_2 \in E_2$, entonces se cumple que

$$e_1 - y_1 = e_2 - y_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0\},$$

de donde se sigue la unicidad.

PROPOSICIÓN 1.3.11. *Para $\mathcal{X} = E_1 \oplus E_2$, la forma $E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{X}$ dada por $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, es un homeomorfismo si y solo si por lo menos una de las proyecciones $P_i : \mathcal{X} \rightarrow E_i$ sobre E_i , para $i = 1, 2$, es continua.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideramos $P_1 : \mathcal{X} \rightarrow E_1$ continua. Entonces, $P_2 = I - P_1$ es continua al igual que la función $\mathcal{X} \rightarrow E_1 \times E_2$ dada por $x \mapsto (P_1(x), P_2(x))$. La función inversa $E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{X}$ que actúa $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ es continua, ya que las operaciones lineales son continuas en un espacio normado. Por lo tanto, se tiene el homeomorfismo entre \mathcal{X} y $E_1 \times E_2$. \square

Observación 1.3.12. La proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \rightarrow M$, sobre un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es un operador continuo. Ciertamente, de (8) y (9) se tiene que

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

de donde se sigue que P es acotado.

Hemos observado que para cada $y \in E$, el funcional $x \rightarrow \langle y, x \rangle$ es lineal y continuo en \mathcal{H} . Es un hecho notable que todos los funcionales lineales sobre \mathcal{H} son de este tipo.

TEOREMA 1.3.13. *Para cada funcional continuo $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene un único $y \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$,*

$$(13) \quad Lx = \langle y, x \rangle.$$

Demostración. Si $Lx = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces basta tomar $y = 0$. En otro caso, defínase el conjunto

$$M = \{x : Lx = 0\} = L^{-1}[\{0\}].$$

La linealidad y continuidad de L muestra que M es un subespacio cerrado. Como $Lx \neq 0$ para algún $x \in \mathcal{H}$, el corolario 1.3.6 muestra que $M^\perp \neq \{0\}$. Entonces tenemos la existencia de $z \in M^\perp$ unitario y consideremos $u = (Lz)z - (Lz)x$. Como

$$Lu = LxLz - LzLx = 0,$$

tenemos que $u \in M$ y $\langle z, u \rangle = 0$, que sustituyendo u se sigue que $Lx = \langle \overline{(Lz)z}, x \rangle$, de donde se sigue (13). Para la unicidad, si existe \hat{y} que cumple (13), entonces $\langle y - \hat{y}, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, lo cual implica que $\hat{y} = y$. \square

1.4. Conjuntos ortonormales. Recordemos que un subconjunto S de un espacio vectorial E es l.i. si cualquier subconjunto finito de S es l.i. El conjunto **generado** $\text{span } S$ (también denotado por $[S]$) de S , consiste en todas las combinaciones lineales de todos los subconjuntos finitos de S y es un subespacio vectorial de E .

Un conjunto de vectores $M = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es **ortogonal** si para cada par de elementos distintos $u_n, u_m \in M$, se tiene $\langle u_n, u_m \rangle = 0$. El conjunto M es **ortonormal** si es ortogonal y sus elementos son de norma uno.

Observación 1.4.1. Extendiendo el concepto de (9), podemos calcular de manera directa que un conjunto ortogonal finito $M = \{u_n\}_{n=1}^k \subset \mathcal{H}$, con $k \in \mathbb{N}$, es linealmente independiente y cumple

$$\left\| \sum_{n=1}^k u_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^k \|u_n\|^2.$$

Además, si M es ortonormal, para $x = \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n \in \mathcal{H}$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, entonces es simple comprobar que $\alpha_n = \langle u_n, x \rangle$ y $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^k |\alpha_n|^2$.

Si $M = \{u_n\}_{n \in \mathcal{A}}$ es ortonormal, indexado con \mathcal{A} , podemos asociar a cada $x \in \mathcal{H}$, una función compleja sobre el conjunto \mathcal{A} dada por

$$\hat{x}(n) = \langle u_n, x \rangle, \quad n \in \mathcal{A}.$$

Algunos autores llaman a cada $\hat{x}(\cdot)$ **coeficientes de Fourier** de x relativos al conjunto M .

1.5. Bases ortonormales: un problema de aproximación. Sean v_1, v_2, \dots, v_k un conjunto de vectores l.i. en un espacio de Hilbert \mathcal{H} y $x \in \mathcal{H}$. Surge el problema de encontrar un método para calcular el valor mínimo de

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k c_j v_j \right\|, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Si mostramos que $M = \text{span} \{v_n\}_{n=1}^k$ es cerrado, uno puede aplicar el teorema de Beppo-Levi 1.3.1 y deducir la existencia de un único elemento de norma mínima,

$$x_0 = \sum_{j=1}^k c_j v_j$$

que satisface $x - x_0 \in M^\perp$. Con lo anterior, podemos obtener información acerca de los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_k .

LEMA 1.5.1. *Sea E subespacio cerrado de \mathcal{H} y $y \notin E$. Entonces, E , $\text{span} \{y\}$ son linealmente independientes y $E \dot{+} \text{span} \{y\}$ es cerrado.*

Demostración. Como $y \notin E$ se sigue que E y $\text{span} \{y\}$ son l.i. Luego, sea z un punto límite de $E \dot{+} \text{span} \{y\}$, i.e.,

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \lambda_n y),$$

donde $\{x_n\} \subset E$ y $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Toda sucesión convergente en un espacio métrico es acotada, entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$\|x_n + \lambda_n y\| < \eta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ entonces

$$\|\lambda_n^{-1} x_n + y\| < \frac{\eta}{|\lambda_n|} \rightarrow 0,$$

de manera que $y \in E$, lo cual resulta contradictorio. Por consiguiente, $\{\lambda_n\}$ es acotada y debe tener una subsucesión convergente $\{\lambda_{n_i}\}_{i \geq 1}$ a algún λ . Como

$$z_n = x_n + \lambda_n y$$

se sigue que $\{z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\lambda_n y\}_{n \geq 1}$ son sucesiones de Cauchy al igual que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ y converge a algún punto $x \in E$. Por lo tanto, $z = x + \lambda y$ y $E \dot{+} \text{span} \{y\}$ contiene a z , es decir, es cerrado. \square

El siguiente resultado se sigue de lema anterior aplicando inducción.

COROLARIO 1.5.2. *Cualquier subespacio que es generado por un número finito de vectores es cerrado.*

Pongamos $a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$ y $b_i = \langle x, v_i \rangle$. Si x_0 es la proyección ortogonal de x sobre $\{v_j\}_{j=1}^k$ l.i., entonces

$$(14) \quad x_0 = \sum_{j=1}^k c_j v_j$$

es el elemento minimizador. Debemos tener que

$$(15) \quad \langle x - x_0, v_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

lo cual nos lleva al siguiente sistema

$$(16) \quad b_i = \langle x, v_i \rangle = \langle x_0, v_i \rangle = \sum_{j=1}^k a_{ij} c_j, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Sabemos que x_0 existe y es único, entonces el determinante de a_{ij} es diferente de cero y las c_j 's se pueden calcular de (16). Ahora, si δ el mínimo valor de $\|x - \sum_{j=1}^k c_j v_j\|$. Entonces por (14) se tiene $\langle x - x_0, x_0 \rangle$. Así,

$$(17) \quad \delta^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \langle x, x - x_0 \rangle = \left\langle x, x - \sum_{j=1}^k c_j v_j \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k c_j b_j.$$

Esto resuelve el problema en términos de a_{ij} y b_i .

Consideremos ahora un caso especial: reemplacemos $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ por un subconjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Entonces $a_{ij} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) y de (16) se obtiene $c_{ij} = b_{ij}$. Además, (17) implica que

$$\delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k |b_j|^2$$

Con lo anterior hemos probado lo siguiente.

TEOREMA 1.5.3. *Sea $\{u_j\}_{j=1}^k \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal y $x \in \mathcal{H}$. Entonces*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k \langle u_j, x \rangle u_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j \right\|,$$

para todos los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. La igualdad se cumple si y solo si $\lambda_j = \langle u_j, x \rangle$, para $j = 1, 2, \dots, k$. El vector

$$\sum_{j=1}^k \langle u_j, x \rangle u_j$$

es la proyección ortogonal de x en el subespacio $\text{span}\{u_n\}_{n=1}^k$. Si δ es la distancia de x a este subespacio, entonces:

$$(18) \quad \sum_{j=1}^k |\langle u_j, x \rangle|^2 = \|x\|^2 - \delta^2.$$

Lo siguiente se conoce como la **desigualdad de Bessel** y es consecuencia del teorema anterior.

COROLARIO 1.5.4. *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto ortonormal en \mathcal{H} y $x \in \mathcal{H}$. Si $\hat{x}(\alpha) = \langle u_\alpha, x \rangle$ entonces*

$$(19) \quad \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Como A es cualquier conjunto de índices (posiblemente no numerable), la suma en el lado izquierdo de (19) debe definirse de una manera apropiada. En general, para $0 \leq \varphi(\alpha) \leq \infty$, con $\alpha \in A$, donde el símbolo

$$(20) \quad \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$$

denota el supremo del conjunto de todas las sumas $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_k)$, con elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, diferentes de A , se tiene que (19) es consecuencia directa de (18).

Obsérvese que (20) es la integral de Lebesgue de φ con respecto a la medida de conteo en A . Sea $\ell_2(A) = L_2(A)$ con respecto a esta medida de conteo, entonces (19) asegura que $\hat{x} \in \ell_2(A)$ y

$$\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\|.$$

Lo siguiente es una consecuencia sencilla de (19).

TEOREMA 1.5.5. *Para $x \in \mathcal{H}$ y $\{u_\alpha\} \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal, el conjunto de todos los índices α tales que $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ es a lo más contable.*

Demostración. Sea $\Lambda = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|\hat{x}\|^2 < \infty$, debido a que $\|\hat{x}\|^2 < \|x\|^2$, y considere $J = \{\alpha \in A : \hat{x}(\alpha) \neq 0\}$. El siguiente subconjunto de A

$$J_n = \left\{ \alpha \in A : |\hat{x}(\alpha)|^2 \in \left[\frac{\Lambda}{n+1}, \frac{\Lambda}{n} \right] \right\},$$

es finito para cada $n \in \mathbb{N}$, de lo contrario $\Lambda = \infty$. Además, $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ de donde se sigue que J es a lo más numerable.

Sea F la transformación que asigna a cada $x \in \mathcal{H}$, la función \hat{x} sobre A . Para cada $\alpha \in A$, $x \rightarrow \langle u_\alpha, x \rangle = \hat{x}(\alpha)$ es lineal. Más aún, F es una transformación lineal de \mathcal{H} en $\ell_2(A)$, ya que de (19), $\hat{x} \in \ell_2(A)$ y

$$\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 \leq \|x - y\|,$$

es decir, F es una contracción. En particular F es continua. \square

Veremos ahora que la completéz de \mathcal{H} implica que F actúa de \mathcal{H} sobre $\ell_2(A)$ y que es una isometría, i.e., $\|\hat{x}\|_2 = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

TEOREMA 1.5.6 (Teorema de Riesz-fisher). *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormal en \mathcal{H} y suponga que $\varphi \in \ell_2(A)$. Entonces $\varphi = \hat{x}$ para algún $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$, considere $A_n = \{\alpha : |\varphi(\alpha)| > 1/n\}$. Cada A_n es finito (de hecho, A_n tiene a lo más $n^2 \|\varphi\|_2^2$ elementos). Pongamos

$$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\hat{x}_n = \varphi \chi_{A_n}$, $\hat{x}_n(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha)$, para todo $\alpha \in A$ y $|\hat{x}_n|^2 \leq |\varphi|^2$. En virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue [17, Teo. 1.34], $\|\hat{x}_n\|_2 \rightarrow \|\varphi\|_2$. Por consiguiente, $\{\hat{x}_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de cauchy en $\ell_2(A)$ y como cada A_n es finito,

$$\|x_n - x_m\| = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_2,$$

i.e., $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy en \mathcal{H} y por la completéz, $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$. Por lo tanto,

$$\hat{x}(\alpha) = \langle u_\alpha, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_\alpha, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad \alpha \in A$$

lo cual completa la demostración. \square

El ingrediente crucial en la demostración del teorema 1.5.6 anterior es la completéz de L_2 . Este hecho es reconocido y frecuentemente se asigna el nombre **Teorema de Riesz-Fisher** al teorema que asegura la completéz de cualquier espacio L_p , $p \geq 1$, y en particular, a la del espacio L_2 .

Veamos en lo siguiente condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto ortonormal sea una base. Un conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es maximal si no existe un vector en \mathcal{H} que pueda adjuntarse a $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, de manera que el conjunto resultante también sea ortonormal.

Un conjunto ortonormal maximal se llama frecuentemente un **conjunto ortonormal completo** o **base ortonormal**.

TEOREMA 1.5.7. *Para un conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{H}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- El conjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es maximal en \mathcal{H} .
- El subespacio $\mathcal{S} = \text{span} \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es denso en \mathcal{H} .
- Para cada $x \in \mathcal{H}$, tenemos

$$(1) \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

- Si $x, y \in \mathcal{H}$, entonces $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \overline{\hat{x}(\alpha)} \hat{y}(\alpha)$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Si $\overline{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}$ entonces existe un elemento no nulo en \mathcal{S}^\perp , lo que implica que $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no es maximal.

(b) \Rightarrow (c): Sea $x \in \mathcal{H}$, $\epsilon > 0$ fijos. Como \mathcal{S} es denso, existe un conjunto finito $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_n}$ y escalares tales que la combinación lineal de estos, digamos z , dista de x en menos que ϵ , en símbolos

$$z = \hat{x}(\alpha_1) + \dots + u_{\alpha_1} \hat{x}(\alpha_n) u_{\alpha_n},$$

de donde $\|x - z\| < \epsilon$. Entonces $\|x\| < \|z\| + \epsilon$ y

$$(22) \quad (\|x\| - \epsilon)^2 < \|z\|^2 = |\hat{x}(\alpha_1)|^2 + \dots + |\hat{x}(\alpha_n)|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, (21) se sigue de (22) y la desigualdad de Bessel (19). Note que (21) también puede escribirse en la forma $\langle x, x \rangle = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle$, con los productos internos en \mathcal{H} y $\ell_2(A)$, respectivamente.

(c) \Rightarrow (d): Sean $x, y \in \mathcal{H}$ fijos y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle \hat{x} + \lambda \hat{y}, \hat{x} + \lambda \hat{y} \rangle.$$

Luego, $\lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle = \lambda \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle + \bar{\lambda} \langle \hat{y}, \hat{x} \rangle$ y haciendo $\lambda = 1, i$, se tiene que

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} \langle x, y \rangle = \operatorname{Im} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle.$$

(d) \Rightarrow (a): Si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no es maximal, entonces existe $u \in \mathcal{H}$ de norma uno, tal que $\hat{u}(\alpha) = \langle u_\alpha, u \rangle = 0$. Así, $1 = \|u\|^2 = \|\hat{u}\|_2^2 = 0$, que resulta contradictorio. \square

Ejemplo 1.5.I. En el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ (de sucesiones cuadrado sumables), al conjunto $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots)$$

se le conoce como la **base canónica** de $\ell_2(\mathbb{N})$ y es en efecto, una base ortonormal. Ciertamente, como $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$, se tiene que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal. Además, para $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$, considere

$$z^{(N)} = (z_1, z_2, \dots, z_N, 0, \dots) = \sum_{j=1}^N z_j e_j \in \operatorname{span} \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

De esta manera, para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|z - z^{(N)}\|_2 = \|(0, \dots, z_{N+1}, z_{N+2}, \dots)\| = \sum_{j>N} |z_j|^2 < \epsilon,$$

ya que $z \in \ell_2(\mathbb{N})$. Así, $z \in \overline{\operatorname{span} \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}}$ y, por lo tanto, del teorema 1.5.7 se tiene que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es base ortonormal.

Dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ son isomorfos si existe una transformación lineal Λ uno-a-uno de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 que preserva $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$, con $x, y \in \mathcal{H}_1$. Al operador Λ se le conoce como un **isomorfismo entre espacios de Hilbert**.

COROLARIO 1.5.8. *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{H}$ ortonormal maximal. Si $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$ entonces la transformación $x \mapsto \hat{x}$ es un isomorfismo entre \mathcal{H} y $\ell_2(A)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que la transformación es biyectiva. Para cualquier $\alpha \in A$, si $\hat{x} = \hat{y}$, entonces $\langle x, u_\alpha \rangle = \langle y, u_\alpha \rangle$ lo que implica que $\langle x - y, u_\alpha \rangle = 0$. Por lo tanto, $x - y = 0$. La transformación es suprayectiva, debido al teorema 1.5.6. \square

1.6. Existencia de bases ortonormales. En esta sección mostraremos que cada espacio de Hilbert no trivial (que no consista solo del vector cero) es isomorfo a algún $\ell_2(A)$, lo que implica que cada espacio de esta clase tiene una base ortonormal. La prueba requiere de una propiedad de los conjuntos que son parcialmente ordenados.

Un conjunto P es **parcialmente ordenado** por una relación binaria \leq si:

- (a) $a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$.
- (b) $a \leq a$ para cada $a \in P$.
- (c) $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$.

Un subconjunto Q de un conjunto parcialmente ordenado P se llama **totalmente ordenado** (o **linealmente ordenado**) si cada par $a, b \in Q$ satisface $a \leq b$ o $b \leq a$.

Ejemplo 1.6.I. La colección de subconjuntos de un conjunto fijo X está parcialmente ordenado por la relación de contención.

Un subconjunto totalmente ordenado Q de P se dice ser **maximal** si no existe un elemento de P que pueda adjuntarse a Q de manera que la colección resultante sea totalmente ordenada.

Ejemplo 1.6.II. Sea P subconjuntos abiertos del plano, Q los discos circulares abiertos con centro en el origen. Q es totalmente ordenado y maximal en P .

TEOREMA 1.6.1 (Maximalidad de Hausdorff). *Cada conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal.*

El teorema anterior es equivalente al axioma de selección, por lo que no lo demostraremos en este trabajo.

TEOREMA 1.6.2. *Cada conjunto ortonormal B en un espacio de Hilbert \mathcal{H} está contenido en un conjunto ortonormal maximal en \mathcal{H} .*

Demostración. Sea P la colección de todos los conjuntos ortonormales en \mathcal{H} que contienen a B . Ordéñese P parcialmente por inclusión. Como $B \in P$, $P \neq \emptyset$. Consecuentemente, P contiene una subcolección Ω totalmente ordenada y maximal. Sea \mathcal{S} la unión de todos los miembros de Ω . Es claro que $B \subset \mathcal{S}$. Afirmamos que \mathcal{S} es un conjunto ortonormal maximal.

En efecto, si $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ entonces $u_1 \in A_1$ y $u_2 \in A_2$, para algunos $A_1, A_2 \in \Omega$. Como Ω es totalmente ordenado, $A_1 \subset A_2$ (o $A_2 \subset A_1$) de manera que $u_1, u_2 \in A_2$. Como A_2 es un subconjunto ortonormal que contiene a B , $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ si $u_1 \neq u_2$ y $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$ si $u_1 = u_2$. Por lo tanto, \mathcal{S} es ortonormal.

Si \mathcal{S} no es maximal, entonces \mathcal{S} es subconjunto propio de un conjunto ortonormal \mathcal{S}^* . Claramente $\mathcal{S}^* \not\subset \Omega$ y \mathcal{S}^* contiene cada elemento de Ω . Con esto que podemos adjuntar \mathcal{S}^* a Ω y obtener una clase totalmente ordenada. Contradiciendo la maximalidad de Ω . \square

Todo espacio de Hilbert no vacío contienen un conjunto ortonormal. El teorema anterior implica de manera simple lo siguiente.

COROLARIO 1.6.3. *Todo espacio de Hilbert no trivial tiene una base ortonormal.*

1.7. El sistema trigonométrico. Abordamos en esta sección un ejemplo especial de bases ortonormales en espacios de Hilbert. Trabajaremos con las funciones de los reales a los complejos, que son medibles y de periodo 2π . Consideremos el intervalo real $\mathcal{A} = [0, 2\pi]$ y el espacio

$$L_2 \left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx \right) = \left\{ f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Uno calcula de manera simple que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, considere los polinomios trigonométricos dados por

$$(23) \quad p_n(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

Usando las fórmulas de Euler y $e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$, podemos reescribir (23) como

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt}.$$

Además, uno tiene que

$$\langle e^{ijt}, e^{ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} e^{-ijt} e^{ikt} dt = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}$$

es decir, $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $L_2(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx)$. Para ver que este sistema resulta ser una base, del teorema 1.5.7, basta demostrar que los polinomios (23) son densos en $L_2(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx)$.

Dado $f \in L_2(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx)$ y $\varepsilon > 0$, debemos mostrar que existe un polinomio trigonométrico $p_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt}$ tal que $\|p_n - f\|_2 < \varepsilon$. Para ello, usamos el hecho de que el espacio $C_1(\mathcal{A})$ es denso en $L_2(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx)$. De manera que podemos suponer $f \in C_1(\mathcal{A})$, con norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathcal{A}} |f(t)| < \infty$. Además, para toda $f \in C_1(\mathcal{A})$ se cumple lo siguiente:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|^2 \int_0^{2\pi} dt = \|f\|_\infty^2.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2,$$

por lo que bastaría demostrar que $\|p - f\|_\infty < \varepsilon$.

Construimos una sucesión de polinomios trigonométricos q_1, q_2, \dots , donde

$$(24) \quad q_k(t) = c_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^k = c_k \left(\sin \frac{t}{2} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

tales que los coeficientes c_k satisfagan

$$(25) \quad q_k \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} q_k = 1.$$

Así, de (24) y (25), los coeficientes c_k son de la forma

$$c_k = 2\pi \left(\int_{\mathcal{A}} \sin^k \frac{t}{2} dt \right)^{-1}.$$

Sobre el intervalo $[0, \pi]$, utilizando el hecho de que la función $\sin \frac{t}{2}$ es decreciente en este intervalo, la paridad del $\cos t$ y de las ecuaciones (24) y (25), tenemos que

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_k(t) dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_k \sin t dt \quad (\text{pues } 1 \geq \sin t, \quad \forall t \in [0, \pi]) \\
 (26) \quad &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^k \sin t dt = \frac{-2c_k}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^{k+1}}{k+1} \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2c_k}{\pi(k+1)}.
 \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t$ es monótona decreciente en $[0, \pi]$, entonces $q_k(t) \leq q_k(\delta)$ para toda δ tal que $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$ (si esto no queda claro se pide al lector revisar la gráfica de esta función en el intervalo de $[-\pi, \pi]$). Si definimos a $\eta_k(\delta)$ como

$$(27) \quad \eta_k(\delta) = \sup \{ q_k(t) : 0 < \delta \leq |t| \leq \pi \}.$$

Además, para toda ε mayor que cero tenemos que

$$\eta_k(\delta) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{\infty}},$$

si $k \gg 1$, con δ mayor que cero, esto gracias a la ecuación (26), pues se tiene que

$$c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}.$$

Entonces, para $0 < \delta < \pi$,

$$q_k(t) \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \delta \right)^k,$$

que haciendo r igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t$ tenemos que $r < 1$ y

$$\frac{\pi}{2} (k+1) r^k \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $q_k(t)$ converge uniformemente a cero en $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$, es decir, converge uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

Ahora, para cada $f \in C_1(\mathbb{R})$, definamos

$$(28) \quad p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) q_k(s) ds.$$

Haciendo un primer cambio de variable $s \rightarrow -s$, tenemos:

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) q_k(s) ds,$$

pues $q_k(-s) = q_k(s)$ para toda s en $[-\pi, \pi]$. Haciendo nuevamente otro cambio de variable con $s = u - t$ y despejando u tenemos que $u = s + t$, así $du = ds$ por lo que p_k se ve de la forma (cuidado con los límites)

$$\begin{aligned}
 p_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u) q_k(u-t) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) q_k(u-t) du \quad (\text{cambiando otra vez de variable}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) q_k(s-t) ds.
 \end{aligned}$$

Se deja al lector la justificación de la segunda igualdad que incide en el siguiente ejercicio (*Tarea*): *Demostrar que para h de periodo 2π ,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} h(t) dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ahora como f es continua en $[-\pi, \pi]$ entonces es uniformemente continua, i.e., para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(t) - f(t')| < \varepsilon/2$ si $|t - t'| < \delta$. Ahora calculemos

$$\|p_k(t) - f(t)\|_{\infty} = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |p_k(t) - f(t)|, \text{ pero}$$

$$\begin{aligned} |p_k(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) q_k(s) ds - f(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) q_k(s) ds - \frac{1}{2\pi} f(t) \int_{-\pi}^{\pi} q_k(s) ds \right|. \end{aligned}$$

En virtud de (25), la igualdad anterior implica

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) q_k(s) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| q_k(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|s| < \delta} |f(t-s) - f(t)| q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| q_k(s) ds \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| q_k(s) ds, \end{aligned}$$

donde se usó la continuidad uniforme de f . Para el segundo sumando es necesario trabajar usando (27). Continuando el desarrollo

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \eta_k(\delta) \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t-s) - f(t)| ds \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \eta_k(\delta) \|f\|_{\infty} < \varepsilon, \end{aligned}$$

en donde la penúltima desigualdad se obtuvo de (25) y usando propiedades del valor absoluto, la norma de f y la definición de $\eta_k(\delta)$. Por lo tanto hemos demostrado que el sistema trigonométrico $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es denso en $L_2(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi} dx)$.

Problemas de la sección.

P.1.1 Muestre la identidad del paralelogramo (5)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

P.1.2 Muestre que la identidad del paralelogramo implica la identidad de Apolonio

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{1}{2}(x + y) \right\|^2, \quad x, y, z \in \mathcal{H}.$$

P.1.3 Muestre que un subespacio de un de un espacio métrico que consiste en un número finito de puntos siempre es completo.

P.1.4 Si consideramos sobre $X = \mathbb{Q}$ la métrica $d(x, y) = |x - y|$, calcule la completación de X con respecto a esta métrica.

P.1.5 Muestre que si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces (X, \bar{d}) es también completo, donde $\bar{d} = \frac{d}{1+d}$.

P.1.6 Construya ejemplos que muestren que si Y y Z son subespacios de un espacio vectorial X , $Y \cap Z$ es un subespacio de X pero $Y \cup Z$ podría no serlo.

P.1.7 Muestre que en un espacio de Hilbert

$$y \perp x_n, \quad x_n \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad x \perp y.$$

P.1.8 Muestre que en un espacio con producto interno

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + \alpha y\| \geq \|x\| \quad \text{para todo escalar } \alpha.$$

P.1.9 Muestre que el funcional definido en $C[a, b]$ por

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)dt, \quad y_0 \in C[a, b]$$

es lineal y acotado.

P.1.10 Encuentre la norma del funcional lineal definido en $C[-1, 1]$ por

$$g(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt.$$

P.1.11 Muestre que si $f \neq 0$ y $g \neq 0$ son dos funcionales definidos en el mismo espacio vectorial y tienen el mismo espacio nulo entonces son proporcionales.

2. CLASES ESPECIALES DE OPERADORES

Esta sección está dedicada principalmente a los operadores de clases de traza y de Hilbert-Schmidt, los cuales son subclases de operadores compactos.

2.1. Operadores de rango finito y compactos.

Definición 2.1.1. Si E es un espacio normado decimos que un conjunto $A \subset E$ es **precompacto** en E (o relativamente compacto), cuando \bar{A} (la clausura de A) es un conjunto compacto, i.e., un conjunto es precompacto si su cerradura es compacta.

Definición 2.1.2. Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es **compacto** (o completamente continuo) si manda conjuntos acotados de X en conjuntos precompactos de Y , i.e., T es compacto si y solo si TA es precompacto para todo $A \subset X$ con A acotado.

Ejemplo 2.1.1. Sea $\mathcal{C}([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas con dominio $[a, b]$ y valores en un campo \mathbb{K} . Recordemos que este espacio es de Banach con la norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Sea $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una medida y $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ una función continua. Definimos lo siguiente.

$$A \star K : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

$$(A \star Kf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)d\mu(y).$$

Se puede mostrar que $A \star K$ es un operador lineal continuo y compacto. Esto último usando el conocido Teorema de Ascoli cuya demostración se puede encontrar en [18, Ap. A].

TEOREMA 2.1.3 (Teorema de Ascoli). Para que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a, b])$ sea relativamente compacto en $\mathcal{C}([a, b])$ es necesario y suficiente que:

1. \mathcal{F} sea puntualmente acotada, i.e., $\forall \xi \in [a, b], \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(\xi)| < \infty$.
2. \mathcal{F} sea equicontinua, i.e., $\forall \xi \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b] \cap [\xi - \delta, \xi + \delta], \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

PROPOSICIÓN 2.1.4. Para X, Y espacios normados, los siguientes son equivalentes:

- (a) $T : X \rightarrow Y$ es un operador compacto.
- (b) TA es precompacto, para todo $A \subset X$ acotado.
- (c) TB_1 es precompacto, en donde B_1 es la bola unitaria en X .
- (d) Cada sucesión acotada $\{x_n\}$ de elementos de X tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ converge en Y .

Demostración. Es suficiente demostrar las implicaciones (a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a):

(a) \Rightarrow (d): En X , sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada por M . Entonces la sucesión $\{\frac{x_n}{M}\}$ de elementos de B_1 tiene una subsucesión tal que $\{\frac{Tx_{n_k}}{M}\}$ converge, digamos que a $y \in Y$, es claro que Tx_{n_k} converge a $(M + 1)y$.

(d) \Rightarrow (a): Se usará el siguiente resultado de la cual se omitirá su demostración: *En un espacio métrico E , si $K \subset E$ tiene la propiedad de que cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge en E , entonces \overline{K} es un subconjunto compacto de E .*

Ahora bien, sea A un subconjunto acotado en X . Veamos que \overline{TA} es compacto, para lo cual sea $\{y_n\}$ una sucesión en TA , es decir, $y_n = Tx_n$ para alguna sucesión $\{x_n\}$ en A . Por hipótesis, podemos extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ con $\{Tx_{n_k}\}$ convergente en Y , y por el resultado mencionado concluimos que \overline{TA} es compacto. \square

Ejemplo 2.1.II. Si $T: X \rightarrow Y$ es un operador continuo y lineal de rango finito (i.e., su imagen o rango es de dimensión finita), entonces T es un operador compacto. En efecto, de la proposición 2.1.4.(d) y el teorema de Bolzano-Weierstrass [15, Teo. 6.21], para una sucesión acotada $\{x_n\}$ en X se tiene $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$, es decir, $\{Tx_n\}$ es acotada en su imagen TX . Por hipótesis es un espacio isométrico a \mathbb{K}^m donde m es su dimensión como espacio vectorial. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos permite concluir que $\{Tx_{n_k}\}$ converge para alguna subsucesión de $\{x_n\}$.

Ejemplo 2.1.III. Todo operador lineal $T: X \rightarrow Y$ compacto es un operador continuo. Ciertamente, la imagen $\overline{TB_1}$ de la bola unitaria abierta B_1 es un conjunto compacto y por lo tanto existe $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq M$ para todo $x \in B_1$.

Ejemplo 2.1.IV. Sea X un espacio normado. El operador identidad $I: X \rightarrow X$ tal que $I(x) = x$ para todo $x \in X$ es compacto si y sólo si X como espacio vectorial tiene dimensión finita. Esto es consecuencia inmediata del siguiente resultado cuya investigación y estudio dejamos a cargo del lector: *La bola unitaria cerrada es compacta en un espacio normado si y sólo si el espacio tiene dimensión finita.*

LEMA 2.1.5 (Lema de Riesz). *Sea E un espacio normado; si $S \subsetneq E$ es subespacio cerrado, entonces para cualquier $0 < \varepsilon < 1$, existe $x_\varepsilon \in E \setminus S$ tal que $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $\|s - x_\varepsilon\| > \varepsilon$ para todo $s \in S$.*

Demostración. Para $x \in E \setminus S$ fijo sea $r = d(x, S) = \inf\{d(x, s) : s \in S\}$. Como S es cerrado entonces $r > 0$ y se sigue que $r < r_\varepsilon$. Por las propiedades del ínfimo, podemos encontrar $b \in S$ tal que $\|x - b\| < r_\varepsilon$. Definimos x_ε como

$$x_\varepsilon = \frac{x - b}{\|x - b\|}.$$

De esta manera, $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $x_\varepsilon \in E \setminus S$, pues S es subespacio de E . Finalmente, para $s \in S$ tenemos que

$$\|s - x_\varepsilon\| = \left\| s - \frac{x - b}{\|x - b\|} \right\| = \frac{1}{\|x - b\|} \left\| \|x - b\|s + b - x \right\| \geq \frac{r}{\|x - b\|}.$$

Concluimos que $\|s - x_\varepsilon\| > \varepsilon$ por como se escogió a b . \square

Definición 2.1.6. El **conjunto dual** de un espacio vectorial X viene dado por

$$X^* := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Con la norma de operadores lineales, $(X^*, \|\cdot\|_*)$ es un espacio de Banach. Además, de manera similar podemos definir al dual de X^* como

$$X^{**} := \{f: X^* \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Definición 2.1.7. Dada una sucesión $\{x_n\}$ en X decimos que $\{x_n\}$ **converge débilmente** a x si y solo si $\{\Lambda x_n\}$ converge a Λx , para todo operador lineal y continuo Λ . En símbolos,

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \Leftrightarrow \Lambda x_n \rightarrow \Lambda x, \quad \forall \Lambda \in X^*.$$

Definición 2.1.8. Sean X, Y espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. El **operador adjunto** de T se define como

$$T^*: Y^* \rightarrow X^*$$

$$(T^*f)(x) = f(Tx), \quad f \in Y^*, \quad x \in X.$$

Es decir, a cada $f \in Y^*$ se le asocia $T^*f \in X^*$,

$$f \rightarrow T^*f, \quad \text{donde } f: Y \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad T^*f: X \rightarrow \mathbb{C}.$$

PROPOSICIÓN 2.1.9. La aplicación $\hat{\cdot}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{**}$ satisface

$$\|\hat{x}\|_{**} = \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Demostración. La primera desigualdad se sigue de la definición de la norma $\|\cdot\|_{**}$, pues si $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\|\hat{x}\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |\hat{x}(f)| = \sup_{\|f\|_* = 1} |f(x)| \leq \|f\|_* \|x\| = \|x\|.$$

Por el teorema de representación de Riesz [14, Sec. 3.8] tenemos que para $x \in \mathcal{H}$ la aplicación $g(z) = \langle z, x \rangle$ es un operador lineal y continuo que satisface $\|g\|_* = \|x\|$. Defina al operador \tilde{g} como

$$\tilde{g}(z) = \frac{g(z)}{\|x\|}$$

de donde se sigue que $\|\tilde{g}\|_* = 1$ y como consecuencia

$$\|\hat{x}\|_{**} = \sup_{\|f\|_* = 1} |f(x)| \geq |\tilde{g}(x)| = \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|} = \|x\|.$$

Como se quería. □

En otras palabras, la aplicación de la proposición 2.1.9 es una isometría.

PROPOSICIÓN 2.1.10. Si una sucesión $\{x_n\}$ en \mathcal{H} converge débilmente, entonces se cumplen lo siguiente:

- (a) El límite es único.
- (b) $\{x_n\}$ está acotada.

Demostración. (a): Supongamos que $\{x_n\}$ tiene dos límites en \mathcal{H} , digamos x y y . De la definición 2.1.7 tenemos que

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \Leftrightarrow \Lambda x_n \rightarrow \Lambda x, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{H}^*,$$

similarmente para y . Como $\{\Lambda x_n\}$ es una sucesión convergente en \mathbb{C} , su límite es único y entonces $\Lambda(x - y) = 0$, para todo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$. Llamemos $z = x - y$. Si $z \neq 0$, por el teorema de representación de Riesz tenemos que existe $\Lambda_z \in \mathcal{H}^*$ tal que $\Lambda_z(w) = \langle z, w \rangle$, de donde se sigue que

$$0 = \Lambda_z(x - y) = \langle z, z \rangle = \|z\|^2 > 0.$$

(b): Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\hat{x}_n(f) = \Lambda(x_n)$ (véase proposición 2.1.9). Como $\{\Lambda x_n\}$ converge en \mathbb{C} , entonces está acotada para cada $\Lambda \in \mathcal{H}^*$. Es decir, para todo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$,

$$|\Lambda(x_n)| \leq M_\Lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad M_\Lambda \in \mathbb{R}.$$

Del principio de acotación uniforme y de la proposición 2.1.9,

$$\|x_n\| = \|\hat{x}_n\|_{**} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se sigue la conclusión. □

Los puntos claves de la demostración anterior son: el teorema de representación de Riesz y principio de acotación uniforme [14, Sec. 3.8 y 4.7].

TEOREMA 2.1.11. Para un operador compacto entre dos espacios de Hilbert $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, se cumple lo siguiente: para toda sucesión $\{x_n\}$ de \mathcal{H}_1 débilmente convergente, la sucesión $\{Tx_n\}$ converge en norma.

Demostración. Vemos que para todo $\Lambda \in \mathcal{H}_2^*$ la diferencia

$$\Lambda Tx_n - \Lambda Tx = T^* \Lambda x_n - T^* \Lambda x$$

tiende a cero por la convergencia débil de $\{x_n\}$, ya que es fácil ver que el operador $T^* \Lambda$ está en \mathcal{H}_1^* y por consiguiente $Tx_n \xrightarrow{\omega} Tx$.

Supongamos que $Tx_n \rightarrow Tx$ es falso. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y $\{Tx_{n_k}\}$ subsucesión tal que $\|Tx_{n_k} - Tx\| > \varepsilon$. Como $\{x_n\}$ es acotada y T compacto existe una subsucesión S de $\{Tx_{n_k}\}$ convergente en \mathcal{H}_2 , digamos a $y \in \mathcal{H}_2$. La desigualdad anterior implica que $y \neq Tx$. Por último, la convergencia de S implica convergencia débil por las siguientes desigualdades:

$$\|\Lambda S - \Lambda y\| = \|\Lambda S - y\| \leq \|\Lambda\|_* \|S - y\|, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{H}_2^*,$$

De este modo, S converge débilmente a y y a Tx con $y \neq Tx$ lo cual es absurdo por proposición 2.1.10. \square

En el siguiente resultado veremos algunas propiedades de operadores acotados.

TEOREMA 2.1.12. *Para un operador acotado entre espacios de Hilbert $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, se cumple lo siguiente:*

- (a) *Si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores compactos y $T_n \rightarrow T$, con la topología inducida por la norma de operadores, entonces T es compacto.*
- (b) *El operador T es compacto si y solo si T^* es compacto.*
- (c) *El producto de un operador compacto y un operador acotado es compacto.*

Demostración. (a): Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en \mathcal{H}_1 por $M > 0$. Como T_1 es compacto, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n,1}\}$, tal que $\{T_1 x_{n,1}\}$ converge en \mathcal{H}_2 . Así, $\{T_1 x_{n,1}\}$ es de Cauchy. Como $\{x_{n,1}\}$ es acotada, utilizando nuevamente la proposición 2.1.4, existe una subsucesión de $\{x_{n,1}\}$, digamos $\{x_{n,2}\}$, tal que $\{T_2 x_{n,2}\}$ converge y es de Cauchy. Construimos de la misma forma las sucesiones subsecuentes.

Tenemos que $\{z_n = x_{n,n}\}$ es subsucesión de la sucesión original. Si fijamos $r \in \mathbb{N}$, cuando $n \geq r$, se tiene que $\{z_n\}$ es subsucesión de $\{x_{n,r}\}$ y $\{T_r x_{n,n}\}$ es de Cauchy, ya que es subsucesión de $\{T_r x_{n,r}\}$, la cual es de Cauchy, es decir, para toda $r \in \mathbb{N}$,

$$\{T_r x_{n,n}\}, \quad \text{es de Cauchy, si } n \geq r.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y como T_n converge a T , existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_1$, entonces $\|T_n - T\|_* < \varepsilon/3M$. Si $r = N_1$, entonces $\|T_r - T\|_* < \varepsilon/3M$. Para esta r existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_r z_n - T_r z_m\| < \varepsilon/3$ si $n, m \geq N$, pues $\{T_r z_n\}$ es de Cauchy. Verifiquemos que $\{T z_n\}$ es de Cauchy; si $n, m \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} \|T z_n - T z_m\| &= \|T z_n - T_r z_n + T_r z_n - T_r z_m + T_r z_m - T z_m\| \\ &\leq \|T z_n - T_r z_n\| + \|T_r z_n - T_r z_m\| + \|T_r z_m - T z_m\| \\ &\leq \|T - T_r\|_* \|z_n\| + \|T_r z_n - T_r z_m\| + \|T_r - T\|_* \|z_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3M} M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como \mathcal{H}_2 es completo, $\{T z_n\}$ converge y tiene una subsucesión convergente acotada, pues es subsucesión a la vez de $\{T x_n\}$. Por lo tanto, de la proposición 2.1.4, se concluye que T es compacto.

(b): Si T es compacto, entonces $\overline{TB_1}$ es un conjunto compacto, donde B_1 es la bola unitaria abierta de \mathcal{H}_1 . Tomemos una sucesión $\{y_n^*\}$ de B_2^* , la bola unitaria abierta de \mathcal{H}_2^* . Mostraremos que existe $\{y_{n_k}^*\}$ tal que $\{T^* y_{n_k}^*\}$ converge en \mathcal{H}_1^* .

Para Φ la familia de cada funcional $y_n^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ restringida a $\overline{TB_1}$, tenemos que:

1. Como $\{y_n^*\} \subset B_2^*$ entonces $\|y_n^*\|_* \leq 1$, para todo $y_n^* \in \Phi$, i.e., Φ es una familia equiacotada.
2. Para $y, y' \in \overline{TB_1}$ tenemos que:

$$|y_n^*(y) - y_n^*(y')| = |y_n^*(y - y')| \leq \|y_n^*\|_* \|y - y'\| < \|y - y'\|, \quad \forall y, y' \in \overline{TB_1}, \quad y_n^* \in \Phi$$

i.e., Φ es una familia equicontinua.

Por el teorema de Ascoli, existe una subsucesión $\{y_{n_k}^*\}$ que converge uniformemente en $\overline{TB_1}$. Para $\varepsilon > 0$ y $k, l \geq N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T^*y_{n_k}^* - T^*y_{n_l}^*\| &= \sup_{x \in B_1} |(T^*y_{n_k}^* - T^*y_{n_l}^*)x| = \sup_{x \in B_1} |T^*y_{n_k}x - T^*y_{n_l}x| \\ &= \sup_{x \in B_1} |y_{n_k}^*Tx - y_{n_l}^*Tx| = \sup_{y \in TB_1} |y_{n_k}^*y - y_{n_l}^*y| \\ &\leq \sup_{y \in \overline{TB_1}} |y_{n_k}^*y - y_{n_l}^*y| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de $\{y_{n_k}^*\}$ se sigue que $\{T^*y_{n_k}^*\}$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge, es decir, T^* es compacto.

Recíprocamente, consideremos las inclusiones canónicas i, j (véase la proposición 2.1.9), dadas por

$$\begin{aligned} i: \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_2^{**} & i(x): \mathcal{H}_1^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto i(x) & f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j: \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_2^{**} & j(y): \mathcal{H}_2^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto j(y) & g &\longmapsto g(y) \end{aligned}$$

Donde $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, $f \in \mathcal{H}_1^*$ y $g \in \mathcal{H}_2^*$. Note que para $\Lambda \in \mathcal{H}_2^*$ se cumple:

$$[T^{**}i(x)](\Lambda) = i(x)[T^*\Lambda] = [T^*\Lambda](x) = \Lambda(Tx) = [j(Tx)](\Lambda).$$

Afirmamos que

$$j[TB_1] = T^{**}i[B_1] \subset T^{**}[B_1^{**}].$$

Ciertamente, si $b \in T^{**}i[B_1]$ entonces, existe $x \in B_1$ tal que $b = i(x)$. Por la proposición 2.1.9, uno tiene que $b \in B^{**}$ de donde $T^{**}b \in T^{**}B^{**}$.

Luego, como T^* es compacto, T^{**} también lo es, así $\overline{T^{**}B_1^{**}}$ es compacto. Es claro que $\overline{j[TB_1]}$ es compacto, de modo que $j[B_1]$ es precompacto. Mostremos que

$$\overline{TB_1} \subset \overline{jTB_1}.$$

Considerando $j(z) \in \overline{j[TB_1]}$, para algún $z \in j[TB_1]$. Existe $\{a_n\} \subset \overline{TB_1}$ convergente a w . La sucesión $\{j(a_n)\}$ está en $j[TB_1]$ y por la continuidad de j se tiene que $j(a_n) \rightarrow j(w)$ y $j(w) \in \overline{j[TB_1]}$. Por último, afirmamos que $\overline{TB_1}$ es compacto. En efecto, para $\{w_n\}$ una sucesión en $\overline{TB_1}$, tenemos que $\{j(w_n)\} \subset j[TB_1] \subset \overline{j[TB_1]}$. Como $\overline{j[TB_1]}$ es compacto, existe una subsucesión $\{j(w_{n_k})\}$ convergente en $\overline{j[TB_1]}$. De modo que $\{j(w_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy. Por la proposición 2.1.9, la sucesión $\{w_{n_k}\}$ es de Cauchy y converge en $\overline{TB_1}$, por ser este cerrado. Concluimos que T es un operador compacto.

(c): Para este punto analizamos los siguientes dos casos:

1. Si $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es compacto y $T: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ es acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en \mathcal{H}_1 . Entonces, por ser S compacto, existe una subsucesión convergente $\{Sx_{n_k}\}$ en \mathcal{H}_2 . Además, por ser T continuo (pues es acotado) entonces $\{TSx_{n_k}\}$ converge en \mathcal{H}_3 . Así, TS es compacto.
2. Si $S: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es acotado y $T: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ es compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en \mathcal{H}_1 . Como S es acotado tenemos que $\|Sx_n\| \leq \|S\|\|x_n\| < \infty$. Por ser T compacto, $\{TSx_{n_k}\}$ converge, siendo TS compacto.

Lo anterior concluye la demostración del punto (c). \square

El siguiente resultado es de gran utilidad en la secuela.

LEMA 2.1.13. Si \mathcal{H} es espacio de Hilbert separable, entonces cada base ortonormal para \mathcal{H} es a lo más numerable.

Demostración. Considera $\mathbb{B} = \{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} . Como

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \langle \varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta \rangle = \|\varphi_\alpha\|^2 - \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle - \langle \varphi_\beta, \varphi_\alpha \rangle + \|\varphi_\beta\|^2 = 2,$$

cada elemento de la familia de bolas abiertas $\{B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) : \varphi_\alpha \in \mathbb{B}\}$ contiene un solo elemento de \mathbb{B} por construcción. Por otro lado, como \mathcal{H} es separable, existe $S \subset \mathcal{H}$ numerable tal que $\overline{S} = \mathcal{H}$. Además, para cada φ_α se tiene $B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S \neq \emptyset$, escogemos $v_\alpha \in B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S$. Para ver que \mathbb{B} es numerable, consideramos la función $f: \mathbb{B} \rightarrow S$ tal que $\varphi_\alpha \rightarrow v_\alpha$. Afirmamos que f es inyectiva, pues si $v_\alpha = v_\beta$, entonces $v_\alpha, v_\beta \in B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S$, y por construcción $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. \square

En lo que resta del capítulo \mathcal{H} representará un espacio de Hilbert separable. Aunque algunas veces para enfatizar algún resultado volveremos a recordar esta hipótesis.

Observación 2.1.14. Del ejemplo 2.1.II, tenemos que un operador de rango finito siempre es compacto, y por el teorema 2.1.12, todo límite de compactos es compacto, de tal manera que el límite (en norma) de operadores de rango finito es compacto.

A continuación veremos que la afirmación recíproca de la observación 2.1.14 se cumple cuando se trata de un operador compacto en un espacio de Hilbert (separable). Esto es: *Los operadores de rango finito son densos en los operadores compactos.*

TEOREMA 2.1.15. *Todo operador compacto T en un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable, es límite en norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito.*

Demostración. Sea $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} y para $n \in \mathbb{N}$, defina el operador $T_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ como

$$T_n(x) = T \left[\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, x \rangle \varphi_j \right] = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, x \rangle T(\varphi_j),$$

los cuales son de rango finito. Mostremos que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Sea $x \in \mathcal{H}$, utilizando la base ortonormal escribimos $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_j, x \rangle \varphi_j$, luego

$$Tx - T_n x = T \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \varphi_j, x \rangle \varphi_j \right] = T\psi_n,$$

es decir,

$$Tx - T_n x = \psi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algún $\psi_n \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}^\perp$. Consideremos la sucesión $\{\lambda_n\}$, donde

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}^\perp \\ \|\psi\|=1}} \|T\psi\| = \|T - T_n\|$$

Es claro que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números reales no negativos, decreciente, acotada y por lo tanto, converge, digamos a λ . Para terminar demostraremos que $\lambda = 0$. Utilizando la desigualdad de Schwarz en el espacio l_2 calculamos que

$$\begin{aligned} |\langle h, \psi_n \rangle| &= \left| \left\langle h, \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \varphi_j, \psi_n \rangle \varphi_j \right\rangle \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n \rangle \langle h, \varphi_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n \rangle \langle h, \varphi_j \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\psi_n\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Tomando límite en ambos lados vemos que $|\langle h, \psi_n \rangle| \rightarrow 0$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, como T es compacto, entonces $\|T(\psi_n)\| \rightarrow 0$ por el teorema 2.1.11, lo que implica que $\lambda = 0$. \square

De ahora en adelante usaremos la notación de Dirac $|\varphi\rangle\langle\psi|$ para denotar al operador de rango uno $|\varphi\rangle\langle\psi|\eta = \langle\psi, \eta\rangle\varphi$. Por ejemplo, el operador T_n en la demostración anterior se escribe así:

$$T_n(x) = T \left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|x \right).$$

TEOREMA 2.1.16 (Teorema analítico de Fredholm). *Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{C} , si $f: \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una función analítica operador-valuada tal que $f(z)$ es un operador compacto para cada $z \in \Omega$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:*

- (a) $(I - f(z))^{-1}$ no existe para todo $z \in \Omega$.
 (b) $(I - f(z))^{-1}$ existe para todo $z \in \Omega - S$, donde

$$S = \{z \in \Omega : f(z)\zeta = \zeta, \text{ para algún } 0 \neq \zeta \in \mathcal{H}\},$$

tal que S no tiene puntos de acumulación en Ω .

Demostración. Por la conexidad es suficiente demostrar que $\forall z_0 \in \Omega$ existe un disco abierto centrado en Z_0 donde (a) o (b) se cumple. Por el teorema 2.1.15 existe un operador de rango finito F , tal que $\|F - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$ y por la continuidad, existe $r > 0$ tal que $\|f(z) - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$ cuando $z \in D_r(z_0) = \{z \in \Omega : |z - z_0| < r\}$, es decir, para $z \in D_r(z_0)$ se cumple $\|f(z) - F\| < 1$ lo cual garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - F)^n$ converge absolutamente a $(I - (f(z) - F))^{-1}$, que resulta un operador analítico. Como F tiene rango finito, existen vectores linealmente independientes $\{\psi_1, \dots, \psi_N\} \subset \mathcal{H}$ tales que $F(\varphi) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\varphi)\psi_j$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Cada $\alpha_j(\cdot)$ es funcional acotado en \mathcal{H} y el teorema de Riesz nos dá $\{\phi_1, \dots, \phi_N\} \subset \mathcal{H}$ tales que $F(\varphi) = \sum_{j=1}^N \langle\phi_j, \varphi\rangle\psi_j$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. A continuación, para cada $z \in D_r(z_0)$ y $1 \leq n \leq N$, definimos las funciones auxiliares

$$\Phi_n(z) = ((I - f(z) + F)^{-1})^* \phi_n, \quad g(z) = F(I - f(z) + F)^{-1}.$$

Al desarrollar $((I - f(z) + F)^{-1}x$ y $(I - g(z))(I - f(z) + F)$ obtenemos respectivamente,

$$g(z) = \sum_{j=1}^N \langle\Phi_n(z), \cdot\rangle\psi_j, \quad (I - f(z)) = (I - g(z))(I - f(z) + F).$$

Usando estas últimas dos igualdades y que $(I - f(z) + F)$ es invertible, concluimos que $I - f(z)$ y $I - g(z)$ son invertibles simultáneamente. Además, $\psi = f(z)\psi$ y $\varphi = g(z)\varphi$ tiene solución no trivial simultáneamente. Nos concentraremos en la forma de las soluciones de dicha ecuación. Si φ es solución, entonces

$$\varphi = g(z)\varphi = \sum_{n=1}^N \langle\Phi_n(z), \varphi\rangle\psi_n = \sum_{n=1}^N \beta_n\psi_n,$$

dónde $\beta_n = \sum_{n=1}^N \langle\Psi_n(z), \varphi\rangle$ y al usar la última expresión de φ obtenemos

$$\beta_n = \left\langle \Phi_n(z), \sum_{m=1}^N \beta_m\psi_m \right\rangle = \sum_{m=1}^N \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle,$$

es decir, obtenemos un sistema de ecuaciones, pues para $n = 1, \dots, N$, dados por

$$\beta_n = \sum_{m=1}^N \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle.$$

Recíprocamente, si la N -áda $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ es una solución del sistema, entonces $\varphi = \sum_{m=1}^N \beta_m\psi_m$, satisface $g(z)\varphi = \varphi$ de manera que resolver (no trivialmente) esta última ecuación equivale a resolver el sistema $N \times N$, dado por $\beta_n = \sum_{m=1}^N \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle$

o bien $\sum_{m=1}^N \beta_m (\delta_{nm} - \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle)$, el cual tiene solución no trivial si y solo si $d(z) = \det(\delta_{nm} - \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle) = 0$. Por la discusión anterior, son iguales los conjuntos

$$\{z \in D_r(z_0) : g(z)\psi = \psi, \text{ para algún } 0 \neq \psi \in \mathcal{H}\} \text{ y} \\ S_r = \{z \in D_r(z_0) \in \Omega : d(z) = 0\}.$$

Por otra parte, como $\langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle$, con $n, m \in \mathbb{N}$, y $d(z)$ son funciones analíticas, podemos utilizar el teorema de unicidad para concluir que S_r no tiene puntos de acumulación, o bien, $S_r = D_r(z_0)$. Para terminar veamos que $(I - g(z)) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es biyectivo para cada $z \in D_r(z_0) - S_r$. En efecto, es inyectivo debido a que $z \notin S_r$ y entonces la ecuación $(I - g(z))\varphi = 0$ solo tiene la solución $\varphi = 0$. Es sobreyectivo ya que si $\psi \in \mathcal{H}$, entonces el sistema $N \times N$, dado por

$$\beta_n - \langle \Phi_n(z), \psi \rangle = \sum_{m=1}^N \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m,$$

tiene como determinante a $d(z) \neq 0$. Así, el sistema tiene una solución $(\beta_1, \dots, \beta_N)$; se comprueba que el elemento $\varphi = \psi + \sum_{m=1}^N \beta_m \psi_m$ satisface $g(z)\varphi = \varphi - \psi$, lo que se ve simplemente desarrollando el lado izquierdo de la ecuación. \square

Observación 2.1.17. En el teorema 2.1.16.(b), $(I - f(z))^{-1}$ es meromorfa en $\Omega - S$ y se puede demostrar que los residuos en los polos son operadores de rango finito.

COROLARIO 2.1.18 (La alternativa de Fredholm). *Para todo operador compacto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el operador $(I - A)^{-1}$ existe o $A\psi = \psi$ tiene solución no trivial.*

Demostración. La función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(z) = zA$ es analítica y no cumple el teorema 2.1.16.(a), debido a que $(I - f(0))^{-1}$ existe. Entonces se cumple el teorema 2.1.16.(b), es decir, $(I - f(z))^{-1}$ existe $\forall z \in \mathbb{C} - S$, donde

$$S = \{z \in \mathbb{C} : f(z)\zeta = \zeta \text{ para algún } 0 \neq \zeta \in \mathcal{B}\}.$$

Se cumple que $1 \notin S$ o $1 \in S$, i.e., $(I - A)^{-1}$ existe o $f(1)\psi = \psi$ para algún $\psi \neq 0$. \square

TEOREMA 2.1.19 (Riesz-Schauder). *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador compacto, entonces $\sigma(A)$ es un conjunto sin puntos límites excepto, quizás, $\lambda = 0$. Más aún, todo $\lambda \in \sigma(A)$ distinto de cero, es un valor propio de A de multiplicidad finita, i.e., el correspondiente espacio de vectores propio tiene dimensión finita.*

Demostración. La función entera $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(z) = zA$ no cumple el teorema 2.1.16.(a), entonces cumple 2.1.16.(b), lo que significa que $(I - f(z))^{-1}$ existe para $z \in \mathbb{C} - S$, donde S es un conjunto sin puntos límites. Además, todo elemento a distinto de cero, $a \notin S$, y tenemos que

$$(I - aA)^{-1} = a^{-1}(a^{-1}I - A)^{-1}$$

existe y, por tanto, $a^{-1} \notin \sigma(A)$, es decir, $a \in S$. En consecuencia, $\sigma(A)$ no tiene puntos de acumulación excepto posiblemente $\lambda = 0$ y $\forall \lambda \in \sigma(A) - \{0\}$, $\lambda^{-1} \in S$ por lo que existe $\psi \neq 0$ tal que $f(\lambda^{-1})\psi = \psi$ si y solo si $A\psi = \lambda\psi$, i.e., todo $\lambda \in \sigma(A) - \{0\}$ es un valor propio de A . Consideremos el espacio propio

$$E_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathcal{H} : (\lambda I - A)x = 0\}.$$

Como es un espacio cerrado de \mathcal{H} , su bola unitaria cerrada \overline{B}_λ también es cerrada en \mathcal{H} . Ahora $\lambda^{-1}A$ es un operador compacto que restringido al espacio E_λ es el operador identidad. Por lo tanto, $\lambda^{-1}A\overline{B}_\lambda$ es un conjunto precompacto y $\lambda^{-1}A\overline{B}_\lambda = \overline{B}_\lambda$, de aquí que \overline{B}_λ es compacto. Concluimos la prueba usando el hecho de que un espacio normado es de dimensión finita si y solo si su bola unitaria cerrada es compacta. \square

El siguiente teorema también se le conoce como el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

TEOREMA 2.1.20 (Hilbert-Schmidt). Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, entonces existe una base ortonormal $\{\phi_n\}$ para \mathcal{H} , tal que $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$ y en el caso no finito, $\lambda_n \rightarrow 0$. Además,

$$(29) \quad A = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|,$$

donde la convergencia es en la norma de operadores.

Demostración. Por el teorema 2.1.19, los elementos de $\sigma(A) \setminus \{0\}$ son valores propios de A y cada espacio propio asociado tiene una base (vectorial) finita que podemos suponer ortonormal. Por consiguiente, la unión de estas bases, que llamaremos β , es un conjunto ortonormal, ya que los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales. Sea \mathcal{M} la cerradura del espacio vectorial generado por β y sabemos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp.$$

Afirmamos que $\mathcal{M}^\perp = \emptyset$: es inmediato verificar que $A(\mathcal{M}^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$ y al restringir A a \mathcal{M}^\perp , obtenemos un operador $\hat{A}: \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$, que es compacto y autoadjunto (pues A mismo posee dichos atributos), que además no tiene valores propios distintos de cero, de lo contrario, $\mathcal{M}^\perp, \mathcal{M}$ tendrían un elemento no cero en común. Así, $\sigma(\hat{A}) \setminus \{0\} = \emptyset$ y $0 = r(\hat{A}) = \|\hat{A}\|$, esta última por ser \hat{A} autoadjunto. Entonces $\hat{A} = 0$ y $\mathcal{M}^\perp = \emptyset$, de lo contrario, $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp \neq \emptyset$. Concluimos que $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ y que β es una base ortonormal numerable, debido a que \mathcal{H} es separable y el conjunto de valores propios de A es a lo más numerable, pues siempre se encuentra dentro de $\sigma(A)$.

Para el caso no finito, el conjunto de autovalores de A por ser subconjunto del compacto $\sigma(A)$ tiene un punto de acumulación, que es necesariamente cero por el teorema 2.1.19. Por último, es sencillo verificar utilizando la norma de operadores que $A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, i.e., (29). \square

A la expresión (29) del resultado anterior se le conoce como representación espectral de un operador autoadjunto. Por conveniencia, denotamos como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores acotados con dominio todo \mathcal{H} .

COROLARIO 2.1.21. Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador compacto y autoadjunto, entonces lo siguiente se cumple:

- (a) Los autovalores $\{\lambda_n\}$ de A pueden ser ordenados como $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$. Cada $|\lambda_j|$ se repite p_j -veces, donde $p_j = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$.
- (b) $|\lambda_1| = \|A\|$.
- (c) $\|A\| = \max_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$.

Demostración. (a): Sea $\sigma(A)$ el espectro de A y consideremos la función $\nu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\nu(z) = |z|$. La continuidad de ν se sigue directamente de

$$\| |z_0| - |z| \| = |\nu(z_0) - \nu(z)| \leq |z_0 - z|$$

Por el teorema 2.1.20, se tiene que $\sigma(A)$ es numerable. Consideremos

$$|\lambda_1| = \max_{\sigma(A) \setminus \{0\}} \nu(z), \quad |\lambda_2| = \max_{\sigma(A) \setminus \{0, \lambda_1\}} \nu(z), \quad \dots$$

El conjunto que resulta en cada paso es compacto y se cumple la existencia del máximo.

(b): Se deja de ejercicio mostrar que $\|A\| \leq \sup_j |\lambda_j|$, es decir, $\|A\| \leq |\lambda_1|$. Además, como $\|A\| \geq \|A\phi_1\| = |\lambda_1|$ (se ha conservado la notación del teorema de 2.1.20), Por lo que se tiene la igualdad.

(c): Uno calcula que

$$\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle \geq |\langle \phi_1, A\phi_1 \rangle| = |\langle \phi_1, \lambda_1 \phi_1 \rangle| = |\lambda_1|.$$

Por otro lado,

$$|\langle x, Ax \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|,$$

que tomando el máximo se llega a lo buscado. □

Veamos una implicación del resultado anterior.

COROLARIO 2.1.22. *Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto, lo siguiente se cumple:*

- (a) *Si \mathcal{M} es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , entonces $\max_{x \in \mathcal{M}^\perp} |\langle x, Ax \rangle| = \|P_{\mathcal{M}^\perp} A\|$.*
- (b) *Si $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$, es una enumeración de los valores propios de A , entonces*

$$|\lambda_n| = \max_{x \in (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})^\perp} |\langle x, Ax \rangle|.$$

Demostración. (a): Consideremos la restricción $P_{\mathcal{M}^\perp} A: \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$ donde $P_{\mathcal{M}^\perp}$ es la proyección ortogonal sobre \mathcal{M}^\perp . Se tiene que $P_{\mathcal{M}^\perp} A$ es acotado, pues es el producto de un operador compacto y un operador acotado. Para verificar que es autoadjunto, para $x, y \in \mathcal{M}^\perp$,

$$\langle y, P_{\mathcal{M}^\perp} Ax \rangle = \langle y, Ax \rangle = \langle Ay, x \rangle = \langle P_{\mathcal{M}^\perp} Ay, x \rangle.$$

Luego, por el corolario 2.1.21 tenemos que

$$\|P_{\mathcal{M}^\perp} A\| = \max_{\substack{x \in \mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, P_{\mathcal{M}^\perp} Ax \rangle| = \max_{\substack{x \in \mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, Ax \rangle|.$$

(b): Sea $\mathcal{M} = \text{span} \{\varphi\}_{j=1}^{n-1}$ el espacio generado por los primeros $n - 1$ vectores propios de A . Consideremos $\hat{A} = A|_{\mathcal{M}^\perp}$. Así, $\hat{A}: \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$, pues $A(\mathcal{M}^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$. Puesto que \hat{A} es compacto y autoadjunto, por el corolario 2.1.21 tenemos que

$$|\lambda_n| = \|\hat{A}\| = \max_{\substack{x \in \mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, Ax \rangle|,$$

como se quería. □

Antes de proseguir, comentemos que la representación espectral de un operador autoadjunto $A = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, enunciada en el teorema de Hilbert-Schmidt es única en el siguiente sentido: Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ es el conjunto de valores propios no cero de A distintos entre si y P_n es la proyección ortogonal sobre el correspondiente espacio propio asociado a λ_n , entonces $A = \sum_n \lambda_n P_n$. Ciertamente, si $\lambda \neq 0$ es cualquier valor propio de A y φ un vector propio asociado con λ , entonces

$$0 = \|(\lambda I - A)\varphi\|^2 = \|\lambda\varphi - A\varphi\|^2 = \left\| \lambda\varphi + \sum_n \lambda P_n \varphi - \sum_n \lambda P_n \varphi - \sum_n \lambda_n P_n \varphi \right\|^2.$$

Se deja al lector verificar que $\langle \lambda\varphi - \sum_j \lambda P_j \varphi, \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n \varphi \rangle = 0$ y como consecuencia de (9) obtenemos

$$\sum_j |\lambda - \lambda_j|^2 \|P_j \varphi\|^2 + |\lambda|^2 \|\varphi - \sum_j P_j \varphi\|^2,$$

de donde $|\lambda - \lambda_j| \|P_j \varphi\| = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $\varphi = \sum_j P_j \varphi$. Como $\varphi \neq 0$, existe j_0 tal que $P_{j_0} \varphi \neq 0$ y por tanto $\lambda = \lambda_{j_0}$. Por consiguiente, para $j \neq j_0$ se cumple $\lambda \neq \lambda_{j_0}$ y $P_j \varphi = 0$, que implica $\varphi \in \mathcal{R}(P_{j_0})$, es decir, en la segunda representación aparecen los valores propios no cero de A .

Lo anterior implica que $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n$, con $k \in \mathbb{N}$. Así, seleccionando $\lambda_n^{1/k}$ como la raíz de argumento más pequeño, $0 \leq \arg \lambda_n^{1/k} \leq 2\pi/k$, el operador $(A^{1/k})^k = A$.

Definición 2.1.23. Un operador $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es **positivo** (o no negativo para algunos autores) si $\langle \varphi, A\varphi \rangle \geq 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Como consecuencia del ejercicio P.2.1 es claro que todo operador acotado y positivo es autoadjunto.

TEOREMA 2.1.24. Para $n \geq 2$, cada operador compacto autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene exactamente una raíz n -ésima $A^{1/n}$ que es un operador compacto cuyos valores propios están en

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq 2\pi/n\}.$$

En particular, cada operador compacto positivo tiene exactamente una raíz n -ésima que es también un operador compacto positivo.

Demostración. El operador $A^{1/n} = \sum_j \lambda_j^{1/n} P_j$ con $0 \leq \arg \lambda_j^{1/n} \leq 2\pi/n$ tiene las propiedades enunciadas. Si $B = \sum_j \mu_j Q_j$ es otro operador compacto autoadjunto con las mismas propiedades, entonces

$$\sum_j \mu_j^n Q_j = B^n = A = \sum_j \lambda_j P_j.$$

Por la unicidad de la representación utilizada se concluye que $\mu_j^n = \lambda_j$ y $Q_j = P_j$. Las desigualdades $0 \leq \arg \mu_j \leq 2\pi/n$ implican que $\mu_j = \lambda_j^{1/n}$ y consecuentemente $B = A^{1/n}$. Si A es positivo entonces $\lambda_j \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y la condición $0 \leq \arg \lambda_j^{1/n} \leq 2\pi/n$ implica $\lambda_j^{1/n} \geq 0$. \square

Para un operador A compacto, tenemos que A^*A es compacto, positivo y autoadjunto. Se puede definir el **valor absoluto** de A como $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, que es la única raíz cuadrada positiva de A^*A . Es claro que $|A|$ es un operador compacto y positivo.

TEOREMA 2.1.25 (Forma canónica para operadores compactos). Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacto, entonces existen conjuntos (no necesariamente completos) ortonormales $\{\varphi_n\}$ y $\{\phi_n\}$ y números reales positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_n \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\phi_n|$. Esta expresión puede ser una suma finita o una serie que converge en norma. Los números $\{\lambda_n\}$ son llamados valores singulares de A .

Demostración. Como A es compacto y autoadjunto, es claro que A^*A , que es compacto y positivo. Por el teorema 2.1.20, existe un base ortonormal de vectores propios $\{\psi_n\}$, con $\{\mu_n\}$ los valores propios de A^*A . Sean $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_n\}$ los elementos tales que $\varphi_n \notin \mathcal{N}(A)$, luego $A^*A\varphi_n = \mu_n\varphi_n$ y $\mu_n > 0$ y, por tanto, para $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n^2 = \mu_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n = A\varphi_n/\lambda_n$ y como $\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = 0$, si $m \neq n$ entonces $\{\varphi_n\}$ forma un conjunto ortonormal. Así, cada $h \in \mathcal{H}$ se puede ver como $h = \sum_m a_m \psi_m$ donde $a_m = \langle\psi_m, h\rangle$. Aplicando A en h obtenemos

$$\begin{aligned} Ah &= A \left(\sum_m a_m \psi_m \right) = \sum_m a_m A\varphi_m \\ &= \sum_m \lambda_m a_m A\varphi_m / \lambda_m = \sum_m \lambda_m a_m \phi_m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = \sum_m \lambda_m |\varphi_m\rangle\langle\phi_m|$.

Para ver la convergencia (en norma) de la serie; supongamos que $\{\mu_m\}$ es un conjunto infinito, entonces $\mu_m \rightarrow 0$ y por ende $\lambda_n \searrow 0^+$ lo que implica para todo $\varepsilon > 0$ que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $0 < \lambda_n < \varepsilon$. De esta manera, si $x \in \mathcal{H}$ y $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| Ax - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle\varphi_j, x\rangle \phi_j \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle\varphi_j, x\rangle \phi_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j \langle\varphi_j, x\rangle|^2 \|\phi_j\|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\langle\varphi_j, x\rangle|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon^2 |\langle\varphi_j, x\rangle|^2 \\ &= \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle\varphi_j, x\rangle|^2 = \varepsilon^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se calcula directamente usando la ortonormalidad de $\{\phi_n\}$ y la última desigualdad es la de Bessel, utilizando el conjunto ortogonal $\{\varphi_n\}$. Por lo tanto,

$$\left\| A - \sum_{j=1}^n \lambda_j |\phi_j\rangle \langle \cdot | \varphi_j \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \varepsilon, \quad n \geq N,$$

de donde se concluye la demostración. □

Se puede verificar que, cuando P es un operador positivo, λ es un valor propio de P si y solo si $\sqrt{\lambda}$ es valor propio de \sqrt{P} .

LEMA 2.1.26. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ subespacios de dimensión finita. Si $\dim \mathcal{M} < \dim \mathcal{N}$ entonces $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $\mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{M} = \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \mathcal{N}$. Por lo tanto, si $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N} = \emptyset$, se cumple que $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$. □

El siguiente resultado es conocido como el **principio del minimax**.

TEOREMA 2.1.27. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto y positivo. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$, son todos sus valores propios positivos (incluyendo multiplicidades), entonces*

$$(30) \quad \lambda_n = \min_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle.$$

Demostración. Del teorema 2.1.20, existe una base ortonormal $\{\phi_n\}$ para \mathcal{H} , tal que $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$. Dado M un subespacio de dimensión $n - 1$, por el lema 2.1.26 existe $x_0 \in \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ tal que $x_0 \in M^\perp$ y $\|x_0\| = 1$. Si $x_0 = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$, entonces $\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$ y

$$\langle x_0, Ax_0 \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |a_k|^2 \geq \lambda_n \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \lambda_n,$$

de donde $\max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle \geq \lambda_n$, el máximo existe por el corolario 2.1.22.(a). Además, por 2.1.22.(b) tenemos para $M_0 = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_{n-1}\}$ que

$$\lambda_n = \max_{\substack{x \in M_0 \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle.$$

Por lo tanto, conjuntando ambas conclusiones llegamos a (30). □

Del teorema 2.1.27, se cumple que $\|Ax\|^2 = \langle Ax, A^*Ax \rangle = \langle x, |A|^2x \rangle$. Como los valores propios de $|A|^2$ son los cuadrados de los valores propios de $|A|$, entonces hemos probado lo siguiente.

COROLARIO 2.1.28. *Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto, si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, es una enumeración incluyendo multiplicidades, de todos los valores propios positivos de $|A|$. Entonces*

$$\lambda_n = \min_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

2.2. La clase de traza. A partir de aquí, \mathcal{H} representa un espacio de Hilbert separable y por consiguiente, contiene una base ortonormal numerable.

Definición 2.2.1. La **traza** de un operador positivo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ viene dada por

$$(31) \quad \text{tr}(A) = \sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle,$$

donde $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} .

Observación 2.2.2. Note de (31) que $\text{tr}(A) = \sum_n \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle$, ya que A es también autoadjunto. Además, como $\langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle = \langle A^{1/2}\varphi_n, A^{1/2}\varphi_n \rangle = \|A^{1/2}\varphi_n\|^2$, entonces

$$(32) \quad \text{tr}(A) = \sum_n \|A^{1/2}\varphi_n\|^2.$$

PROPOSICIÓN 2.2.3. *La traza de un operador positivo no depende de la base ortonormal elegida.*

Demostración. Sean $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_m\}$ bases ortonormales de \mathcal{H} y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador positivo. Por la identidad de Parseval,

$$\|A^{1/2}\varphi_n\|^2 = \sum_m |\langle A^{1/2}\varphi_n, \psi_m \rangle|^2 \quad \text{y} \quad \|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \sum_n |\langle A^{1/2}\psi_m, \varphi_n \rangle|^2.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{tr}_\varphi(A) &= \sum_n \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_n \sum_m |\langle A^{1/2}\varphi_n, \psi_m \rangle|^2 \\ &= \sum_m \sum_n |\langle \varphi_n, A^{1/2}\psi_m \rangle|^2 = \sum_m \|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \text{tr}_\psi(A). \end{aligned}$$

El intercambio de las sumas es válido, debido a que sus términos son positivos. \square

Lo siguiente muestra una propiedad de operadores compactos respecto a su traza.

PROPOSICIÓN 2.2.4. *Si A es un operador compacto, entonces $\text{tr}(|A|) = \sum_n \lambda_n$, donde $\{\lambda_n\}$ son los valores singulares de A , i.e., los valores propios de $|A|$.*

Demostración. Como $|A|^2 = A^*A$ es un operador compacto y autoadjunto, por el teorema de Hilbert-Schmidt 2.1.20, existe una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de \mathcal{H} tal que $|A|^2\varphi_n = \mu_n\varphi_n$. De esta manera, $|A|\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, con $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Por lo tanto,

$$\text{tr}(|A|) = \sum_n \langle |A|\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_n \lambda_n,$$

como se quería. \square

Ejemplo 2.2.I. Para $a \in \mathcal{H}$, defina $|a\rangle\langle a| \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como $h \mapsto |a\rangle\langle a|h$ o equivalentemente $h \mapsto \langle a, h \rangle a$. Este operador es un operador positivo con $\text{tr}(|a\rangle\langle a|) = \|a\|^2$. Ciertamente,

$$\langle h, |a\rangle\langle a|h \rangle = \overline{\langle a, h \rangle} \langle a, h \rangle = |\langle a, h \rangle|^2, \quad h \in \mathcal{H}$$

lo que implica que el operador es positivo. Además, $a = \sum_n \alpha_n \varphi_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$ y $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} . Así,

$$\text{tr}(|a\rangle\langle a|) = \sum_m \langle \varphi_m, |a\rangle\langle a|\varphi_m \rangle = \sum_m |\langle \varphi_m, a \rangle|^2 = \sum_m |\alpha_m|^2 = \|a\|^2.$$

Recordamos que un operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es **isométrico** (o isometría) si es invertible tal que $U^{-1} \subset V^*$ y **unitario** si $U^{-1} = V^*$. Además, U es una **isometría parcial** si $U \upharpoonright_{(\mathcal{N}(U))^\perp}$ es una isometría.

TEOREMA 2.2.5. *La traza de operadores positivos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumple las siguientes propiedades:*

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$, con $\lambda \geq 0$.
- $\text{tr}(U^*AU) = \text{tr}(A)$, con U unitario.
- $\text{tr}(V^*AV) \leq \text{tr}(A)$, con V isometría parcial.
- Si $0 \leq A \leq B$ entonces $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$.
- Para A y B positivos, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Demostración. Las propiedades (a), (b) y (e) son inmediatas. Para lo siguientes puntos, dejamos al lector verificar de manera simple, que una isometría manda bases ortonormales en bases ortonormales. (c): Como U es unitario y $\{U\varphi_n\}$ es base ortonormal, uno tiene de la proposición 2.2.3 que

$$\operatorname{tr}(U^*AU) = \sum_n \langle \varphi_n, U^*AU\varphi_n \rangle = \sum_n \langle U\varphi_n, AU\varphi_n \rangle = \operatorname{tr}(A) .$$

(d): Como $\mathcal{H} = \mathcal{N}(V) \oplus \mathcal{N}(V)^\perp$, tenemos que $V(\Phi) = \{V\varphi_n : \varphi_n \notin \mathcal{N}(V)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{R}(V)$, si Φ es una base ortonormal de \mathcal{H} . De esta manera, completamos $V(\Phi)$ a una base ortonormal $\Psi = \{\psi_n\}$ de \mathcal{H} . Por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(V^*AV) = \sum_n \langle V\varphi_n, AV\varphi_n \rangle \leq \sum_n \langle \psi_n, A\psi_n \rangle = \operatorname{tr}(A) ,$$

como se quería.

(f): Por la observación 2.2.2 el operador AB es autoadjunto y

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_m \langle \varphi_m, AB\varphi_m \rangle = \sum_m \langle B^*A^*\varphi_m, \varphi_m \rangle = \sum_m \langle BA\varphi_m, \varphi_m \rangle = \operatorname{tr}(BA) .$$

□

Definición 2.2.6. Decimos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de la **clase de traza** si $\operatorname{tr}(|A|) < \infty$. Denotaremos como $L_1(\mathcal{H})$, a la familia de todos los operadores de la clase de traza.

Es claro que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y solo si $|A| \in L_1(\mathcal{H})$. Además, de la proposición 2.2.4, para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto, se cumple que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y sólo si $\sum_n \lambda_n < \infty$, con $\{\lambda_n\}$ los valores singulares de A .

Ejemplo 2.2.II. Del ejemplo 2.2.I tenemos para $a \in \mathcal{H}$ que $|a\rangle\langle a| \in L_1(\mathcal{H})$.

Ejemplo 2.2.III. Para $u, v \in \mathcal{H}$, se tiene que $|v\rangle\langle u| \in L_1(\mathcal{H})$ y eiproyector

$$\operatorname{tr}(|v\rangle\langle u|) = \|v\| \|u\| .$$

En efecto, el caso $u = 0$ es directo. Para $u \neq 0$, se verifica directamente que $\|u\|^{-1} |u\rangle\langle u|$ es raíz cuadrada de $|u\rangle\langle u|$ y como $|v\rangle\langle u|^* = |u\rangle\langle v|$,

$$\|v\rangle\langle u|\|^2 = |v\rangle\langle u|^* |v\rangle\langle u| = \|v\|^2 |u\rangle\langle u| ,$$

es decir $\|v\rangle\langle u|\| = \|v\| \|u\|^{-1} |u\rangle\langle u|$. Por lo tanto, del teorema 2.2.5.(b) y del ejemplo 2.2.I, se tiene que

$$\operatorname{tr}(|v\rangle\langle u|) = \|v\| \|u\|^{-1} \operatorname{tr}(|u\rangle\langle u|) = \|v\| \|u\| .$$

LEMA 2.2.7 (Descomposición polar). Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces existen $P, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con P positivo y V isometría parcial, tales que

$$(33) \quad T = VP .$$

Demostración. Sea $P = |T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, que es positivo y para $h \in \mathcal{H}$,

$$(34) \quad \begin{aligned} \|Ph\|^2 &= \langle Ph, Ph \rangle = \langle (T^*T)^{\frac{1}{2}}h, (T^*T)^{\frac{1}{2}}h \rangle \\ &= \langle T^*Th, h \rangle = \langle Th, Th \rangle = \|Th\|^2 , \end{aligned}$$

es decir, $\|P\| = \|T\|$. Ahora, definimos \tilde{V} sobre $\mathcal{R}(P)$ como $\tilde{V}(Ph) = Th \in \mathcal{R}(T)$ y de (34) se sigue que \tilde{V} es isometría. Por lo tanto, si V es la extensión de \tilde{V} , tal que $V = 0$ en $\mathcal{R}(P)^\perp$, se sigue que $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es isometría parcial y se cumple (33). □

Recordemos que un operador acotado A es una **contracción** si $\|A\| \leq 1$.

Observación 2.2.8. Un operador no trivial $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumple que $\|A\|^{-1}A$ es una contracción. Además, un operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que es contracción se puede escribir como

$$A = \frac{1}{2}(U_+ + U_-),$$

donde $U_{\pm} = A \pm i\sqrt{I - A^2}$ son unitarios y $I - A^2$ es positivo.

LEMA 2.2.9. Todo operador lineal B en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una combinación lineal de cuatro operadores unitarios.

Demostración. En virtud de la observación 2.2.8, es suficiente probar el resultado para contracciones. Note que $B = B_1 + iB_2$ donde

$$B_1 = \frac{1}{2}(B + B^*) \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{1}{2i}(B - B^*),$$

los cuales son autoadjuntos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y contracciones, ya que B lo es. Por lo tanto, de la segunda parte de la observación 2.2.8 se tiene lo deseado. \square

Lo siguiente muestra algunas propiedades básicas de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.10. La clase $L_1(\mathcal{H})$ es un $*$ -ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, esto es:

- (a) $L_1(\mathcal{H})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- (b) Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces AB y $BA \in L_1(\mathcal{H})$. Esto significa que $L_1(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- (c) Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $A^* \in L_1(\mathcal{H})$.

Demostración. (a): Es claro que $L_1(\mathcal{H})$ es cerrado bajo la multiplicación escalar y para mostrar que es cerrado bajo la suma; sean $A, B \in L_1(\mathcal{H})$ y considere las siguientes descomposiciones polares

$$(35) \quad A + B = U|A + B|, \quad A = V|A|, \quad B = W|B|,$$

donde U, V, W son isometrías parciales. Note que

$$\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n \rangle = \left\langle |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n, |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\rangle,$$

donde $\{\varphi_n\}$ es base ortonormal de \mathcal{H} , y aplicando la desigualdad de Schwarz,

$$\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n \rangle \leq \left\| |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\| \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n \right\|.$$

Entonces, dado $N \in \mathbb{N}$,

$$(36) \quad \sum_{n=1}^N |\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n \rangle| \leq \left(\sum_{n=1}^N \left\| |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como U, V son isometrías, uno verifica que $\{V^*U\varphi_n\}$ es un sistema ortonormal y por consiguiente de (32), el lado izquierdo de (36) es $\leq (\text{tr}(|A|))^{\frac{1}{2}}(\text{tr}(|A|))^{\frac{1}{2}} = \text{tr}(|A|)$. Análogamente,

$$\sum_{n=1}^N |\langle \varphi_n, U^*W|B|\varphi_n \rangle| \leq \text{tr}(|B|).$$

Así, uno tiene de (35) que $|A + B| = U^*(A + B) = U^*V|A| + U^*W|B|$ y

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, |A + B|\varphi_n \rangle &= \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, U^*V|A| + U^*W|B|\varphi_n \rangle \\ &\leq \sum_{n=1}^N |\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n \rangle| + \sum_{n=1}^N |\langle \varphi_n, U^*W|B|\varphi_n \rangle| \end{aligned}$$

Como $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, $\text{tr}(|A + B|) \leq \text{tr}(|A|) + \text{tr}(|B|) < \infty$, i.e., $A + B \in L_1(\mathcal{H})$.

(b): Del punto anterior y del lema 2.2.9, basta demostrar este punto cuando B es unitario. Note que $(B^*|A|B)^2$ implica $|AB|^2$ y por ende $B^*|A|B = |AB|$. Similarmente, $|BA| = |A|$. Por lo tanto, del teorema 2.2.5.(c), se tiene que $AB, BA \in L_1(\mathcal{H})$.

(c): Sea $A = U|A|$ la descomposición polar de A . Entonces $A^* = (U|A|)^* = |A|U^*$ y el punto anterior asegura $|A|U^* \in L_1(\mathcal{H})$, teniendo en cuenta que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y solo si $|A| \in L_1(\mathcal{H})$. \square

Lo siguiente muestra una propiedad de los operadores de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.11. *Cada operador en $A \in L_1(\mathcal{H})$ es compacto.*

Demostración. Demostraremos que A es límite de una sucesión de operadores de rango finito. Considere una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de \mathcal{H} y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador de rango finito $A_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dado por

$$A_n := A \left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \right),$$

Es claro que

$$\|A_n - A\| = \sup_{\substack{\psi \in \Omega_n \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\|, \quad \text{donde } \Omega_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}^\perp.$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\psi \in \Omega_n$, con $\|\psi\| = 1$, completamos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi\}$ a una base ortonormal de \mathcal{H} , digamos $\{\psi_j\}$ donde $\psi_j = \varphi_j$ para $i \leq j \leq n$ y $\psi_{n+1} = \psi$. Como $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $|A|^2 \in L_1(\mathcal{H})$, es decir,

$$\text{tr}(|A|^2) = \sum_n \|A\psi_n\|^2 < \infty.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^n \|A\varphi_j\| + \|A\psi\|^2 \leq \sum_n \|A\psi_n\|^2, \quad \text{o bien, } \|A\psi\|^2 \leq \sum_{j=n+1}^\infty \|A\psi_j\|^2$$

Así,

$$\sup_{\substack{\psi \in \Omega_n \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| \leq \left(\sum_{j=n+1}^\infty \|A\psi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\|A_n - A\| < \epsilon$, de donde A es compacto, al ser límite de operadores de rango finito. \square

Definición 2.2.12. Para cada $A \in L_1(\mathcal{H})$ definimos

$$\|A\|_1 = \text{tr}(|A|).$$

Es fácil verificar que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $L_1(\mathcal{H})$. De hecho, al finalizar la prueba del teorema 2.2.10.(a), obtuvimos la desigualdad del triángulo.

Ejemplo 2.2.IV. Del ejemplo 2.2.III se cumple que

$$\| |v\rangle\langle u| \|_1 = \|u\| \|v\|, \quad \text{para todo } u, v, \in \mathcal{H}.$$

COROLARIO 2.2.13. Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n$, con $\{\lambda_n\}$ como los valores singulares de A .

Demostración. Es directo del teorema 2.2.11 y la proposición 2.2.4 \square

LEMA 2.2.14. Para todo $A \in L_1(\mathcal{H})$ se cumple $\|A\| \leq \|A\|_1$.

Demostración. Como $|A| \in L_1(\mathcal{H})$ es compacto y autoadjunto se tiene para los valores propios $\{\lambda_n\}$ de $|A|$ que $\lambda_1 = \||A|\|$. Por lo tanto, de los corolarios 2.1.21 y (2.2.13), uno simplemente calcula que $\|A\| = \lambda_1 \geq \sum_{j=1}^\infty \lambda_j = \|A\|_1$. \square

Hemos demostrado que la clase de traza es un espacio lineal normado. Veamos que también cumple lo siguiente.

TEOREMA 2.2.15 (Completez). *La clase de operadores $L_1(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_1$.*

Demostración. Por el lema 2.2.14 se cumple que si una sucesión $\{A_n\} \subset L_1(\mathcal{H})$ es $\|\cdot\|_1$ -Cauchy, entonces también es $\|\cdot\|$ -Cauchy y por consiguiente existe un $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$. Para $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, |A|\varphi_j \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, |A_m|\varphi_j \rangle \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(|A_m|) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m\|_1 < \infty,$$

debido a que $\{\|A_m\|_1\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. También se usó que la función valor absoluto es continua con la norma de operadores.

Ahora, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_n - A_m\|_1 < \epsilon/2$ para $n, m > N$. Así,

$$\begin{aligned} \|A - A_m\|_1 &= \operatorname{tr}(|A - A_m|) = \sum_{j \geq 1} \langle \varphi_j, |A - A_m|\varphi_j \rangle \\ &= \sum_{j \geq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_j, |A_n - A_m|\varphi_j \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \geq 1} \langle \varphi_j, |A_n - A_m|\varphi_j \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\|_1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \epsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Para la primera desigualdad hemos utilizado el lema de Fatou (ver [7, Lem. 4.1]) con la medida de conteo. \square

Lo siguiente muestra una propiedad de los operadores de rango finito sobre el espacio de clase de traza.

COROLARIO 2.2.16. *Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_1$ -densos en $L_1(\mathcal{H})$.*

Demostración. Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ compacto y $\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$, entonces del teorema 2.1.25, usamos la forma canónica $A = \sum_j \lambda_j |\varphi_j\rangle\langle\phi_j|$, con $\{\varphi_j\}, \{\phi_j\}$ conjuntos ortonormales. Consideramos los operadores de rango finito, $S_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_n|$, con $n \in \mathbb{N}$, y uno calcula que

$$\begin{aligned} \|S_n - S_{m-1}\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| \right\|_1 = \left\| \sum_{j=m}^n \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| \right\|_1 \\ &\leq \sum_{j=m}^n \lambda_j \| |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| \|_1 = \sum_{j=m}^n \lambda_j \|\varphi_j\| \|\phi_j\| = \sum_{j=m}^n \lambda_j. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\{S_n\}$ es sucesión $\|\cdot\|_1$ -Cauchy y convergente a \tilde{A} . Por lo tanto, como se cumple $\|S_n - \tilde{A}\| \leq \|S_n - \tilde{A}\|_1 \rightarrow 0$, entonces $\|A - \tilde{A}\| \leq \|A - S_n\| + \|S_n - \tilde{A}\| \rightarrow 0$, es decir, $A = \tilde{A}$. \square

La pauta importante en la demostración anterior fue la forma canónica de operadores compactos, la cual servirá para mostrar lo siguiente.

TEOREMA 2.2.17. *Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} , entonces $\sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$ converge absolutamente. El límite es independiente de la base.*

Demostración. En virtud del teorema 2.1.25, existen conjuntos ortonormales $\{u_j\}, \{v_n\}$ en \mathcal{H} y números positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m|$. De esta manera, $\langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle = \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, v_m \rangle$ y aplicando el teorema de Fubini [7, Teo. 4.5],

$$\begin{aligned} \sum_n |\langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle| &= \sum_n \left| \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, v_m \rangle \right| \\ &\leq \sum_m \lambda_m \sum_n |\langle u_m, \varphi_n \rangle| |\langle \varphi_n, v_m \rangle| \\ &\leq \sum_m \lambda_m \left(\sum_n |\langle u_m, \varphi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\langle \varphi_n, v_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_m \lambda_m \|u_m\| \|v_m\| = \sum_m \lambda_m = \text{tr}(|A|) = \|A\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las sumas $\sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$ y $\sum_{n,m} \lambda_m \langle u_m, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, v_m \rangle$ convergen absolutamente. Además, podemos intercambiar el orden de las series siguientes:

$$(37) \quad \begin{aligned} \sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle &= \sum_n \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, v_m \rangle \\ &= \sum_m \lambda_m \sum_n \langle u_m, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, v_m \rangle = \sum_m \lambda_m \langle u_m, v_m \rangle, \end{aligned}$$

lo que prueba la independencia de las bases. □

Gracias al resultado anterior podemos definir el siguiente concepto, el cual es independiente de la elección de la base.

Definición 2.2.18. La transformación $\text{tr}: L_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(38) \quad \text{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle, \quad A \in L_1(\mathcal{H})$$

se llama la traza de A , donde $\{\varphi_n\}$ es cualquier base ortonormal de \mathcal{H} .

TEOREMA 2.2.19. *La aplicación (38) cumple las siguientes propiedades:*

- (a) $\text{tr}: L_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función lineal.
- (b) $\text{tr}(A^*) = \overline{\text{tr}(A)}$.
- (c) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ para $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración. En virtud de las propiedades del producto interno, los puntos (a) y (b) son directos. Además, del teorema 2.2.10, se tiene que $AB, BA \in L_1(\mathcal{H})$ y como consecuencia del lema 2.2.9, es suficiente mostrar (c), cuando B es unitario. Si $\{\varphi_n\}$ base ortonormal en \mathcal{H} , entonces también lo es $\{\psi_n = B^*\varphi_n\}$ y, por lo tanto,

$$\sum_n \langle \psi_n, AB\psi_n \rangle = \sum_n \langle B^*\varphi_n, ABB^*\varphi_n \rangle = \sum_n \langle \varphi_n, BA\varphi_n \rangle,$$

como se quería. □

Ejemplo 2.2.V. Para $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m| \in L_1(\mathcal{H})$, descomposición garantizada por el teorema 2.1.25, donde $\{u_m\}, \{v_m\} \subset \mathcal{H}$ son ortonormales y $\{\lambda_m\}$ números positivos, tenemos de (37) que

$$\text{tr}(A) = \sum_m \lambda_m \langle u_m, v_m \rangle.$$

En particular, si $x, y \in \mathcal{H}$ entonces $\text{tr}(|x\rangle\langle y|) = \langle y, x \rangle$.

PROPOSICIÓN 2.2.20. *Para $A \in L_1(\mathcal{H})$ el mapeo $\text{tr}(A(\cdot)): \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $B \mapsto \text{tr}(AB)$, es un funcional lineal acotado, con*

$$(39) \quad |\text{tr}(AB)| \leq \|A\|_1 \|B\|.$$

Demostración. El funcional es lineal debido al teorema 2.2.19. Ahora bien, del teorema 2.1.25 existen conjuntos ortonormales $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathcal{H}$ y números positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m|$. Así, si $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ es base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(AB)| &= \left| \sum_n \langle \varphi_n, AB\varphi_n \rangle \right| \leq \sum_m \sum_n \lambda_m |\langle u_m, B\varphi_n \rangle| |\langle \varphi_n, v_m \rangle| \\ &\leq \sum_m \lambda_m \left(\sum_n |\langle u_m, B\varphi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\langle \varphi_n, v_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_m \lambda_m \|B^*u_m\| \|v_m\| \\ &\leq \sum_m \lambda_m \|B^*\| = \|B\| \sum_m \lambda_m, \end{aligned}$$

de donde se tiene (39). \square

Recordemos que para $u, v \in \mathcal{H}$, la aplicación $|v\rangle\langle u|$ es el operador lineal tal que $h \mapsto \langle u, h \rangle v$, para todo $h \in \mathcal{H}$.

PROPOSICIÓN 2.2.21. *Si $F: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, donde $F(|v\rangle\langle u|)$ es un funcional lineal acotado, entonces existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que $F(|v\rangle\langle u|) = \langle u, Bv \rangle$.*

Demostración. La forma $C: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $C(u, v) = F(|v\rangle\langle u|)$ es sesquilineal y acotada, pues $|C(u, v)| \leq \|F\| \|u\| \|v\|$. Por lo tanto, del lema de Riesz 2.1.5, existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $C(u, v) = \langle u, Bv \rangle$. \square

Permítanos denotar mediante $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ al subespacio de Banach formado todos por los operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

TEOREMA 2.2.22. *La transformación $L_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ definido por $B \mapsto \operatorname{tr}(B(\cdot))$, es un isomorfismo isométrico de $L_1(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$. Esto es $L_1(\mathcal{H}) \approx \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$.*

Demostración. De la proposición 2.2.20, el mapeo $B \rightarrow \operatorname{tr}(B(\cdot))$ es acotado y

$$\|\operatorname{tr}(B(\cdot))\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*} \leq \|B\|_1$$

Veamos que el mapeo es sobreyectivo: dado $f \in (\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*$, determina la forma sesquilineal $f(|u\rangle\langle v|)$ y por la proposición 2.2.21 existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$(40) \quad f(|u\rangle\langle v|) = \langle v, Bu \rangle = \operatorname{tr}(B|u\rangle\langle v|).$$

Demostraremos que $B \in L_1(\mathcal{H})$, el funcional $f = \operatorname{tr}(B(\cdot))$ y $\|B\|_1 = \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$.

Considere la descomposición polar $B = U|B|$ y $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} . Entonces de (40), tenemos que

$$\sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, |B|\varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^N \langle U\varphi_n, B\varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^N f(|B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|) = f\left(\sum_{n=1}^N |B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|\right).$$

Observemos que $\sum_{n=1}^N |B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|$ es un operador con norma menor a uno, de rango finito y por tanto compacto. Así, $\sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, |B|\varphi_n \rangle \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$, para todo $N \in \mathbb{N}$, lo que implica $B \in L_1(\mathcal{H})$ y $\|B\|_1 \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$.

Es fácil ver de (40) que $\operatorname{tr}(B(\cdot)) = f(\cdot)$ en los operadores de rango finito que son $\|\cdot\|_1$ -densos en $(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*$, debido a la continuidad de $\operatorname{tr}(B(\cdot))$ y $f(\cdot)$, concluimos que son iguales. Por lo tanto, $\|B\|_1 \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*} \leq \|B\|_1$ \square

En lo siguiente trabajamos con el dual de los operadores de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.23. *El operador $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow L_1(\mathcal{H})^*$ definido por $B \mapsto \operatorname{tr}(B(\cdot))$ es una isometría sobreyectiva.*

Demostración. Para la isometría, si $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces del teorema 2.2.19 y de la proposición 2.2.20, tenemos que $|\operatorname{tr}(AB)| = |\operatorname{tr}(BA)| \leq \|A\|_1 \|B\|$, de donde $\|\operatorname{tr}(B(\cdot))\|_{L_1(\mathcal{H})} \leq \|B\|$. Para la otra desigualdad, uno calcula que

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |\langle y, Bx \rangle| = \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |\operatorname{tr}(B|x\rangle\langle y|)| \\ &\leq \sup_{\|A\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*}} |\operatorname{tr}(BA)| = \|\operatorname{tr}(B(\cdot))\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\operatorname{tr}(B(\cdot))\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*} = \|B\|$. La sobreyectividad se verifica de manera análoga al teorema 2.2.22. Dado $g \in (L_1(\mathcal{H}))^*$, se tiene una forma sesquilineal y por la proposición 2.2.21, existe un único operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle v, Bu \rangle = g(|u\rangle\langle v|)$. Así, $\operatorname{tr}(B|u\rangle\langle v|) = g(|u\rangle\langle v|)$, para todo $u, v \in \mathcal{H}$, de donde obtenemos que los funcionales continuos $\operatorname{tr}(B(\cdot))$ y $g(\cdot)$ coinciden en los operadores de rango finito que son $\|\cdot\|_1$ -densos en $L_1(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(B(\cdot)) = g(\cdot)$, en todo $L_1(\mathcal{H})$. \square

Observación 2.2.24. Es de interés señalar que a la unión de los teoremas 2.2.22 y 2.2.23, se le conoce como el **Teorema de Schatten**.

2.3. Operadores de Hilbert-Schmidt. En esta sección veremos otra clase importante de operadores en la física-matemática, que tienen propiedades análogas a la clase de operadores $L_1(\mathcal{H})$.

Definición 2.3.1. Decimos que $T \in B(\mathcal{H})$ es de **Hilbert-Schmidt** si $\operatorname{tr}(T^*T)$ es finita. La familia de todos los operadores de Hilbert-Schmidt se denota por $L_2(\mathcal{H})$.

Observación 2.3.2. Para $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ una base ortonormal, es directo verificar la equivalencia de las siguientes condiciones:

- (a) $T \in L_2(\mathcal{H})$.
- (b) $T^*T = |T|^2 \in L_1(\mathcal{H})$.
- (c) $\operatorname{tr}(|T|^2) < \infty$.
- (d) $\sum_n \|T\varphi_n\|^2 < \infty$.
- (e) $\{\|T\varphi_n\|\}_n \subset l_2$.

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Todo operador de la clase de traza es de Hilbert-Schmidt, i.e., $L_1(\mathcal{H})$ está contenido en $L_2(\mathcal{H})$.*

Demostración. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, uno tiene para todo $f \in \mathcal{H}$ que

$$\langle f, |T|^2 f \rangle = \langle |T|^{1/2} f, |T| |T|^{1/2} f \rangle \leq \|T\| \left\| |T|^{1/2} f \right\|^2,$$

de donde se sigue que $\operatorname{tr}(|T|^2) \leq \|T\| \operatorname{tr}(|T|) < \infty$. Por lo tanto, de la observación 2.3.2 se tiene que $T \in L_2(\mathcal{H})$. \square

Una consecuencia del resultado anterior es $|v\rangle\langle u| \in L_2(\mathcal{H})$, con $u, v \in \mathcal{H}$.

LEMA 2.3.4. *Si $A, B \in L_2(\mathcal{H})$ entonces $AB \in L_1(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sean $C = AB$ y $C = V|C|$ su descomposición polar. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\langle \varphi_n, |C|\varphi_n \rangle = \langle A^*V\varphi_n, B\varphi_n \rangle \leq \|B\varphi_n\| \|A^*V\varphi_n\|,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, |C|\varphi_j \rangle &\leq \left(\sum_{j=1}^n \|B\varphi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|A^*V\varphi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\operatorname{tr}(|B|^2))^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tr}(|A^*V|^2))^{\frac{1}{2}} \leq (\operatorname{tr}(|B|^2))^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tr}(|A|^2))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pues $|A^*V|^2 = V^*|A|^2V$ y $\operatorname{tr}(V^*|A|^2V) \leq \operatorname{tr}(|A|^2)$, por el teorema 2.2.10. Podemos concluir que $\operatorname{tr}(|C|) \leq \operatorname{tr}(|B|^2) \operatorname{tr}(|A|^2) < \infty$ y por definición $C = AB \in L_1(\mathcal{H})$. \square

Veamos algunas propiedades cruciales del espacio de Hilbert-Schmidt.

TEOREMA 2.3.5. *El espacio $L_2(\mathcal{H})$ es $*$ -ideal de $B(\mathcal{H})$. Esto es:*

- (a) $L_2(\mathcal{H})$ es un espacio lineal.
- (b) Si $T \in L_2(\mathcal{H})$ entonces $T^* \in L_2(\mathcal{H})$, i.e., $L_2(\mathcal{H})$ es cerrado bajo la adjunción.
- (c) Si $A \in L_2(\mathcal{H})$ y $B \in B(\mathcal{H})$, entonces $AB \in L_2(\mathcal{H})$ y $BA \in L_2(\mathcal{H})$.

Demostración. (a): Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $A, B \in L_2(\mathcal{H})$. La cerradura bajo la multiplicación escalar se sigue de la linealidad de $\text{tr}(\cdot)$ y de que $(\lambda A)^2 = \lambda^2 |A|^2$. Además,

$$|A + B|^2 = (A + B)^*(A + B) = A^*A + A^*B + B^*A + B^*B,$$

donde cada sumando está en $L_1(\mathcal{H})$ por ser productos de elementos de $L_2(\mathcal{H})$ y como $L_1(\mathcal{H})$ es un subespacio de $B(\mathcal{H})$ tenemos que $|A + B|^2 \in L_1(\mathcal{H})$, como se quería.

(b): La descomposición $T = U|T|$ cumple $T^* = |T|U^*$ y $|T^*|^2 = TT^* = U|T|^2U^*$. Por lo tanto, $\text{tr}(|T^*|^2) = \text{tr}(U|T|^2U^*) \leq \text{tr}(|T|^2) < \infty$, es decir, $T^* \in L_2(\mathcal{H})$.

(c): Por el lema 2.2.9, basta mostrar la propiedad cuando B es unitario. Entonces,

$$|UA|^2 = (UA)^*(UA) = |A|^2 \quad \text{y} \quad |AU|^2 = (AU)^*(AU) = U^*|A|^2U,$$

de donde se sigue que

$$\text{tr}|UA|^2 = \text{tr}|A|^2 \quad \text{y} \quad \text{tr}|AU|^2 = \text{tr}U^*|A|^2U = \text{tr}|A|^2.$$

El resultado se concluye del teorema 2.2.10. □

Una consecuencia del resultado anterior es que en el espacio $L_2(\mathcal{H})$, podemos definir la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : L_2(\mathcal{H}) \times L_2(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\langle A, B \rangle_2 := \text{tr}(A^*B), \quad A, B \in L_2(\mathcal{H}),$$

la cual define un producto interno. Además, induce la norma $\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A \rangle_2}$, con las siguientes propiedades:

- (a) $\|A\|_2^2 = \text{tr}(|A|^2) = \left\| |A|^2 \right\|_1 = \sum_n \lambda_n^2$, con $\{\lambda_n\}$ los valores singulares de A .
- (b) Dado cualquier base ortonormal $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$,

$$\|A\|_2^2 = \sum_n \langle \varphi_n, A^*A\varphi_n \rangle = \sum_n \|A\varphi_n\|^2.$$

LEMA 2.3.6. *Para todo $A \in L_2(\mathcal{H})$ se cumple que $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$. Además,*

$$(41) \quad \|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1.$$

Demostración. Un cálculo simple muestra que

$$\|A^*\|_2 = \left\| |A^*|^2 \right\|_1^{1/2} = \left\| |A|^2 \right\|_1^{1/2} = \|A\|_2.$$

Como $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\|^2)$, existe $\varphi \in A$ unitario tal que $\|A\|^2 - \epsilon < \|A\varphi\|^2$, es decir, $\|A\|^2 < \|A\varphi\|^2 + \epsilon$. Si $\{\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ es base ortonormal de \mathcal{H} , entonces

$$\|A\|^2 < \sum_n \|A\varphi_n\|^2 + \epsilon = \|A\|_2^2 + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, $\|A\|^2 \leq \|A\|_2^2$ lo cual prueba que $\|A\| \leq \|A\|_2$. Más aún, como los valores singulares $\{\lambda_n\}$ de A son positivos

$$\|A\|_2^2 = \sum_n \lambda_n^2 \leq \left(\sum_n \lambda_n \right)^2 = \|A\|_1^2,$$

que implica $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$. □

Hemos mostrado que $L_2(\mathcal{H})$ es un espacio lineal con producto interno.

TEOREMA 2.3.7. *El espacio $(L_2(\mathcal{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. La prueba es análoga a la de 2.2.10. Si $\{\varphi_j\}$ una base ortonormal de \mathcal{H} y $\{A_n\}$ una sucesión de $\|\cdot\|_2$ -Cauchy en $L_2(\mathcal{H})$, entonces se tiene de (41) que es $\|\cdot\|$ -Cauchy. De esta manera, existe $A \in B(\mathcal{H})$ tal que $A_n \rightarrow A$ en la norma $\|\cdot\|$. Demostraremos que $A \in L_2(\mathcal{H})$ y que $A_n \rightarrow A$ en la norma $\|\cdot\|_2$. Note que

$$\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, |A|^2 \varphi_j \rangle = \lim_m \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, |A_m|^2 \varphi_j \rangle \leq \lim_m \text{tr} (|A_m|^2) = \lim_m \|A_m\|_2^2,$$

donde el límite existe debido a que $\{\|A_n\|_2^2\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} . Así, $\text{tr} (|A|^2) \leq \lim_m \|A_m\|_2^2 < \infty$, i.e, $A \in L_2(\mathcal{H})$.

Ahora bien, como $\{A_n\}$ es $\|\cdot\|$ -Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\|A_n - A_m\|_2^2 < \epsilon/2$, cuando $n, m \geq N$. Luego,

$$\begin{aligned} \|A - A_m\|_2^2 &= \sum_j \|(A - A_m)\varphi_j\|^2 = \sum_j \lim_n \|(A_n - A_m)\varphi_j\|^2 \\ &\leq \lim_n \sum_j \|(A_n - A_m)\varphi_j\|^2 = \lim_n \|A_n - A_m\|_2^2 < \epsilon, \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado el lema de Fatou (ver [7, Lem. 4.1]) con la medida de conteo. □

En la prueba del teorema 2.2.11, el argumento esencial para que $A_n = \sum_{j=1}^n A|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ converja en norma a A , es que $A^*A = |A|^2 \in L_1$. Esto ciertamente se cumple en $L_2(\mathcal{H})$ y se cumple lo siguiente de manera simple.

TEOREMA 2.3.8. *Todo operador en $L_2(\mathcal{H})$ es compacto.*

Permita mostrar una propiedad de densidad en el espacio de Hilbert-Schmidt.

COROLARIO 2.3.9. *Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_2$ -densos en $L_2(\mathcal{H})$.*

Demostración. Si $A \in L_2(\mathcal{H})$ entonces es compacto y por el teorema 2.1.25, existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ y conjuntos ortonormales $\{\psi_n\}, \{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$, tales que $A = \sum_n \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\psi_n|$. Así, $\|A\|_2^2 = \sum_j \lambda_j^2$ y

$$\left\| A - \sum_{n=1}^N \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\psi_n| \right\|_2^2 = \left\| \sum_{n \geq N+1} \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\psi_n| \right\|_2^2 = \sum_{n \geq N+1} \lambda_n^2 \rightarrow 0,$$

que muestra la densidad de los operadores de rango finito. □

Veamos en lo siguiente algunas propiedades de $L_2(\mathcal{H})$, cuando $\mathcal{H} = L_2(M, \mu)$. En lo que resta de la sección, (M, μ) representa un espacio de medida σ -finita.

LEMA 2.3.10. *Si $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$, entonces el operador*

$$\begin{aligned} A_K : L_2(M, \mu) &\rightarrow L_2(M, \mu) \\ \varphi &\mapsto \int_M K(x, y)\varphi(y)d\mu(y), \end{aligned}$$

está bien definido y $\|A_K\| \leq \|K\|_{L_2(M \times M, \mu \times \mu)}$.

Demostración. Definimos a $f : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(x, y) = |K(x, y)|^2$. Debido a que $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ y por Fubini, existe un conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 0$ y para todo $x \in M \setminus \Omega$, $f(x, \cdot) \in L_1(M, \mu)$, esto es $|K(x, \cdot)|^2 \in L_1(M, \mu(y))$, lo que significa que $K(x, \cdot) \in L_2(M, \mu(y))$, es decir

$$\left(\int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

para $x \in M \setminus \Omega$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left| \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y) \right| &\leq \int_M |K(x, y)| |\varphi(y)| d\mu(y) \\ &\leq \left(\int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

esta última por lema de Schwarz. De esto se sigue que

$$\left| \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y) \right|^2 \leq \int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y)$$

y además,

$$\int_M \left| \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \leq \int_M \int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y) d\mu(x) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y),$$

es decir,

$$\int_M |A_K \varphi(x)|^2 d\mu(x) \leq \int_{M \times M} |K(x, y)|^2 d\mu \times \mu \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y).$$

Esta desigualdad muestra que $A_K \in L_2(M, \mu)$ y $\|A_K \varphi\|_2^2 \leq \|\varphi\|^2 \|K\|_2^2$. \square

Veamos extensiones de bases en espacios producto.

LEMA 2.3.11. Si $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal de $L_2(M, \mu)$ entonces $\{\overline{\varphi_n(x)}, \varphi_m(y)\}$ es una base ortonormal para $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.

Demostración. Uno calcula que

$$\int_{M \times M} \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(y) \varphi_r(x) \overline{\varphi_s(y)} d\mu \times \mu = \int_M \overline{\varphi_n(x)} \varphi_y(x) d\mu(x) \int_M \varphi_m(y) \overline{\varphi_s(y)} d\mu(y),$$

de donde se sigue que

$$\langle \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(y), \overline{\varphi_r(x)} \varphi_s(y) \rangle = \langle \varphi_r(x), \varphi_n(x) \rangle \langle \varphi_m(y), \varphi_s(y) \rangle = \delta_{rn} \delta_{ms},$$

es decir, $\{\overline{\varphi_n(x)}, \varphi_m(y)\}$ es ortogonal.

Ahora bien, para $f(x, y) \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ tal que

$$\int_{M \times M} \overline{\varphi_k(x)} \varphi_l(x, y) \overline{f(x, y)} d\mu(x) d\mu(y) = 0,$$

se sigue del teorema de Fubini [7, Teo. 4.5] que

$$\int_M \left(\int_M \overline{\varphi_k(x)} \overline{f(x, y)} d\mu(x) \right) \varphi_l(y) d\mu(y).$$

Como $\{\varphi_l(y)\}$ es base ortonormal de $L_2(M, \mu(y))$ lo anterior implica que

$$\int_M \overline{\varphi_k(x)} \overline{f(x, y)} d\mu(x) = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

excepto para $y \in S_k \subset M$, donde $\mu(S_k) = 0$. Para $y \notin \bigcup_k S_k$, existe $R_y \subset M$ tal que

$$\int_M \overline{\varphi_k(x)} \overline{f(x, y)} d\mu(x) = 0$$

excepto en R_y con $\mu(R_y) = 0$. Ahora, como $\{\overline{\varphi_k(x)}\}$ es base ortonormal de $L_2(M, \mu)$ de donde $f(x, y) = 0$, μ -c.d. En consecuencia $f(x, y) = 0$ $\mu \times \mu$ -c.d.,

$$\|f\|^2 = \int_{M \times M} |f(x, y)|^2 d\mu \times \mu = \int_M \left(\int_M I_{M \setminus R_y} |f(x, y)|^2 d\mu \right) d\mu = \int_M 0 d\mu.$$

Por lo tanto, $f = 0$ $\mu \times \mu$ -c.d., de donde se sigue la completitud de la base. \square

Veamos dos consecuencias simples del resultado anterior.

COROLARIO 2.3.12. *Todo* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *se puede escribir como:*

$$K = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(y),$$

donde $\alpha_{nm} = \langle \varphi_m, A_K \varphi_n \rangle_{L_2(M, \mu)}$ son los coeficientes de Fourier en $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.

Demostración. Del lema 2.3.11, se cumple que $\{\overline{\varphi_n}, \varphi_m\}$ es base ortonormal para $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$. Entonces, los coeficientes de Fourier son:

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \langle \overline{\varphi_n} \varphi_m, K \rangle = \int_{M \times M} K(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu \times \mu \\ &= \int_M \int_M K(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_M \left[\int_M K(x, y) \varphi_n(x) d\mu(x) \right] \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\ &= \int_M (A_K \varphi_n)(y) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\ &= \langle \varphi_m, A_K \varphi_n \rangle_{L_2(M, \mu)} = \alpha_{nm}, \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. \square

El resultado anterior exhibe una descripción de los operadores en $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.

COROLARIO 2.3.13. *Sea* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *y* $A_K : L_2(\mathcal{H}) \rightarrow L_2(\mathcal{H})$, *dado por*

$$(A_K \varphi)(x) = \int_M K(x, y) \varphi(y) d\mu(y).$$

Entonces, A_K está en $L_2(L_2(\mathcal{H}))$ y $\|A_K\|_2 = \|K\|_{L_2(M \times M)}$.

Demostración. Mediante unos cálculos simples, uno tiene que

$$\begin{aligned} \|A_K\|_2^2 &= \text{tr}(|A_K|^2) = \sum_n \|A_K \varphi_n\|_{L_2}^2 = \sum_n \sum_m |\langle A_K \varphi_n, \varphi_m \rangle|^2 \\ &= \sum_n \sum_m |\alpha_{nm}|^2 = \|K\|_{L_2}^2 < \infty, \end{aligned}$$

pues $K \in L_2(M \times M)$. Por lo tanto, $A_K \in L_2$ y $\|A_K\|_2^2 = \|K\|_{L_2(M \times M)}^2$. \square

Concluimos la sección con una caracteriza a los elementos de Hilbert-Schmidt.

TEOREMA 2.3.14. *Un operador* $A \in \mathcal{B}(L_2(M, \mu))$ *es de Hilbert-Schmidt si y sólo si existe un función* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *tal que*

$$(Af)(x) = \int_M K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

y además, $\|A\|_2^2 = \int_M |K(x, y)|^2 d\mu \times \mu$.

Demostración. Por el corolario 2.3.13 tenemos que $K \mapsto A_K$ es una isometría de $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ en $L_2(\mathcal{H})$ y por consiguiente su rango es cerrado. Mostraremos que contiene a los operadores de rango finito y junto con la densidad de estos en L_2 , obtendremos que la imagen del mapeo $K \mapsto A_K$ está en L_2 .

Para $R = |\varphi\rangle\langle\psi|$ con $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, se tiene $K_R = \varphi(x)\overline{\psi(y)}$. Por consiguiente tenemos que $K_R \in L_2(M \times M)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|K_R\|_{L_2(M \times M)}^2 &= \|\varphi(x)\overline{\psi(y)}\|_{L_2(M \times M)}^2 = \int_{M \times M} |\varphi(x)\overline{\psi(y)}|^2 d\mu \times \mu \\ &= \int_M |\varphi(x)|^2 d\mu(x) \int_M |\psi(y)|^2 d\mu(y) = \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}(A_{K_R} f)(x) &= \int_M \varphi(x) \overline{\psi(y)} f(y) d\mu(y) = \varphi(x) \int_M \overline{\psi(y)} f(y) d\mu(y) \\ &= \varphi(x) \langle f, \psi \rangle = \left[(|\varphi\rangle \langle \psi|) f \right](x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, como los proyectores generan a los operadores de rango finito y estos son Hilbert-Schmidt y densos, se concluye que cada operador de rango finito viene de algún K_R . \square

Puede profundizarse el estudio de estas clases de operadores en [4, Cap. 11], [13, Cap. 4], [19, Ap. A], [20, Cap. 6], entre otros.

Problemas de la sección.

P.2.1 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Demuestre que $A = A^*$ si y solo si $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$.

P.2.2 Muestre que $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es compacto si y solo si toda sucesión $\{x_n\}_n$ tal que $\|x_n\| \leq 1$ satisface que la sucesión $\{Tx_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente.

P.2.3 Muestre que $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por $T(x_n)_n = (x_n/2^n)_n$ es compacto.

P.2.4 Muestre que $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, definido por $T(x_n)_n = (x_n/n)_n$ es compacto.

P.2.5 Si T es un operador lineal compacto en un espacio de Hilbert infinito dimensional tal que su inverso T^{-1} existe y está definido en todo \mathcal{H} , muestre que T^{-1} no puede ser acotado.

P.2.6 T es compacto si y solo si T^*T es compacto.

P.2.7 Encuentre los valores propios del operador $T_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$T_n(x) = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1} \right), \quad \text{con } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

P.2.8 Sean E, F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal acotado compacto. Suponga que el rango de T es cerrado.

a) Pruebe que T es de rango finito.

b) Si además $\mathcal{N}(T) < \infty$ entonces $\dim E < \infty$.

3. OPERADORES LINEALES NO ACOTADOS

Los operadores no acotados en espacios de Hilbert son de gran interés en la física-matemática y en particular en la mecánica cuántica. La parte esencial de esta sección está dedicada al estudio de los operadores lineales no acotados [18, 4, 19, 20]. De hecho, esta sección es una introducción a la teoría de operadores lineales generales en espacios de Hilbert.

3.1. Preliminares. Para un espacio de Hilbert separable $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sobre el campo de los números complejos \mathbb{C} , decimos que una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un **operador lineal** en \mathcal{H} (o simplemente operador), si para cada $f, g \in \mathcal{D}(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T) &:= \{f \in \mathcal{H} : Tf \in \mathcal{H}\} & \mathcal{R}(T) &:= \{Tf : f \in \mathcal{D}(T)\} \\ \mathcal{N}(T) &:= \{f \in \mathcal{D}(T) : Tf = 0\}\end{aligned}$$

representan el **dominio**, **rango** y **núcleo** de T , respectivamente. Además, es sencillo verificar que estos conjuntos son lineales en \mathcal{H} .

Para operadores lineales T, S en \mathcal{H} , el dominio del operador $T + S$ viene dado por

$$\mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$$

y actúa como $(T + S)f = Tf + Sf$. Además, el dominio del operador TS es

$$\mathcal{D}(TS) = \{f \in \mathcal{D}(S) : Sf \in \mathcal{D}(T)\}$$

donde $TSf = T(Sf)$.

Decimos que $T|_{\mathcal{C}}$ es el operador T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T)$. En este sentido, $T \subset S$ si $S|_{\mathcal{D}(T)} = T$ y en este caso se dice que S es **extensión** de T (o T es restricción de S). Así, $T = S$ significa que $T \subset S$ y $S \subset T$.

Recordemos el producto interno en \mathcal{H} , induce la norma

$$(42) \quad \begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}. \end{aligned}$$

Además, decimos que un operador T es **acotado** si existe $c > 0$ tal que $\|Tf\| \leq c \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$.

Ejemplo 3.1.I (Operador funcional). Sea \mathcal{M} un conjunto lineal en \mathcal{H} y un elemento no cero $g \in \mathcal{H}$. Considere un funcional lineal no continuo $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ y defina el **operador lineal funcional**

$$(43) \quad \begin{aligned} T_F : \mathcal{M} &\rightarrow \text{span} \{g\} \\ f &\mapsto F(f)g \end{aligned}$$

Afirmamos que el operador (43) no es acotado. Ciertamente, como F no es continuo existe $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$, con $\|f_n\| = 1$, tal que $0 \neq |F(f_n)| \rightarrow \infty$. De esta manera, $\|T_F f_n\| = |F(f_n)| \|g\| \rightarrow \infty$, como se quería.

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Un operador T en \mathcal{H} es acotado si y sólo si es uniformemente continuo en su dominio, con respecto a la norma (42).*

Demostración. Si existe $c > 0$ tal que $\|Tf\| \leq c \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, con $\|f - g\| < \varepsilon/c$, se cumple que

$$\|Tf - Tg\| = \|T(f - g)\| \leq c \|f - g\| < \varepsilon, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(T)$$

lo que implica que T sea uniformemente continuo en su dominio.

Por otra parte, si T es uniformemente continuo en $\mathcal{D}(T)$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|f\| \leq \delta$ entonces $\|Tf\| \leq 1$. Así, para $f \in \mathcal{D}(T)$ distinto de cero, $g = \delta f / \|f\|$ cumple $\|g\| \leq \delta$ y, por lo tanto,

$$\|Tf\| = \frac{1}{\delta} \|f\| \|Tg\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|,$$

de donde se sigue que T es acotado. □

La **norma** de un operador acotado T viene dada por

$$\|T\| := \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(T), \\ f \neq 0}} \frac{\|Tf\|}{\|f\|},$$

la cual cumple las siguientes equivalencias:

$$(44) \quad \begin{aligned} T &= \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\| = 1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\| \leq 1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\| < 1}} \|Tf\| \\ &= \sup_{\substack{f, g \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\|, \|g\| = 1}} |\langle g, Tf \rangle| = \sup_{\substack{f, g \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\|, \|g\| \leq 1}} |\langle g, Tf \rangle| = \sup_{\substack{f, g \in \mathcal{D}(T), \\ \|f\|, \|g\| < 1}} |\langle g, Tf \rangle|. \end{aligned}$$

Recordamos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el conjunto de todos los operadores acotados con dominio todo \mathcal{H} . Este conjunto es un espacio lineal normado, donde se definen tres tipos de convergencia de la siguiente manera. Para $T, T_1, T_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que:

1. $\{T_n\}$ converge **uniformemente** a T , denotado por $T_n \xrightarrow{u} T$ o por

$$u\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T, \quad \text{si} \quad \|T - T_n\| \rightarrow 0.$$

2. $\{T_n\}$ converge **fuertemente** a T , denotado por $T_n \xrightarrow{s} T$ o por

$$s\text{-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T, \quad \text{si para cada } f \in \mathcal{H}, \quad \|Tf - T_n f\| \rightarrow 0.$$

3. $\{T_n\}$ converge **débilmente** a T , denotado por $T_n \xrightarrow{w} T$ o por

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T, \quad \text{si para cada } f, g \in \mathcal{H}, \quad \langle g, Tf - T_n f \rangle \rightarrow 0.$$

La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte y la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

Un operador T en \mathcal{H} es **invertible** si tiene núcleo trivial, cuya inversa se denota por T^{-1} , la cual resulta un operador lineal en \mathcal{H} con $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$. Note que T^{-1} también es invertible y $(T^{-1})^{-1} = T$. Además,

$$(45) \quad T^{-1}T = I|_{\mathcal{D}(T)} \quad \text{y} \quad TT^{-1} = I|_{\mathcal{R}(T)}.$$

PROPOSICIÓN 3.1.2. Si T y S son invertibles, entonces TS también lo es y

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

Demostración. El operador TS es invertible, pues $\mathcal{N}(TS) \subset \mathcal{N}(T) \cup \mathcal{N}(S) = \{0\}$. Luego, si $f \in \mathcal{D}((TS)^{-1})$, entonces existe $g \in \mathcal{D}(S)$ tal que $Sg \in \mathcal{D}(T)$ y $TSg = f$. De esta manera, $f \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$, de (45) se tiene que $Sg = T^{-1}f$, es decir, $T^{-1}f \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{D}(S^{-1})$ y $g = S^{-1}T^{-1}f$, lo que implica $(TS)^{-1} \subset S^{-1}T^{-1}$. Para la otra inclusión, como S^{-1}, T^{-1} son invertibles, también lo es $S^{-1}T^{-1}$ y de lo anterior

$$(S^{-1}T^{-1})^{-1} \subset (T^{-1})^{-1}(S^{-1})^{-1} = TS,$$

es decir, $S^{-1}T^{-1} \subset (TS)^{-1}$, de donde se concluye la afirmación. \square

Lo siguiente muestra una caracterización de la inversa acotada de un operador.

TEOREMA 3.1.3. La inversa de un operador T en \mathcal{H} existe y es acotada si y solo si existe $c > 0$ tal que

$$(46) \quad \|Tf\| \geq c\|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(T).$$

Demostración. Es claro de (46) que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y por lo tanto existe T^{-1} . Sustituyendo $Tf = g$ en (46), uno obtiene que

$$(47) \quad \|g\| \geq c\|T^{-1}g\|, \quad \forall g \in \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T),$$

es decir, T^{-1} es acotado. Inversamente, si T^{-1} existe y es acotado, entonces se satisface (47), que haciendo $f = T^{-1}g$, se llega a (46). \square

3.2. La gráfica de un operador. En lo siguiente abordamos el tema de la gráfica de un operador lineal, de manera análoga a [4, Cap. 3]. Sea $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ la suma ortogonal de dos copias de \mathcal{H} (c.f. [4, Sec. 2.3]), es decir,

$$(48) \quad \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f, g \in \mathcal{H} \right\},$$

que es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(49) \quad \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle := \langle f, h \rangle + \langle g, k \rangle, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

El producto interno (49) induce la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2 := \|f\|^2 + \|g\|^2, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

la cual es equivalente a la norma $\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| := \|f\| + \|g\|$. Puntualizamos que la convergencia en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

La **gráfica** de un operador lineal T en \mathcal{H} viene dada por

$$\mathcal{G}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : f \in \mathcal{D}(T) \right\},$$

que resulta ser un conjunto lineal en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Ejemplo 3.2.I (Continuación de ejemplo 3.1.I). La gráfica del operador (43) es

$$\mathcal{G}(T_F) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ F(f)g \end{pmatrix} : f \in \mathcal{M} \right\}.$$

Lo siguiente exhibe una condición necesaria y suficiente para que un conjunto lineal en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ sea la gráfica de un operador lineal.

PROPOSICIÓN 3.2.1. *Un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ resulta ser la gráfica de un operador lineal si y solo si*

$$(50) \quad \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} : f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostración. Suponga que (50) se cumple y considere las aplicaciones lineales $\pi, \rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ tales que

$$\pi \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f \quad ; \quad \rho \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G}.$$

De este modo, $\ker \pi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y se verifica que $T = \rho\pi^{-1}$ es un operador lineal con $\mathcal{D}(T) = \pi\mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}$. La prueba inversa es directa. \square

Para efectos prácticos, introducimos las aplicaciones $\mathbb{U}, \mathbb{W}: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ como

$$(51) \quad \mathbb{U} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbb{W} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

las cuales son operadores lineales que satisfacen $\mathbb{U}^2 = I = -\mathbb{W}^2$ y $\mathbb{U}\mathbb{W} = -\mathbb{W}\mathbb{U}$.

Mediante contención de conjuntos, lo siguiente se cumple de manera sencilla.

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Para dos operadores T, S , se sigue lo siguiente:*

- (a) $T \subset S$ si y sólo si $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$.
- (b) Si T es invertible, entonces $\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathbb{U}\mathcal{G}(T)$.

Para un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, denote el conjunto lineal

$$-\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \right\}.$$

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ es un conjunto lineal, entonces:*

- (a) $(\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{W}(\mathcal{G}^\perp)$.
- (b) $\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}}$.
- (c) $(\mathbb{U}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{U}(\mathcal{G}^\perp)$.
- (d) $\overline{\mathbb{U}\mathcal{G}} = \mathbb{U}\overline{\mathcal{G}}$.
- (e) $\mathbb{U}^2\mathcal{G} = \mathbb{W}^2\mathcal{G} = \mathcal{G}$.
- (f) $\mathbb{U}\mathbb{W}\mathcal{G} = \mathbb{W}\mathbb{U}\mathcal{G} = -\mathcal{G}$.

Demostración. Note que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp$ si y solo si $\forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{W}\mathcal{G}, \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

si y solo si $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in (\mathcal{G})^\perp$, o bien $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{W}(\mathcal{G})^\perp$. Esto prueba el punto (a). Ahora,

$$\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \left((\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp \right)^\perp = \mathbb{W} \left((\mathcal{G}^\perp)^\perp \right) = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}},$$

es decir, (b). Los puntos (c),(d) se siguen de manera análoga y (e),(f) se siguen directamente de la definición, notando que \mathcal{G} es conjunto lineal. \square

Recalcamos que dos conjuntos lineales \mathcal{F} y \mathcal{G} son linealmente independientes si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. A partir de aquí usaremos la siguiente notación, que será de gran utilidad en resultados posteriores. Para \mathcal{F} y \mathcal{G} subconjuntos lineales en \mathcal{H} , denotamos

$$(52) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} \dot{+} \mathcal{G} &:= \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}\}. \\ \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} &:= \mathcal{F} \dot{+} \mathcal{G} \text{ tal que } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}^\perp. \\ \mathcal{F} \ominus \mathcal{G} &:= \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp. \end{aligned}$$

Las notaciones $\dot{+}, \oplus$ y \ominus , representan la **suma directa**, **suma ortogonal** y **diferencia ortogonal**, respectivamente.

Observación 3.2.4. En espacios lineales normados, la suma directa es representada por \oplus . No obstante, cuando la norma proviene de un producto interno, la suma directa que además es ortogonal se enfatiza con esta misma notación.

Dado cualquier conjunto lineal $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, de (52) se sigue que $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}$, es decir (compare con observación 1.3.4),

$$(53) \quad \mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{F}.$$

La notación (52) en el contexto de operadores lineales nos estaremos refiriendo a su gráfica en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Observación 3.2.5. Para que T y S sean linealmente independientes es necesario y suficiente mostrar que si $f \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$ tal que $Tf = Sf$, entonces $f = 0$.

La siguiente afirmación es directa.

COROLARIO 3.2.6. *Para T y S operadores lineales se cumple lo siguiente:*

- (1) *Si $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S)$ son linealmente independientes, entonces también lo son T y S .*
- (2) *Si $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S)$ son ortogonales al igual que $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{R}(S)$, entonces T y S son ortogonales.*

3.3. Operadores cerrados y cerrables. Los operadores cerrados juegan un papel muy importante en la clase de los operadores no acotados. La propiedad de ser cerrado (o más precisamente cerrable) sirve como sustituto de ser acotado. Iniciamos con la noción de operador cerrado.

Definición 3.3.1. Un operador T en \mathcal{H} se dice ser **cerrado** (escribimos $T = \overline{T}$), si para cualquier sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \rightarrow f$ y $Tf_n \rightarrow g$, implica que $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = g$.

Observación 3.3.2. Decir que un operador T es cerrado es equivalente a decir que su gráfica $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Esto es claro debido a que una sucesión $\left\{ \begin{pmatrix} f_n \\ Tf_n \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{G}(T)$ converge a $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ si y solo si $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ y $f_n \rightarrow f$, $Tf_n \rightarrow g$.

TEOREMA 3.3.3. *Sea T un operador acotado. Entonces T es cerrado si y solo si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado.*

Demostración. Suponemos que T cerrado y sea $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, tal que $f_n \rightarrow f$. Dado que T es acotado, se tiene que $\{Tf_n\}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente, debido a la completéz de \mathcal{H} . Esto implica que $f \in \mathcal{D}(T)$, es decir, $\mathcal{D}(T)$ es cerrado. Inversamente, para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \rightarrow f$ y $Tf_n \rightarrow g$, como T es acotado con dominio cerrado se tiene que $f \in \mathcal{D}(T)$ y existe $c > 0$ tal que

$$\|Tf - g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(f - f_n)\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

de donde se sigue que T es cerrado. □

Debido al teorema 3.3.3, se tiene que cada operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es cerrado. Además, para $\alpha \in \mathbb{C}$, los operadores T y αT son cerrados simultáneamente.

TEOREMA 3.3.4. *Si T es cerrado y S es cerrado y acotado, entonces $T + S$ y TS son cerrados.*

Demostración. Considere $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T + S)$, tal que $f_n \rightarrow f$ y $(T + S)f_n \rightarrow g$. Del teorema 3.3.3 se sigue que $f \in \mathcal{D}(S)$ y como S es acotado, entonces es continuo (ver proposición 3.1.1), es decir, $Sf_n \rightarrow Sf$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} f_n \\ Tf_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ Sf \end{pmatrix} \right\| &= \|f_n - f\| + \|Tf_n + Sf_n - g + Sf - Sf_n\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|(T + S)f_n - g\| + \|Sf_n - Sf\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como T es cerrado, se tiene $\begin{pmatrix} f \\ g - Sf \end{pmatrix} \in \mathcal{G}(T)$, es decir, $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = g - Sf$. Por lo tanto, $f \in \mathcal{D}(T + S)$ y $(T + S)f = g$. La implicación TS es cerrado, se deja de ejercicio (ver problema P.1.2.8). \square

El teorema anterior es de gran utilidad en la teoría espectral de operadores, ya que en general la suma de dos operadores cerrados no siempre es cerrado.

Observación 3.3.5. Si existe la inversa de un operador T , entonces se puede verificar que $\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathcal{U}\mathcal{G}(T)$. Por consiguiente, de la proposición 3.2.3 se tiene que T y T^{-1} son cerrados simultáneamente.

TEOREMA 3.3.6. *Si T es cerrado, entonces $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en \mathcal{H} .*

Demostración. Si $\{f_n\} \in \mathcal{N}(T)$ es tal que $f_n \rightarrow f$, entonces es claro que $Tf_n \rightarrow 0$. Así, $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = 0$, debido a que T es cerrado. Por lo tanto, $f \in \mathcal{N}(T)$. \square

El siguiente resultado es de gran interés y es conveniente que su demostración se posponga hasta la sección 3.4.

TEOREMA 3.3.7. *Si T es cerrado con dominio cerrado, entonces T es acotado.*

Observación 3.3.8. Debido a los teoremas 3.3.3 y 3.3.7, basta que un operador T cumpla dos de las siguientes afirmaciones para que cumpla la tercera.

- (a) T es cerrado. (b) $\mathcal{D}(T)$ es cerrado. (c) T es acotado.

COROLARIO 3.3.9. *Sea T un operador invertible y cerrado. Entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado si y solo si T^{-1} es acotado.*

Demostración. Tenemos de la observación 3.3.5 que el operador T^{-1} es cerrado. Por lo tanto, de la observación 3.3.8 se concluye que $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ es cerrado si y solo si T^{-1} es acotado. \square

La siguiente afirmación complementa el corolario 3.3.9.

COROLARIO 3.3.10. *Sea T un operador que satisfice*

$$\|Tf\| \geq c\|f\|, \quad c > 0, \forall f \in \mathcal{D}(T).$$

Entonces, T es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

Demostración. Del teorema 3.1.3, el operador T^{-1} existe y es acotado. Entonces, T es cerrado si y solo si T^{-1} es cerrado, que del teorema 3.3.3 equivale a decir que $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$ es cerrado. \square

Es claro que $\mathcal{G}(T)$ no es cerrado en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ si T no es cerrado. Es natural considerar el conjunto lineal $\overline{\mathcal{G}(T)}$ y surge la cuestión de si $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, es decir, si satisface (50).

Definición 3.3.11. Un operador T en \mathcal{H} se dice **cerrable** si $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, el cual se denota por \overline{T} y representa la cerradura de T .

La cerradura de un operador cerrable es extensión del operador. Además, si $T \subset S$ y S es cerrado, entonces T es cerrable y $T \subset \overline{T} \subset S$. Así, \overline{T} es la mínima extensión cerrada de T . Más aún, se sigue directamente de la definición 3.3.11 que

$$(54) \quad \mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$$

PROPOSICIÓN 3.3.12. *Un operador T es cerrable si y solo si para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \rightarrow 0$ y $Tf_n \rightarrow g$, se tiene que $g = 0$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 3.2.1, notando que $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es gráfica de un operador si y solo si $\overline{\mathcal{G}(T)} \ni \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, $g = 0$. \square

Observación 3.3.13. Todo operador acotado es cerrable. En efecto, si T es acotado entonces para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \rightarrow 0$ y $Tf_n \rightarrow g$, entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf_n\| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0.$$

Por lo tanto, de la proposición 3.3.12 se tiene que T es cerrable.

Es claro que un operador cerrado es cerrable, o bien, no cerrable implica no cerrado.

Ejemplo 3.3.I (Continuación de ejemplo 3.1.I). El operador funcional (43) no es cerrable. En efecto, considerando la sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ del ejemplo 3.1.I y haciendo $h_n = F(f_n)^{-1}f_n$, uno calcula de manera sencilla que $h_n \rightarrow 0$ y

$$T_F h_n = F(h_n)g = F(f_n)^{-1}F(f_n)g = g \neq 0,$$

lo cual implica de la proposición 3.3.12 que T_F no es cerrable.

COROLARIO 3.3.14. Si T es cerrable y S es acotado, entonces $T + S$ es cerrable y

$$\overline{T + S} = \overline{T} + \overline{S}.$$

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T + S)$ tal que $f_n \rightarrow 0$ y $(T + S)f_n \rightarrow g$. Como S es acotado y $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(S)$ entonces $Sf_n \rightarrow 0$. Además,

$$\|Tf_n - g\| = \|(T + S)f_n - g - Sf_n\| \leq \|(T + S)f_n - g\| + \|Sf_n\| \rightarrow 0,$$

es decir, $Tf_n \rightarrow g$ y como T es cerrable, de la proposición 3.3.12 se tiene que $g = 0$. Por lo tanto, $T + S$ es cerrable. Ahora bien, como S es acotado entonces es cerrado y del teorema 3.3.4 se tiene que $\overline{T + S}$ es cerrado. Además, es claro que $T + S \subset \overline{T + S}$, lo que implica $\overline{T + S} \subset \overline{T} + \overline{S}$. La otra contención se logra reemplazando a los operadores T por $T + S$ y S por $-S$. \square

3.4. El adjunto de un operador. Veremos que la existencia del adjunto de un operador lineal, depende de la densidad de su dominio en el espacio de Hilbert. No obstante, esta condición de densidad se puede relajar a través de los llamados operadores multivaluados [9].

Abordaremos la noción del adjunto de un operador lineal en dos enfoques. El primero es analítico y se basa en su definición directa, mientras que el segundo es geométrico y este está relacionado con el estudio de su gráfica.

Cabe recalcar que un operador T en \mathcal{H} se dice ser densamente definido en \mathcal{H} si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. Para $h \in \mathcal{H}$ consideremos el funcional lineal definido sobre $\mathcal{D}(T)$, como $l_h(f) = \langle h, Tf \rangle$. Este funcional puede ser continuo para alguna $h \in \mathcal{H}$ y como consecuencia del teorema de representación de Riesz [14, Sec. 3.8], $l_h(f) = \langle k, f \rangle$, con $k \in \mathcal{H}$. Esta representación es única siempre que $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.

Definición 3.4.1. Para un operador densamente definido T , el **operador adjunto** T^* es aquel cuyo dominio viene dado por

$$(55) \quad \mathcal{D}(T^*) = \{h \in \mathcal{H} : \exists k \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle h, Tf \rangle = \langle k, f \rangle, \forall f \in \mathcal{D}(T)\},$$

de tal manera que $T^*h = k$ y se satisface la relación $\langle h, Tf \rangle = \langle T^*h, f \rangle$. Al operador T^* usualmente se le conoce como el adjunto de T .

Observación 3.4.2. La condición de T al ser densamente definido no se puede relajar para definir el adjunto de un operador lineal de manera clásica. En efecto, si $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{H}$ entonces existe un elemento no trivial $k \perp \mathcal{D}(T)$. Así, $\langle Tf, 0 \rangle = 0 = \langle f, k \rangle$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$, es decir $T^*0 = k$, que resulta contradictorio en teoría de operadores.

El enfoque geométrico del operador adjunto se basa en lo siguiente.

LEMA 3.4.3. Para T un operador en \mathcal{H} se tiene que $[\text{WG}(T)]^\perp$ es la gráfica de un operador si y solo si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.

Demostración. Es sencillo verificar que un elemento $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ es ortogonal a $\mathbb{W}\mathcal{G}(T)$ si y solo si $h \perp \mathcal{D}(T)$. Por lo tanto, $[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$ satisface (50) si y solo si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. \square

En lo que resta de esta sección, suponemos que T es un operador densamente definido y mostraremos algunas propiedades sencillas del operador adjunto.

TEOREMA 3.4.4 (enfoque geométrico del adjunto). *El adjunto de un operador T satisface lo siguiente:*

$$(56) \quad [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}(T^*).$$

Demostración. Para $h \in \mathcal{D}(T^*)$, $f \in \mathcal{D}(T)$, uno de manera simple verifica que $\begin{pmatrix} h \\ T^*h \end{pmatrix} \in \mathcal{G}(T^*)$ si y solo si $\left\langle \begin{pmatrix} h \\ T^*h \end{pmatrix}, \mathbb{W}\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, es decir $\begin{pmatrix} h \\ T^*h \end{pmatrix} \in [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$. \square

El lema 3.4.3 y teorema 3.4.4 implican que T^* es un operador cerrado. Además, si T es cerrable, entonces de la proposición 3.2.3, de (54) y (56), se sigue que

$$\mathcal{G}(\overline{T^*}) = [\mathbb{W}\mathcal{G}(\overline{T})]^\perp = [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}(T^*),$$

es decir, $\overline{T^*} = T^*$.

El siguiente resultado aborda la cuestión de la existencia del doble adjunto.

TEOREMA 3.4.5. *Una condición necesaria y suficiente para que T^* sea densamente definido es que T sea cerrable. En tal caso, $T^{**} = (T^*)^*$ existe y $T^{**} = \overline{T}$.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de la proposición 3.2.3 y de (56) que

$$(57) \quad [\mathbb{W}\mathcal{G}(T^*)]^\perp = [\mathbb{W}[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp]^\perp = [[\mathcal{G}(T)]^\perp]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}.$$

Por lo tanto, se sigue del lema 3.4.3 que T^* es densamente definido si y solo si $[\mathbb{W}\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, es decir, T es cerrable. En tal caso se sigue de (54), (56) y (57) que $T^{**} = \overline{T}$. \square

Ejemplo 3.4.I (Continuación de ejemplo 3.1.I). Suponemos que el conjunto lineal \mathcal{M} del ejemplo 3.1.I es denso en \mathcal{H} y mostraremos que el adjunto del operador funcional (43) no es densamente definido y $T_F^* = 0 \upharpoonright_{\{g\}^\perp}$.

Como el producto interno es continuo y F es discontinuo, uno tiene que la aplicación

$$f \rightarrow \langle h, Tf \rangle = \mathcal{F}(f) \langle h, g \rangle$$

es continua si y solo si $h \perp g$. Así, $\langle h, Tf \rangle = 0$, para todo $f \in \mathcal{D}(T_F)$, es decir, $T_F^*h = 0$, para todo $h \in \mathcal{D}(T_F^*) = \{g\}^\perp$. La no densidad del adjunto de T_F se debe a que T_F no es cerrable (ver ejemplo 3.3.I).

Una propiedad simple del adjunto es que saca escalares conjugados. Ciertamente, para $f \in \mathcal{D}(T)$ y $h \in \mathcal{D}(T^*)$, uno calcula que

$$\langle (\alpha T)^*h, f \rangle = \langle h, \alpha Tf \rangle = \alpha \langle T^*h, f \rangle = \langle \overline{\alpha}T^*h, f \rangle, \quad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C})$$

Como T es densamente definido, se concluye que $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$.

TEOREMA 3.4.6. *Si un operador T es cerrable, entonces $\mathcal{R}(\overline{T})$ es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado.*

Demostración. Primero suponemos que $\mathcal{R}(\overline{T})$ es cerrado. Consideremos el proyector $P_{\mathcal{R}(\overline{T})}$ sobre $\mathcal{R}(\overline{T})$ y sea $\{h_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)$ tal que $T^*h_n \rightarrow k$. Entonces, uno tiene para todo $f \in \mathcal{D}(\overline{T})$ que

$$\langle T^*h_n, f \rangle = \langle h_n, \overline{T}f \rangle = \left\langle h_n, P_{\mathcal{R}(\overline{T})}\overline{T}f \right\rangle = \left\langle P_{\mathcal{R}(\overline{T})}h_n, \overline{T}f \right\rangle,$$

el cual implica que $\{P_{\mathcal{R}(\overline{T})}h_n\}$ converge débilmente en el espacio de Hilbert $\mathcal{R}(\overline{T})$, a un elemento $h \in \mathcal{R}(\overline{T})$. De esta manera,

$$\langle k, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^*h_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_{\mathcal{R}(\overline{T})}h_n, \overline{T}f \rangle = \langle h, \overline{T}f \rangle.$$

De esta manera, $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $T^*h = k$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado. Inversamente, si se cumple que $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado, entonces lo anterior y el teorema 3.4.5 implican que $\mathcal{R}(\overline{T}) = \mathcal{R}(T^{**})$ es cerrado. \square

El siguiente resultado muestra una partición del espacio de Hilbert.

TEOREMA 3.4.7. *Los conjuntos $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T^*)$ son ortogonales en \mathcal{H} y satisfacen*

$$(58) \quad \mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T^*).$$

Demostración. La inclusión $h \in \mathcal{N}(T^*)$ significa que $\langle h, Tf \rangle = 0$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$, que a su vez $h \perp \mathcal{R}(T)$. \square

Ahora procederemos a demostrar el teorema 3.3.7 de la sección 3.3.

Demostración del teorema 3.3.7. Primero suponemos que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ y mostremos que T^* pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es claro del teorema 3.4.5 que el operador T^* es densamente definido. Considere la familia de los funcionales lineales sobre \mathcal{H} ,

$$l_h(f) = \langle h, Tf \rangle = \langle T^*h, f \rangle, \quad h \in \mathcal{D}(T^*), \quad \|h\| \leq 1.$$

Entonces, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|l_h(f)| \leq \|Tf\|$, es decir, la familia $\{l_h\}$ es puntualmente acotada y por el principio del acotamiento uniforme [14, Sec. 4.7], existe $c > 0$ tal que $\|l_h\| \leq c$, para todo $h \in \mathcal{D}(T^*)$, $\|h\| = 1$. Además, del teorema representación de Riesz [14, Sec. 3.8], $\|T^*h\| = \|l_h\|$, lo que significa que T^* es acotado. Así, del teorema 3.3.3 se concluye que $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$, es decir, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Esto mismo implica que $T^{**} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y, por lo tanto, del teorema 3.4.5 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ahora bien, para $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{H}$, denotamos $P_{\mathcal{D}(T)}$ como la proyección sobre $\mathcal{D}(T)$ y consideremos el operador $TP_{\mathcal{D}(T)}$ con dominio todo \mathcal{H} . Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ tal que $f_n \rightarrow f$ y $TP_{\mathcal{D}(T)}f_n \rightarrow g$. Entonces, $P_{\mathcal{D}(T)}f_n \rightarrow P_{\mathcal{D}(T)}f$ y $g = P_{\mathcal{D}(T)}f$, debido a que T es cerrado. Así, $TP_{\mathcal{D}(T)}$ es cerrado y, de la primera parte, acotado. Por lo tanto, T es acotado, ya que $T \subset TP_{\mathcal{D}(T)}$. \square

Observación 3.4.8. La primera parte de la demostración anterior indica que T y T^* pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, simultáneamente.

TEOREMA 3.4.9. *Si la inversa de T existe y está densamente definida, entonces T^* tiene inversa y*

$$(59) \quad (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Demostración. De (58) se sigue que $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$, es decir, $(T^*)^{-1}$ existe. Luego, las propiedades de la proposición 3.2.3, la observación 3.3.5 y (56) muestran que

$$\mathcal{G}((T^*)^{-1}) = \mathbb{U}[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathbb{W}[\mathbb{U}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}((T^{-1})^*),$$

de donde se sigue que (59). \square

Es claro que cualquier extensión S de T tiene dominio denso y se cumple que

$$(60) \quad S^* \subset T^*.$$

En efecto, como $\mathbb{W}\mathcal{G}(T) \subset \mathbb{W}\mathcal{G}(S)$, que al tomar complementos ortogonales uno tiene que $[\mathbb{W}\mathcal{G}(S)]^\perp \subset [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$, de donde se sigue (60).

TEOREMA 3.4.10. Si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces

$$(61) \quad (T + S)^* = T^* + S^* .$$

Si además $S^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces

$$(62) \quad (TS)^* = S^*T^* \quad y \quad (ST)^* = T^*S^* .$$

Demostración. Para $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $f \in \mathcal{D}(T)$, uno calcula que

$$\langle h, (T + S)f \rangle = \langle T^*h, f \rangle + \langle S^*h, f \rangle = \langle T^*h + S^*h, f \rangle ,$$

de donde se sigue que $T^* + S^* \subset (T + S)^*$. De la observación 3.4.8, $S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y de lo anterior $(T + S)^* - S^* \subset T^*$. Por lo tanto, sumando S^* en ambas partes se obtiene la otra inclusión.

Para la composición, solo mostraremos la parte izquierda de (62), la otra se demuestra de manera análoga. Note que $\mathcal{D}(TS) = S^{-1}\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S^*T^*) = \mathcal{D}(T^*)$. Si $Sf \in \mathcal{D}(T)$ y $h \in \mathcal{D}(T^*)$ entonces $\langle TSf, h \rangle = \langle Sf, T^*h \rangle = \langle f, S^*T^*h \rangle$, de donde se cumple que $S^*T^* \subset (TS)^*$. Para la otra contención, si $h \in \mathcal{D}((TS)^*)$ entonces para cada $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$\langle Tf, h \rangle = \langle TS(S^{-1}f), h \rangle = \langle (S^{-1}f), (TS)^*h \rangle = \langle f, (S^{-1})^*(TS)^*h \rangle ,$$

lo que implica que $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $T^*h = (S^{-1})^*(TS)^*h$. Por lo tanto, se sigue de la observación 3.4.8 que $(S^{-1})^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y se cumple de (59) que $S^*T^*h = (TS)^*h$, que implica $(TS)^* \subset S^*T^*$. \square

De la descomposición (58) y de (61) se sigue que

$$(63) \quad \mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T - \zeta I)} \oplus \mathcal{N}(T^* - \bar{\zeta}I), \quad \zeta \in \mathbb{C} .$$

La descomposición (63) será de gran utilidad en la sección 3.5.1.

3.5. Teoría espectral.

3.5.1. *El espectro.* Iniciamos esta sección con el **espacio de defecto** (o de deficiencia) de un operador T , el cual viene dado por

$$(64) \quad [\mathcal{R}(T)]^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(T) .$$

El **índice de defecto** d_T de T es la dimensión de su espacio de defecto, esto es,

$$(65) \quad d_T := \dim[\mathcal{R}(T)]^\perp .$$

Observación 3.5.1. Cuando T es densamente definido, de acuerdo con (58), el subespacio en (64) coincide con $\mathcal{N}(T^*)$ y el índice (65) viene dado por $d_T = \dim \mathcal{N}(T^*)$.

Si T es un operador cerrado con inversa acotada, entonces del teorema 3.1.3 y corolario 3.3.10, se tiene que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado y la igualdad $Tf = h$ es soluble si y solo si h es ortogonal al espacio de defecto de T . De esta manera, d_T indica el número de soluciones ortogonales que aseguran la solución de $Tf = h$.

Definición 3.5.2. El conjunto **cuasi-regular** de un operador T viene dado por

$$\hat{\rho}(T) := \{ \zeta \in \mathbb{C} : (T - \zeta I)^{-1} \text{ existe y es acotado} \} .$$

Observación 3.5.3. En virtud del teorema 3.1.3, una condición necesaria y suficiente para que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ es que exista $C_\zeta > 0$ tal que

$$(66) \quad \|(T - \zeta I)f\| \geq C_\zeta \|f\| , \quad \forall f \in \mathcal{D}(T) .$$

TEOREMA 3.5.4. *El conjunto cuasi-regular de T es abierto.*

Demostración. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, tenemos de la observación 3.5.3 que existe $C_\zeta > 0$ tal que (66) se satisface. Es suficiente mostrar que $\mathcal{B}_{C_\zeta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \zeta| < C_\zeta\} \subset \hat{\rho}(T)$. Si $\lambda \in \mathcal{B}_{C_\zeta}$ entonces $C_\zeta - |\lambda - \zeta| > 0$ y para todo $f \in \mathcal{D}(T)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda I)f\| &= \|(T - \zeta I)f - (\lambda - \zeta)f\| \\ &\geq \|(T - \zeta I)f\| - |\lambda - \zeta| \|f\| \geq (C_\zeta - |\lambda - \zeta|) \|f\|, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, como se quería. \square

Observación 3.5.5. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, se tiene que T es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T - \zeta I)$ es cerrado. Esto se sigue directamente del teorema 3.3.10 y de la observación 3.5.3.

Permítanos usar el índice (65) como una función sobre $\hat{\rho}(T)$ como

$$d_T(\zeta) = \dim[\mathcal{R}(T - \zeta I)]^\perp, \quad \zeta \in \hat{\rho}(T).$$

TEOREMA 3.5.6. *Para un operador cerrado T se tiene que el índice $d_T(\zeta)$ es constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.*

Demostración. Sea $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ y $C_\zeta > 0$ que satisface (66). Debido a que cada par de elementos en una componente conexa de $\hat{\rho}(T)$ se pueden unir con bolas abiertas, solo mostraremos el resultado para la bola abierta $\mathcal{B}_{C_\zeta} \subset \hat{\rho}(T)$ que se usó en la demostración del teorema 3.5.4, es decir, para $\lambda \in \mathcal{B}_{C_\zeta}$ probaremos por contradicción que $d_T(\lambda) = d_T(\zeta)$. Note que $C_\zeta > |\zeta - \lambda|$.

Si $d_T(\zeta) < d_T(\lambda)$ entonces existe $h \in [\mathcal{R}(T - \lambda I)]^\perp$ que es ortogonal a $[\mathcal{R}(T - \zeta I)]^\perp$. De la observación 3.5.5, $h \in \mathcal{R}(T - \zeta I)$, es decir, existe $f \in \mathcal{D}(T)$ tal que $h = (T - \zeta I)f$. Además,

$$(67) \quad \|h\| = \|(T - \zeta I)f\| \geq C_\zeta \|f\|.$$

Más aún, como $h \perp \mathcal{R}(T - \lambda I)$,

$$(68) \quad 0 = \langle h, (T - \lambda I)f \rangle = \langle h, (T - \zeta I)f - (\lambda - \zeta)f \rangle = \|h\|^2 - (\lambda - \zeta) \langle h, f \rangle.$$

Así, de (67), (68) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\|h\|^2 \leq |\zeta - \lambda| \|f\| \|h\| < C_\zeta \|f\| \|h\| \leq \|h\|^2,$$

lo cual resulta una contradicción. Para la contradicción de $d_T(\zeta) > d_T(\lambda)$, solo se intercambian los papeles de ζ y λ . \square

Para $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, considere

$$\mathcal{A} + \alpha := \{\zeta + \alpha : \zeta \in \mathcal{A}\} \quad \text{y} \quad \alpha\mathcal{A} := \{\alpha\zeta : \zeta \in \mathcal{A}\}.$$

Es sencillo verificar que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{A} + \alpha \subset \mathcal{B} + \alpha$ y $\alpha\mathcal{A} \subset \alpha\mathcal{B}$.

PROPOSICIÓN 3.5.7. *Para $\alpha \in \mathbb{C}$, lo siguiente se cumple:*

- (a) $\hat{\rho}(T + \alpha I) = \hat{\rho}(T) + \alpha$
- (b) Si $\alpha \neq 0$ entonces $\hat{\rho}(\alpha T) = \alpha\hat{\rho}(T)$.

Demostración. Note que $[(T + \alpha I) - \zeta I]^{-1} = [(T - \zeta - \alpha)I]^{-1}$. Así, $\zeta \in \hat{\rho}(T + \alpha I)$ si y solo si $(\zeta - \alpha) \in \hat{\rho}(T)$, o equivalente a $\zeta \in \hat{\rho}(T) + \alpha$, de donde se sigue el punto (a).

Para el punto (b), es directo verificar que $(\alpha T - \zeta I)^{-1} = \alpha^{-1}(T - \zeta/\alpha I)^{-1}$ existe y es acotado si y solo si $(T - \zeta/\alpha I)^{-1}$ existe y es acotado. Entonces $\zeta \in \hat{\rho}(\alpha T)$ si y solo si $\zeta/\alpha \in \hat{\rho}(T)$, es decir, $\zeta \in \alpha\hat{\rho}(T)$. \square

Definición 3.5.8. El conjunto **regular** (o también llamado resolvente) de un operador lineal cerrado T viene dado por

$$\rho(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (T - \zeta I)^{-1} \text{ existe y pertenece a } \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Para un operador T cerrado y $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, se tiene de la observación 3.5.5 que el índice $d_T(\zeta) = 0$ si y solo si

$$(69) \quad \mathcal{D}((T - \zeta I)^{-1}) = \mathcal{R}(T - \zeta I) = \mathcal{H}.$$

Por otra parte, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T - \zeta I)^{-1}$ es cerrado y por lo tanto acotado. Así, de (69) se sigue que $d_T(\zeta) = 0$ si y solo si $(T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por lo que hemos probado lo siguiente.

COROLARIO 3.5.9. *Para un operador cerrado T , se cumple que $\zeta \in \rho(T)$ si y solo si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ y $d_T(\zeta) = 0$.*

El resultado anterior y el teorema 3.5.6 muestran que $\rho(T)$ consiste en todas las componentes conexas de $\hat{\rho}(T)$, donde el índice de defecto se anula. Esto a su vez implica lo siguiente.

COROLARIO 3.5.10. *El conjunto regular de un operador cerrado es abierto.*

Observación 3.5.11. La condición de T de ser cerrado en la definición 3.5.8 es conveniente, debido a que si T no es cerrado, entonces de la observación 3.5.5, $\mathcal{D}((T - \zeta I)^{-1})$ no es cerrado para todo $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, lo que implicaría que $\rho(T) = \emptyset$.

En lo que resta de la sección, vamos a suponer que T es un operador cerrado. Lo siguiente se sigue de manera análoga a la proposición 3.5.7.

PROPOSICIÓN 3.5.12. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces $\rho(T + \alpha I) = \rho(T) + \alpha$. Si además $\alpha \neq 0$, entonces $\rho(\alpha T) = \alpha \rho(T)$.*

Introducimos los siguientes conjuntos que son de interés en teoría espectral.

$$\begin{aligned} \sigma(T) &:= \mathbb{C} \setminus \rho(T) && (\text{espectro}) \\ \hat{\sigma}(T) &:= \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T) && (\text{núcleo espectral}) \\ \sigma_r(T) &:= \sigma(T) \setminus \hat{\sigma}(T) && (\text{espectro residual}) \\ \sigma_p(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(T - \zeta I) \neq \{0\}\} && (\text{espectro puntual}) \\ \sigma_p^\infty(T) &:= \{\zeta \in \sigma_p(T) : \dim \mathcal{N}(T - \zeta I) = \infty\} && (\text{espectro puntual no discreto}) \\ \sigma_d(T) &:= \{\zeta \in \sigma_p(T) \setminus \sigma_p^\infty(T) : \zeta \text{ es aislado}\} && (\text{espectro discreto}) \\ \sigma_c(T) &:= \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(T - \zeta I) \neq \overline{\mathcal{R}(T - \zeta I)} \right\} && (\text{espectro continuo}) \end{aligned}$$

Es claro que $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma(T)$, y ambos son conjuntos cerrados. Además, el espectro puntual consiste en los autovalores de T . Más aún, los espectros puntual y continuo pueden tener intersección no vacía.

TEOREMA 3.5.13. *La siguiente igualdad se cumple: $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T)$.*

Demostración. Por contraposición, si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ entonces $\mathcal{N}(T - \zeta I) = \{0\}$ y como T es cerrado, de la observación 3.5.5 se sigue que $\mathcal{R}(T - \zeta I)$ es cerrado, es decir, $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Ahora bien, si $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, entonces $(T - \zeta I)^{-1}$ existe y tiene dominio cerrado. Además, como T es cerrado, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T - \zeta I)^{-1}$ es cerrado y ende acotado, i.e., $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. \square

Observación 3.5.14. Si T es cerrado, entonces para cada $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ se sigue que

$$[\mathcal{N}(T - \zeta I)]^\perp = \mathcal{H}.$$

De otra manera, $\mathcal{N}(T - \zeta I)$ es cerrado y no trivial. Además, del teorema 3.5.13 se tiene que $\zeta \in \sigma_p(T) \subset \hat{\sigma}(T) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T)$, lo cual resulta contradictorio.

El espectro, núcleo espectral y espectros puntual y continuo, cumplen similarmente las propiedades vistas en las proposiciones 3.5.7 y 3.5.12.

$$\begin{aligned}\sigma(T + \alpha I) &= \sigma(T) + \alpha, & \sigma(\alpha T) &= \alpha\sigma(T), \\ \hat{\sigma}(T + \alpha I) &= \hat{\sigma}(T) + \alpha, & \hat{\sigma}(\alpha T) &= \alpha\hat{\sigma}(T), \\ \sigma_p(T + \alpha I) &= \sigma_p(T) + \alpha, & \sigma_p(\alpha T) &= \alpha\sigma_p(T), \\ \sigma_c(T + \alpha I) &= \sigma_c(T) + \alpha, & \sigma_c(\alpha T) &= \alpha\sigma_c(T).\end{aligned}$$

TEOREMA 3.5.15. *Si T es un operador densamente definido, entonces:*

- (1) $\sigma(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma(T)$.
- (2) $\sigma_c(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma_c(T)$.
- (3) Si $\zeta \in \sigma_r(T)$ entonces $\zeta \in \sigma_p(T^*) \setminus \sigma_c(T^*)$.

Demostración. Si $\zeta \in \rho(T)$ entonces $(T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y de la observación 3.4.8, de (59) y (61), se tiene que $(T^* - \bar{\zeta} I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir, $\bar{\zeta} \in \rho(T^*)$. Ahora, si $\zeta \in \rho(T^*)$, entonces $\bar{\zeta} \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$, de donde se concluye el punto (1). El punto (2) se sigue del teorema 3.4.6 y de (61).

Para el punto (3), si $\zeta \in \sigma_r(T)$ entonces es directo que $\zeta \in \hat{\rho}(T) \setminus \rho(T)$, i.e., $(T - \zeta I)^{-1}$ existe y es acotado. Como T es cerrado, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T - \zeta I)^{-1}$ es cerrado, esto conlleva a que $\mathcal{R}(T - \zeta I) = \mathcal{D}((T - \zeta I)^{-1})$ es cerrado pero no es todo el espacio \mathcal{H} , ya que $\zeta \notin \rho(T)$. Por lo tanto, del teorema 3.4.6 y de (61), $\mathcal{R}(T^* - \bar{\zeta} I)$ es cerrado y de la descomposición 63, $\mathcal{N}(T^* - \bar{\zeta} I) \neq \{0\}$, lo que implica $\zeta \in \sigma_p(T^*) \setminus \sigma_c(T^*)$. \square

La siguiente propiedad es de gran utilidad en la secuela.

LEMA 3.5.16. *Para T invertible y $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$, se tiene que*

$$(70) \quad \mathcal{R}(T - \zeta I) = \mathcal{R}(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(T - \zeta I) = \mathcal{N}(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I).$$

Demostración. Para $f \in \mathcal{D}(T)$, se tiene que $Tf = g \in \mathcal{D}(T^{-1})$ y

$$(T - \zeta I)f = Tf - \zeta f = g - \zeta T^{-1}g = \left(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I\right)(-\zeta g),$$

de donde se tiene que $\mathcal{R}(T - \zeta I) \subset \mathcal{R}(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I)$. La otra inclusión se sigue intercambiando los roles de T y ζ por T^{-1} y ζ^{-1} , respectivamente. Ahora bien, la segunda igualdad de (70) se sigue del hecho de que $Tf = \zeta f$ si y solo si $\zeta^{-1}f = T^{-1}f$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$. \square

Bajo ciertas condiciones, mostremos un comportamiento de los espectros de la inversa de un operador.

TEOREMA 3.5.17. *Si T es invertible y $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$. Entonces, $\zeta \in \sigma(T)$ (resp. $\hat{\sigma}(T)$, $\sigma_p^\infty(T)$, $\sigma_j(T)$, con $j = c, d, p, r$) si y solo si $\zeta^{-1} \in \sigma(T^{-1})$ (resp. $\hat{\sigma}(T^{-1})$, $\sigma_p^\infty(T^{-1})$, $\sigma_j(T^{-1})$, con $j = c, d, p, r$).*

Demostración. De (70) la afirmación se cumple para el espectro puntual, puntual no discreto, discreto y continuo. Además, del teorema 3.5.13, la afirmación se cumple para el núcleo espectral. Lo anterior implica que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ si y solo si $\zeta^{-1} \in \hat{\rho}(T^{-1})$, y en este caso, junto con (70), (69) y corolario 3.5.9, se llega a que $\zeta \in \rho(T)$ si y solo si $\zeta^{-1} \in \rho(T^{-1})$, es decir, la afirmación se cumple para el espectro y por consiguiente, para el espectro residual. \square

3.5.2. La resolvente. Permita iniciar directamente con la definición de la resolvente de un operador cerrado.

Definición 3.5.18. La **resolvente** de un operador cerrado T se define como

$$(71) \quad R_\zeta(T) := (T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \zeta \in \rho(T).$$

Usualmente en la literatura la resolvente se define como $(\zeta I - T)^{-1}$ en vez de (71).

TEOREMA 3.5.19. *Para operadores cerrados T, S tales que $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, lo siguiente se cumple:*

$$(72) \quad R_\zeta(T) - R_\eta(T) = (\zeta - \eta)R_\zeta(T)R_\eta(T), \quad \zeta, \eta \in \rho(T).$$

$$(73) \quad R_\zeta(T) - R_\zeta(S) = R_\zeta(T)(S - T)R_\zeta(S), \quad \zeta \in \rho(T) \cap \rho(S).$$

Demostración. Si $\zeta \in \rho(T) \cap \rho(S)$ y $f \in \mathcal{H}$, se sigue que $R_\zeta(S)f \in \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ y

$$\begin{aligned} R_\zeta(T)(S - T)R_\zeta(S)f &= R_\zeta(T)((S - \zeta I) - (T - \zeta I))R_\zeta(S)f \\ &= R_\zeta(T)f - R_\zeta(S)f, \end{aligned}$$

de donde se sigue (73). La fórmula (72) se sigue de (73), substituyendo $S = T + (\zeta - \eta)I$ y usando la relación $R_\zeta(S) = R_\eta(T)$. \square

A las fórmulas (72) y (73) se les conoce como la primera y segunda identidad de la resolvente, respectivamente. Además, intercambiando los papeles de ζ y η en (72), se tiene que

$$R_\zeta(T) - R_\eta(T) = (\zeta - \eta)R_\eta(T)R_\zeta(T),$$

lo cual implica que $R_\zeta(T)$ y $R_\eta(T)$ conmutan.

Concluimos la sección con la siguiente afirmación que muestra que la resolvente $R_\zeta(T)$ es una función analítica sobre el conjunto $\rho(T)$, con valores en el espacio de Banach $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

TEOREMA 3.5.20. *Sea $\zeta \in \rho(T)$, y $\eta \in \mathbb{C}$ tales que $|\eta - \zeta| < \|R_\zeta(T)\|^{-1}$. Entonces, $\eta \in \rho(T)$ y*

$$(74) \quad R_\eta(T) = u\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (\eta - \zeta)^n R_\zeta(T)^{n+1}.$$

Particularmente,

$$(75) \quad \lim_{\eta \rightarrow \zeta} \|R_\eta(T) - R_\zeta(T)\| = 0.$$

Demostración. Tenemos de la observación 3.5.3 que la desigualdad en (66) es válida para $C_\zeta = \|R_\zeta(T)\|^{-1}$. Así, por hipótesis $|\eta - \zeta| < C_\zeta$, lo cual implica que $\eta \in \hat{\rho}(T)$ y del teorema 3.5.6 se tiene que $d_T(\eta) = d_T(\zeta) = 0$. Por lo tanto, del corolario 3.5.9 $\eta \in \rho(T)$. Ahora, como $\|(\eta - \zeta)R_\zeta(T)\| < 1$, existe un número positivo $C_r < 1$ tal que $\|(\eta - \zeta)R_\zeta(T)f\| \leq C_r \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\|[I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]f\| \geq \|f\| - \|(\eta - \zeta)R_\zeta(T)f\| \geq (1 - C_r) \|f\|.$$

Del teorema 3.1.3, el operador $I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene inversa acotada y se cumple que

$$I = [I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]^{-1}[I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]$$

es decir, $[I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]^{-1} = I + (\eta - \zeta)[I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]^{-1}R_\zeta(T)$ y recursivamente

$$(76) \quad [I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]^{-1} = u\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (\eta - \zeta)^n R_\zeta(T)^n.$$

Por otra parte, la fórmula (72) implica $R_\zeta(T) = [I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]R_\eta(T)$, el cual produce $R_\eta(T) = [I - (\eta - \zeta)R_\zeta(T)]^{-1}R_\zeta(T)$. Substituyendo lo anterior en (76) se llega a (74). La operación (75) se sigue de (74), teniendo en cuenta que las funciones analíticas valuadas en operadores son continuas. \square

De la fórmula (74), se sigue de manera particular que para $f, g \in \mathcal{H}$, la función compleja $\zeta \mapsto \langle g, R_\zeta(T)f \rangle$ es analítica sobre $\rho(T)$.

3.6. Operadores simétricos e isométricos.

3.6.1. *Operadores simétricos y autoadjuntos.* Para cualquier operador lineal T en \mathcal{H} , la identidad

$$(77) \quad \langle g, Tf \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle f + i^k g, T(f + i^k g) \rangle, \quad f, g \in \mathcal{D}(T)$$

es bien conocida como la **identidad de polarización** y se demuestra directamente desarrollando la parte derecha de (77).

Definición 3.6.1. Un operador A se dice ser **simétrico** si $\langle f, Af \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \mathcal{D}(A)$.

El siguiente resultado es una equivalencia de al definición 3.6.1.

LEMA 3.6.2. *Un operador A es simétrico si y solo si*

$$(78) \quad \langle f, Ag \rangle = \langle Af, g \rangle, \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{D}(A).$$

Demostración. Si A es simétrico entonces de (77) se sigue (78). El otro sentido es directo haciendo $g = f$. \square

Veamos ahora una caracterización de los operadores simétricos respecto a su conjunto cuasi-regular.

TEOREMA 3.6.3. *Un operador A es simétrico si y solo si los semi-planos \mathbb{C}_+ y \mathbb{C}_- están contenidos en $\hat{\rho}(A)$, y para todo $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$(79) \quad \|(A - \zeta I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \zeta|}.$$

Demostración. Suponemos que A es simétrico y sea $\zeta \in \mathbb{C}_+$, entonces para $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \langle Af, f \rangle = \operatorname{Im} \langle (A - \zeta I)f, f \rangle - \operatorname{Im} \zeta \|f\|^2 \\ &\leq |\langle (A - \zeta I)f, f \rangle| - \operatorname{Im} \zeta \|f\|^2 \leq \|(A - \zeta I)f\| \|f\| - \operatorname{Im} \zeta \|f\|^2, \end{aligned}$$

que para $f \neq 0$ (de otra manera es directo), $\operatorname{Im} \zeta \|f\| \leq \|(A - \zeta I)f\|$. Por lo tanto, se tiene de la observación 3.5.3 que $\zeta \in \hat{\rho}(A)$ y la última desigualdad conlleva a $\|(A - \zeta I)^{-1}\| \leq 1/\operatorname{Im} \zeta$. Para $\zeta \in \mathbb{C}_-$, se demuestra usando lo anterior, teniendo en cuenta que $-A$ es simétrico y $-\zeta \in \mathbb{C}_+$.

Inversamente, si (79) se cumple bajo las supuestas condiciones, entonces se sigue para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ y $\tau > 0$ que $\|f\| \leq \tau^{-1} \|(A - \alpha\tau I)f\|$, donde $\alpha = \pm i$. Entonces,

$$\|f\|^2 \leq \tau^{-2} \|(A - \alpha\tau I)f\|^2 = \tau^{-2} \|Af\|^2 + \|f\|^2 - 2\tau^{-1} \operatorname{Re} \langle Af, \alpha f \rangle.$$

Así, $(2\tau)^{-1} \|Af\|^2 \geq \operatorname{Re} \langle Af, \alpha f \rangle$ y haciendo $\tau \rightarrow \infty$, se tiene $0 \geq \operatorname{Re} \langle Af, \alpha f \rangle$, i.e., $0 \geq \pm \operatorname{Im} \langle Af, f \rangle$, de donde se sigue que $\langle Af, f \rangle \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, A es simétrica. \square

Debido al teorema 3.6.3, los semi-planos \mathbb{C}_+ , \mathbb{C}_- son componentes conexas de conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(A)$ de un operador simétrico A . De esto se cumple que $\hat{\sigma}(A) \subset \mathbb{R}$. Además, como consecuencia del teorema 3.5.6, el índice de defecto de un operador simétrico cerrado A permanece constante tanto en \mathbb{C}_+ como en \mathbb{C}_- . Entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 3.6.4. Los **índices de defecto superior e inferior** de un operador simétrico cerrado A vienen dados respectivamente por

$$(80) \quad \eta_+(A) := d_A(\zeta) \quad \text{y} \quad \eta_-(A) := d_A(\bar{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}_+.$$

COROLARIO 3.6.5. *Si un operador simétrico cerrado A tiene al menos un punto cuasi-regular λ_0 en \mathbb{R} , entonces $\eta_+(A) = \eta_-(A) = d_A(\lambda_0)$.*

Demostración. Se sigue directamente debido a que $d_A(\lambda)$ es constante dentro de un disco de centro λ_0 . \square

En lo siguiente abordamos operadores simétricos que son densamente definidos.

LEMA 3.6.6. *Un operador densamente definido A es simétrico si y solo si $A \subset A^*$.*

Demostración. Un cálculo simple muestra que $A \subset A^*$ si y solo si $\langle g, Af \rangle = \langle Ag, f \rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{D}(A)$. Por lo tanto, de lema 3.6.2 se concluye la afirmación. \square

Un operador simétrico cerrado densamente definido A es necesariamente cerrable y su cerradura también es simétrica, debido a que A^* es cerrado y $(\bar{A})^* = A^*$. Además, si S es una extensión simétrica de A entonces de (60) se tiene que $S^* \subset A^*$ y se cumple la siguiente cadena:

$$(81) \quad A \subset S \subset S^* \subset A^*.$$

Se sigue de (81) que cualquier extensión simétrica de A es restricción de A^* . Un operador simétrico que no tiene extensiones simétricas se le conoce como **maximal** y por consiguiente es cerrado.

Definición 3.6.7. Un operador densamente definido A es **autoadjunto** si $A = A^*$.

Es claro que un operador autoadjunto es simétrico y cerrado. Sin embargo, en general lo contrario no es cierto. De esta manera, la noción de ser simétrico resulta ser más extensa en comparación con la de ser autoadjunto. Para $A = A^*$ todas las inclusiones en (81) se convierten en igualdades. Esto significa que un operador autoadjunto es simétrico maximal, pero existen operadores simétricos maximales que no son autoadjuntos.

El problema de investigar y describir todas las posibles extensiones simétricas (especialmente autoadjuntas) de operadores simétricos es importante en las aplicaciones y constituyen el contenido de la teoría de extensión de operadores simétricos [19, 4].

Un operador cerrable no cerrado A , tal que \bar{A} es autoadjunto, se dice ser **esencialmente autoadjunto**. Estos operadores son simétricos, debido a que $A \subset \bar{A} = A^*$. El término esencialmente autoadjunto expresa que uno puede obtener una extensión autoadjunta por el simple procedimiento de tomar la cerradura.

Observación 3.6.8. El adjunto de un operador simétrico densamente definido A , es simétrico si y solo si A es esencialmente autoadjunto. En efecto, A^* es simétrico si y solo si $A^* \subset A^{**} = \bar{A} \subset (\bar{A})^* = A^*$, de donde se sigue que $\bar{A} = A^*$.

COROLARIO 3.6.9. *Un operador simétrico con dominio todo el espacio es autoadjunto y acotado.*

Demostración. Como A es simétrico con $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ entonces se tiene del lema 3.6.6 que $A \subset A^*$. Ahora, si $f \in \mathcal{D}(A^*)$, entonces $f \in \mathcal{D}(A)$ y $A^*f = Af$, esto implica que $A^* \subset A$. Por lo tanto A es autoadjunto. Luego, A es cerrado con dominio cerrado y por consiguiente acotado. \square

Con base en la descomposición (63) y de (80), los índices de defecto de un operador simétrico cerrado densamente definido A , vienen dados por

$$\eta_+(A) = \dim \mathcal{N}(A^* - \bar{\zeta}I) \quad \text{y} \quad \eta_-(A) = \dim \mathcal{N}(A^* - \zeta I), \quad \zeta \in \mathbb{C}_+.$$

Lo siguiente muestra una caracterización de operadores autoadjuntos.

TEOREMA 3.6.10. *Si A es simétrico, cerrado y densamente definido, entonces las siguientes son equivalentes:*

- (a) A es autoadjunto.
- (b) $\eta_{\pm}(A) = 0$.
- (c) $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.
- (d) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Para $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$ se tiene que $A^* - \zeta I = A - \zeta I$ es invertible, es decir, $\mathcal{N}(A^* - \zeta I) = \{0\}$. Por lo tanto, $\eta_{\pm}(A) = 0$. (b) \Rightarrow (c): Uno calcula de los corolarios 3.5.9 y 3.6.5 que $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ y por consiguiente son iguales.

(c) \Rightarrow (d): Es simple que $\sigma(A) = \hat{\sigma}(A) \subset \mathbb{R}$. (d) \Rightarrow (a): Note que $\pm i \in \rho(A)$, es decir, $(A \pm iI)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces, se sigue de (63) que

$$(82) \quad \mathcal{R}(A - iI) = \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^* - i) = \{0\}.$$

De esta manera, para $f \in \mathcal{D}(A)^*$, existe $h \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(A - iI)h = (A^* - iI)f$. Como $A \subset A^*$, se tiene que $(A^* - iI)(h - f) = 0$ y de (82), $h = f$, es decir, $A^* \subset A$. Por lo tanto $A = A^*$. \square

Uno frecuentemente se encuentra en aplicaciones con operadores simétricos semi-acotados, los cuales son caracterizados de la siguiente manera.

Definición 3.6.11. Un operador A simétrico es **semi-acotado inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$(83) \quad \langle f, Af \rangle \geq m \|f\|^2, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(A).$$

Además, A es **semi-acotado superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$(84) \quad \langle f, Af \rangle \leq M \|f\|^2, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(A).$$

Al máximo posible valor de $m = m_A$ en (83) y al mínimo posible valor de $M = M_A$ en (84) se les conoce como la mayor cota inferior y la menor cota superior y están determinadas por

$$(85) \quad m_A = \inf_{\substack{f \in \mathcal{D}(A), \\ \|f\| = 1}} \langle f, Af \rangle \quad ; \quad M_A = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(A), \\ \|f\| = 1}} \langle f, Af \rangle,$$

respectivamente.

PROPOSICIÓN 3.6.12. *Sea A un operador simétrico:*

(1) *Si A es semi-acotado inferiormente entonces $(-\infty, m_A) \subset \hat{\rho}(A)$.*

(2) *Si A es semi-acotado superiormente entonces $(M_A, \infty) \subset \hat{\rho}(A)$.*

En cualquier caso se tiene que $\eta_+(A) = \eta_-(A)$.

Demostración. Si A es semi-acotado inferiormente entonces para $\lambda \in (-\infty, m_A)$,

$$\|f\| \|(A - \lambda I)f\| \geq \langle f, (A - \lambda I)f \rangle \geq (m_A - \lambda) \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{D}(A),$$

lo cual cumple la condición (3.1.3) de la observación 3.5.3, es decir, $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, de donde se sigue el punto (1). Ahora, si A es semi-acotado superiormente, entonces $-A$ es semi-acotado inferiormente con menor cota inferior $-M_A$. Así, del punto (1), $(-\infty, -M_A) \subset \hat{\rho}(-A)$, que implica (2). El corolario 3.6.5 indica que los índices de defecto de A son iguales. \square

Observación 3.6.13. Como un operador simétrico A cumple que $\mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(A)$, la proposición 3.6.12 indica que si A es semi-acotado inferiormente, entonces $\hat{\sigma}(A) \subset [m_A, \infty)$. Por otra parte, si A es semi-acotado superiormente, entonces $\hat{\sigma}(A) \subset (-\infty, M_A]$.

Cuando un operador simétrico A es semi-acotado inferiormente, con $m_A = 0$, se le conoce como **operador positivo** (o no negativo para algunos autores), se denotan como $A \geq 0$ y de la observación 3.6.13, el núcleo espectral de A cumple $\hat{\sigma}(A) \subset [0, \infty)$. Cuando A es semi-acotado superiormente, con $M_A = 0$ se le conoce como **operador negativo** (o no positivo), se denotan como $A \leq 0$ y $\hat{\sigma}(A) \subset (-\infty, 0]$. Es claro que si $A \geq 0$ entonces $-A \leq 0$.

LEMA 3.6.14. *Si un operador autoadjunto A pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces*

$$(86) \quad \|A\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}, \\ \|f\| = 1}} |\langle f, Af \rangle|.$$

Demostración. Haciendo β el lado derecho de la igualdad (86), se tiene de (44) que $\beta \leq \|A\|$. Basta demostrar que $a = \|Af\| \leq \beta$, para $f \in \mathcal{H}$ con $\|f\| = 1$. Suponemos $a \neq 0$ (de otra manera es directo) y definamos $u_{\pm} = a^{\frac{1}{2}}f \pm a^{-\frac{1}{2}}Af$. Como $A = A^*$, es directo calcular que

$$\langle u_+, Au_+ \rangle - \langle u_-, Au_- \rangle = 4a \quad \text{y} \quad \|u_{\pm}\|^2 = 2a \pm 2\langle f, Af \rangle$$

De esta manera,

$$a^2 = \frac{1}{4} (\langle u_+, Au_+ \rangle - \langle u_-, Au_- \rangle) \leq \frac{1}{4} \beta (\|u_+\|^2 + \|u_-\|^2) = a\beta,$$

de donde se concluye la afirmación. □

Uno puede verificar directamente de la observación 3.3.8 que un operador autoadjunto y acotado pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

TEOREMA 3.6.15. *Un operador autoadjunto A pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y solo si es semi-acotado superiormente e inferiormente. En este caso*

$$(87) \quad \|A\| = \max \{ |m_A|, |M_A| \} .$$

Demostración. Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces se tiene de (86) que

$$-\|A\| \leq \langle f, Af \rangle \leq \|A\|, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H},$$

es decir, A es semi-acotado tanto superiormente como inferiormente. Inversamente, haciendo $\alpha = \max \{ |m_A|, |M_A| \}$, se tiene que $|\langle h, Ah \rangle| \leq \alpha \|h\|^2$, para todo $h \in \mathcal{D}(A)$. Entonces, para $f, g \in \mathcal{D}(A)$ de norma uno, se cumple de (77) que

$$|\langle g, Af \rangle| \leq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 |\langle f + i^k g, A(f + i^k g) \rangle| \leq \frac{1}{4} \alpha \sum_{k=0}^3 \|f + i^k g\|^2 = 2\alpha .$$

de donde se sigue que A es acotado y, por lo tanto, pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. La igualdad (87) se sigue de (85), teniendo en cuenta que $-\inf \langle f, Tf \rangle = \sup -\langle f, Tf \rangle$. □

La observación 3.6.13 y los teoremas 3.6.10, 3.6.15, implican que el espectro de un operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es acotado y satisface

$$\sigma(A) \subset [m_A, M_A] .$$

3.6.2. Operadores isométricos y unitarios. Aparte de la clase de los operadores simétricos, la clase de los operadores isométricos son de gran importancia en la física-matemática que merece su investigación. Las propiedades de los operadores isométricos son análogas en muchos aspectos a las de los operadores simétricos, aunque existen distinciones esenciales. La noción de un operador isométrico está estrechamente relacionada con la de un isomorfismo isométrico en espacios de Hilbert.

Definición 3.6.16. Un operador V es **isométrico** si $\|Vf\| = \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(V)$.

Del teorema 3.1.3, un operador isométrico tiene inversa, la cual es también un operador isométrico. Además, es simple ver que el dominio y el rango de un operador isométrico cerrado, resultan ser subespacios cerrados que tienen la misma dimensión.

LEMA 3.6.17. *Un operador V es isométrico si y solo si*

$$(88) \quad \langle Vf, Vg \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{D}(V) .$$

Demostración. Si V es isométrico, entonces de la identidad de polarización (77), con $T = I$, se sigue (88). El inverso es directo haciendo $f = g$. □

Permita denotar el disco unitario en \mathbb{C} como

$$\mathbb{D} := \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1 \} ,$$

cuya frontera viene dada por $\partial\mathbb{D} := \{ \zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1 \}$.

TEOREMA 3.6.18. *Un operador V es isométrico si y solo si existe su inversa, $\mathbb{C} \setminus \partial \mathbb{D} \subset \hat{\rho}(V), \hat{\rho}(V^{-1})$ y*

$$(89) \quad \|(V - \zeta I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|1 - |\zeta||}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \partial \mathbb{D}$$

donde V^{-1} también cumple (89).

Demostración. Si V es isométrico entonces para $\zeta_1 \in \mathbb{D}, \zeta_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ y $f \in \mathcal{D}(V)$,

$$(90) \quad \begin{aligned} \|(V - \zeta_1 I)f\| &\geq \|Vf\| - |\zeta_1| \|f\| = (1 - |\zeta_1|) \|f\|; \\ \|(V - \zeta_2 I)f\| &\geq |\zeta_2| \|f\| - \|Vf\| = (|\zeta_2| - 1) \|f\|, \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue de la observación 3.5.3 que $\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{\rho}(V)$. Además, (90) implica (89). Como V es isométrico, V^{-1} también lo es y satisface lo anterior. Inversamente, si V, V^{-1} satisfacen (89), entonces para todo $f \in \mathcal{D}(V)$ y $g \in \mathcal{D}(V^{-1})$, $\|Vf\| \geq \|f\|$ y $\|V^{-1}g\| \geq \|g\|$. Por lo tanto, haciendo $g = Vf$, se llega a que V es isométrico. \square

El teorema 3.6.18 indica que $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ y \mathbb{D} son componentes conexas de conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(V)$ de un operador isométrico V , es decir, $\hat{\sigma}(V) \subset \partial \mathbb{D}$. De esta manera, como una consecuencia del teorema 3.5.6, podemos definir lo siguiente.

Definición 3.6.19. Los **índices de defecto exterior e interior** de un operador isométrico cerrado V , vienen dados respectivamente por

$$(91) \quad \begin{aligned} \eta_e(V) &:= d_V(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \\ \eta_i(V) &:= d_V(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado se sigue de manera directa.

COROLARIO 3.6.20. *Si un operador isométrico cerrado V tiene al menos un punto cuasi-regular λ_0 en $\partial \mathbb{D}$, entonces $\eta_e(V) = \eta_i(V) = d_V(\lambda_0)$.*

Para efectos prácticos, conviene dar la siguiente caracterización de los índices (91).

TEOREMA 3.6.21. *Los índices de defecto de un operador isométrico cerrado V cumplen lo siguiente:*

$$(92) \quad \eta_e(V) = \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp, \quad \eta_i(V) = \dim[\mathcal{R}(V)]^\perp.$$

Demostración. Note de (91) que $\eta_i(V) = d_V(0) = \dim[\mathcal{R}(V)]^\perp$. Para la primera igualdad de (92), mostraremos por contradicción que $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp = \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$, con $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Si $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp < \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$ entonces existe $0 \neq h \in [\mathcal{D}(V)]^\perp$, tal que es ortogonal a $[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp$. Se sigue de la observación 3.5.5 que $h \in \mathcal{R}(V - \zeta I)$, es decir, existe $0 \neq f \in \mathcal{D}(V)$, tal que $(V - \zeta I)f = h$ y $h \perp f$. Como V es isométrico,

$$\|f\|^2 = \|Vf\|^2 = \|h + \zeta f\|^2 = \|h\|^2 + |\zeta|^2 \|f\|^2 > \|f\|^2,$$

que resulta una contradicción. Ahora bien, si $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp > \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$ entonces existe $h \in [\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp$, tal que $h \perp [\mathcal{D}(V)]^\perp$, es decir, $h \in \mathcal{D}(V)$ y

$$0 = \langle (V - \zeta I)h, h \rangle = \langle Vh, h \rangle - \zeta \|h\|^2.$$

Así, $\|h\|^2 < |\zeta| \|h\|^2 = |\langle Vh, h \rangle| \leq \|h\|^2$, que resulta contradictorio. \square

Lo siguiente da una caracterización de operadores isométricos que son densamente definidos. Note que un operador simétrico, cerrado y densamente definido V , automáticamente pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver observación 3.3.8).

LEMA 3.6.22. *Sea V invertible y densamente definido. Entonces V es isométrico si y solo si $V^{-1} \subset V^*$.*

Demostración. Es sencillo verificar que $V^{-1} \subset V^*$ si y solo si $\langle Vg, Vf \rangle = \langle g, f \rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{D}(V)$. Por lo tanto, en virtud del lema 3.6.17, se sigue la afirmación. \square

Definición 3.6.23. Un operador invertible y densamente definido V es **unitario** si satisface que $V^{-1} = V^*$.

Un operador unitario es un operador isométrico en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pero en general lo contrario no es cierto, es decir, la noción de ser isométrico es más amplia a la de ser unitario. Lo siguiente da una caracterización de operadores unitarios.

TEOREMA 3.6.24. *Si V es isométrico cerrado densamente definido, entonces las siguientes son equivalentes:*

- (a) V es unitario.
- (b) $V, V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- (c) $\eta_e(V) = \eta_i(V) = 0$.
- (d) $\hat{\rho}(V) = \rho(V)$.
- (e) $\sigma(V) \subset \partial\mathbb{D}$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Se sigue de la observación 3.4.8. (b) \Rightarrow (c): Es directo del teorema 3.6.21. (c) \Rightarrow (d): Los corolarios 3.5.9 y 3.6.20 conllevan a que $\hat{\rho}(V) \subset \rho(V)$. Lo que implica que sean iguales. (d) \Rightarrow (e): Es simple ver que $\sigma(V) = \hat{\sigma}(V) \subset \partial\mathbb{D}$. (e) \Rightarrow (a): Note que $0 \in \rho(V)$, es decir, $V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, la observación 3.4.8 implica que $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, se sigue del lema 3.6.22 que $V^{-1} = V^*$, debido a que ambos pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. \square

3.7. Operadores de posición y momento. Dedicamos esta sección a dos operadores lineales no acotados que desempeñan un papel importante en la mecánica cuántica y áreas afines. Particularmente, son de relevancia en la sección 4.

3.7.1. Operador de posición. Consideramos $L_2(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones cuadrado integrable en \mathbb{R} , cuyo producto interno es $\langle f, g \rangle = \int \overline{f(t)}g(t)dt$.

Definición 3.7.1. El **operador de posición** $Q: \mathcal{D}(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ viene dado por $Qf(t) = tf(t)$, donde

$$\mathcal{D}(Q) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int (1 + t^2) |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \subset L_2(\mathbb{R}).$$

El dominio de Q contiene al espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en \mathbb{R}), el cual es un conjunto denso en $L_2(\mathbb{R})$ y esto conlleva a que Q sea densamente definido. Sin embargo, $\mathcal{D}(Q)$ está contenido propiamente en $L_2(\mathbb{R})$, pues la función

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

pertenece a $L_2(\mathbb{R})$ pero no al dominio de Q .

TEOREMA 3.7.2. *El operador de posición es autoadjunto y no acotado.*

Demostración. Uno calcula de manera directa que

$$\langle Qf, f \rangle = \int \overline{tf(t)}f(t)dt = \int t|f(t)|^2 dt \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(Q)$$

de donde se sigue que Q es simétrico. Como Q es densamente definido, del lema 3.6.6 se tiene $Q \subset Q^*$. Ahora bien, si $g \in \mathcal{D}(Q^*)$, entonces debido a que $\langle Qf, g \rangle = \langle f, Q^*g \rangle$, para todo $f \in \mathcal{D}(Q)$, se tiene que $tg(t) = Q^*g(t) \in L_2(\mathbb{R})$, es decir, $g \in \mathcal{D}(Q)$. Por lo tanto, Q es autoadjunto.

Para mostrar que Q no es acotado, consideremos la sucesión de funciones características $\{\mathbb{1}_{[n, n+1]}\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Entonces, un cálculo directo muestra que $\|\mathbb{1}_{[n, n+1]}\| = 1$ y $\|Qf_n\| > n \rightarrow \infty$, de donde se concluye la afirmación. \square

El operador de posición, al ser autoadjunto, es también cerrado. Veamos a continuación algunas de sus propiedades espectrales.

TEOREMA 3.7.3. *El operador de posición satisface lo siguiente:*

$$\sigma_p(Q) = \emptyset \quad y \quad \sigma_c(Q) = \sigma(Q) = \mathbb{R}.$$

Demostración. Notemos primeramente de los teoremas 3.6.10 y 3.7.2 que $\sigma(Q) \subset \mathbb{R}$. Ahora bien, consideremos cualquier $\zeta \in \mathbb{R}$. Si $Qf = \zeta f$ entonces $(t - \zeta)f(t) = 0$. Así, $f(t) = 0$ casi para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $f = 0$, de donde se cumple que $\sigma_p(Q) = \emptyset$. Además, los teoremas 3.5.13 y 3.6.10 implican que $\sigma_c(Q) = \hat{\sigma}(Q) = \sigma(Q)$. Solo falta mostrar que $\zeta \in \sigma(Q)$.

Para $C > 0$, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $C > 1/n$ y denote $\Delta_n = (\zeta - 1/n, \zeta + 1/n)$. Entonces, la función característica $\mathbb{1}_{\Delta_n}$ es no cero en $\mathcal{D}(Q)$ y

$$\|(Q - \zeta I)\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2 = \int (t - \zeta)^2 \mathbb{1}_{\Delta_n}^2 dt \leq \frac{1}{n^2} \|\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2 < C^2 \|\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2.$$

De la observación 3.5.3 y del teorema 3.6.10 se tiene que $\zeta \notin \rho(Q)$, i.e., $\zeta \in \sigma(Q)$. \square

El teorema anterior implica que $\rho(Q) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Así para $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, uno puede verificar que la resolvente de Q viene dada por

$$R_\eta(Q)f(t) = \frac{1}{t - \eta} f(t), \quad f \in L_2(\mathbb{R}).$$

3.7.2. *Operador de momento.* Para $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, decimos que una función f sobre el intervalo $[a, b]$ es **absolutamente continua**, si existe una función $h \in L_1(a, b)$ tal que (c.f. [19, Ap. E])

$$f(t) = f(a) + \int_a^t h(x) dx, \quad t \in [a, b].$$

Sea $AC[a, b]$ el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $[a, b]$. Si $f \in AC[a, b]$ entonces f es continua en $[a, b]$ y es diferenciable casi en todas partes con $f' = h$ casi en todas partes sobre $[a, b]$. Denote,

$$H^1(\mathbb{R}) := \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f \in AC[a, b] \text{ para todo } [a, b] \in \mathbb{R} \text{ y } f' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

El espacio $H^1(\mathbb{R})$ es un conjunto denso en $L_2(\mathbb{R})$ debido a que contiene a $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Además, para $f \in H^1(\mathbb{R})$, se tiene (ver [19, lem. 1.11])

$$(93) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) = \lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = 0.$$

Definición 3.7.4. El **operador de momento** $P: H^1(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ viene dado por $Pf(t) = -if'(t)$.

Generalmente, el operador de momento en la literatura es $Pf(t) = -i\hbar f'(t)$. A efectos de simplificar notación, consideramos la constante de Dirac $\hbar = 1$.

TEOREMA 3.7.5. *El operador de momento es autoadjunto y no acotado.*

Demostración. Para $f, g \in H^1(\mathbb{R})$, de (93) y mediante integración por partes,

$$\langle f, Pg \rangle = -i \int \overline{f(t)} g'(t) dt = -i \overline{f(t)} g(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int -i \overline{f'(t)} g(t) dt = \langle Pf, g \rangle,$$

lo cual implica de los lemas 3.6.2 y 3.6.6 que $P \subset P^*$. Además, $\mathcal{D}(P^*) = H^1(\mathbb{R})$ (c.f. [4, Sec. 4.8] y por consiguiente $P = P^*$.

Para verificar que el operador P no es acotado. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere la función $f_n(t) = (3n)^{1/2}(1-nt)\mathbb{1}_{[0, 1/n]}(t)$. Entonces, uno calcula de manera simple que $\|f_n\| = 1$ y $\|Qf_n\| = \sqrt{3}n \rightarrow \infty$, de donde se sigue la afirmación. \square

TEOREMA 3.7.6. *El operador de momento cumple lo siguiente:*

$$\sigma_p(P) = \emptyset \quad y \quad \sigma_c(P) = \sigma(P) = \mathbb{R}.$$

Demostración. Dado que $P = P^*$, el teorema 3.6.10 implica $\sigma(P) \subset \mathbb{R}$. Luego para $\zeta \in \mathbb{R}$, es sencillo verificar que si $Pf = \zeta f$, como $f \in H^1(\mathbb{R})$ y satisface (93), entonces $f = 0$, o bien, $\sigma_p(P) = \emptyset$. Por otra parte, podemos elegir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ distinto de cero y considerar $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} e^{i\zeta t} f(\varepsilon t)$, con $\varepsilon > 0$. Entonces, uno calcula de manera sencilla que $\|h_\varepsilon\| = \|f\|$ y $\|(P - \zeta I)h_\varepsilon\| = \varepsilon \|f'\|$, se sigue de la observación 3.5.3 que $\zeta \notin \hat{\rho}(P)$, es decir, $\zeta \in \hat{\sigma}(P)$. Por lo tanto, $\mathbb{R} \subset \hat{\sigma}(P) \subset \sigma(P) \subset \mathbb{R}$, lo cual implica que son iguales. Note del teorema 3.5.13 que $\sigma_c(P) = \sigma(P)$. \square

Para $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \rho(P)$, la resolvente del operador de momento viene dada por

$$R_\eta(P)f(t) = \begin{cases} i \int_{-\infty}^t e^{i\eta(t-\tau)} f(\tau) d\tau, & \text{Im } \eta > 0 \\ -i \int_t^{-\infty} e^{i\eta(t-\tau)} f(\tau) d\tau, & \text{Im } \eta < 0 \end{cases} \quad (f \in L_2(\mathbb{R})).$$

Problemas de la sección.

P.3.1 Considere un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle f, Af \rangle > 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$. Muestre que la forma sesquilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, Ag \rangle \end{aligned}$$

define un producto interno en \mathcal{H} .

P.3.2 Sea $l_2(\mathbb{N})$ el espacio Hilbert de las sucesiones cuadrado sumables con base canónica $\{e_n\}$ y para cada $j \in \mathbb{N}$, considere el operador j -desplazamiento

$$(94) \quad S_j = \sum_n |e_{n+j}\rangle \langle e_n|.$$

Demuestre que $\{S_j\}$ converge débilmente al operador 0 pero no fuertemente.

P.3.3 Considere el espacio de Hilbert del problema anterior y el proyector

$$P_j = |e_j\rangle \langle e_j|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que P_n converge fuertemente al operador 0 pero no uniformemente.

P.3.4 Muestre que el sentido inverso de la proposición 3.1.2 no siempre se cumple.

Sugerencia: exhiba un operador invertible S y uno no invertible T , tales que $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(S) = \{0\}$.

P.3.5 Muestre la equivalencia de las siguientes normas:

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_* := \sqrt{\|f\|^2 + \|g\|^2} \quad ; \quad \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| := \|f\| + \|g\|, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

P.3.6 Pruebe que dado un operador T en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, el espacio lineal $(\mathcal{D}(T), \langle \cdot, \cdot \rangle_T)$, donde

$$\langle f, g \rangle_T := \left\langle \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ Tg \end{pmatrix} \right\rangle, \quad f, g \in \mathcal{D}(T)$$

es un espacio de Hilbert si y solo si T es cerrado. *Sugerencia:* muestra que la transformación,

$$\begin{aligned} U : \mathcal{D}(T) &\rightarrow \mathcal{G}(T) \\ f &\mapsto \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es una isometría.

P.3.7 Demuestre que si T es cerrado y $\zeta \in \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{N}(T - \zeta I)$ es cerrado.

P.3.8 Demuestre que si T es cerrado y S es cerrado y acotado, entonces TS es cerrado.

P.3.9 Demuestre que si T es cerrable y S es acotado entonces TS es cerrable.

P.3.10 Sea $l_2(\mathbb{N})$ con base canónica $\{e_n\}$ y $j \in \mathbb{N}$. Muestre que el operador j -desplazamiento (94) satisface $\mathcal{D}(S_j) = l_2(\mathbb{N})$ y

$$\langle S_j f, S_j g \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in l_2(\mathbb{N}).$$

Además, pruebe que es cerrado y acotado, es decir, $S_j \in \mathcal{B}(l_2(\mathbb{N}))$. Determine $\|S_j\|$.

P.3.11 Sea $\zeta = \{\zeta_n\}$ una sucesión fija de números complejos y $\{e_n\}$ base canónica de $l_2(\mathbb{N})$. Considere los operadores L_ζ , R_ζ y T_ζ en $l_2(\mathbb{N})$ dados por

$$(95) \quad T_\zeta = \sum_n \zeta_n |e_n\rangle\langle e_n|; \quad L_\zeta = \sum_n \zeta_n |e_n\rangle\langle e_{n+1}|; \quad R_\zeta = \sum_n \zeta_n |e_{n+1}\rangle\langle e_n|.$$

Muestre que estos operadores son cerrados y densamente definidos en $l_2(\mathbb{N})$.

P.3.12 Pruebe el corolario 3.2.6.

P.3.13 Para $j \in \mathbb{N}$, determine el adjunto del operador j -desplazamiento (94). Además, muestre que $\mathcal{N}(S_j^*) = \text{span}\{e_1, \dots, e_j\}$, donde $\{e_n\}$ es base canónica del espacio $l_2(\mathbb{N})$.

P.3.14 Calcule el adjunto de los operadores T_ζ , L_ζ y R_ζ dados por (95). Además, muestre que si la sucesión ζ es real, entonces $T_\zeta = T_\zeta^*$ y $L_\zeta^* = R_\zeta$.

P.3.15 Dada una sucesión real $\{\alpha_n\}$, construye un operador cerrado T tal que $\{\alpha_n e^{i\alpha_n}\} \subset \sigma(T)$.

P.3.16 Considere un conjunto cerrado no vacío \mathcal{M} de \mathbb{C} y $\{\zeta_n\}$ un conjunto denso numerable de \mathcal{M} . Sobre $l_2(\mathbb{N})$ con base canónica $\{e_n\}$, defina al operador $T = \sum_n \zeta_n |e_n\rangle\langle e_n|$. Demuestre que $\sigma(T) = \mathcal{M}$.

P.3.17 Sea $\zeta = \{\zeta_n\}$ una sucesión fija de números complejos y $\{e_n\}$ base canónica de $l_2(\mathbb{N})$. Calcule el espectro $\sigma(T_\zeta)$ y espectro puntal $\sigma_p(T_\zeta)$ del operador $T_\zeta = \sum_n \zeta_n |e_n\rangle\langle e_n|$. Además, diga cuándo T_ζ tiene espectro discreto.

P.3.18 Suponga que T_1, T_2 son dos operadores cerrados en \mathcal{H} tales que $\mathcal{D}(T_1) \perp \mathcal{D}(T_2)$ y $\mathcal{R}(T_1) \perp \mathcal{R}(T_2)$. Muestre que $T = T_1 \oplus T_2$ es cerrado y $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

P.3.19 Dado un operador cerrado T , use la expresión (74) para mostrar que

$$\frac{d}{d\eta} R_\eta(T) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{\eta+h}(T) - R_\eta(T)}{h} = R_\eta(T)^2, \quad \eta \in \rho(T)$$

en la norma operador sobre \mathcal{H} .

P.3.20 Sean T, S operadores simétricos en \mathcal{H} .

a) Muestra que $\alpha T + \beta S$ es simétrico, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Muestra que si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, entonces T^{-1} es simétrico.

P.3.21 Muestra que si T, S son operadores isométricos en \mathcal{H} , entonces ζTS es isométrico, para cualquier $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

P.3.22 Suponga que T_1, T_2 son dos operadores en \mathcal{H} tales que $\mathcal{D}(T_1) \perp \mathcal{D}(T_2)$ y $\mathcal{R}(T_1) \perp \mathcal{R}(T_2)$.

a) Muestre que si T_1, T_2 son simétricos entonces $T_1 \oplus T_2$ es simétrico.

b) Muestre que si T_1, T_2 son isométricos entonces $T_1 \oplus T_2$ es isométrico.

P.3.23 (*Principio de incertidumbre*)

Sean A, B operadores simétricos en \mathcal{H} y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para $f \in \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$, considera el conmutador $[A, B]f = (AB - BA)f$.

a) Muestra que

$$(96) \quad |\langle [A, B]f, f \rangle| \leq 2 \|(A - \alpha I)f\| \|(B - \beta I)f\|.$$

b) Muestra que la igualdad en (96) se cumple si y solo si existe $\varphi \in [0, \pi)$ tal que $\sin \varphi (A - \alpha I)f = i \cos \varphi (B - \beta I)f$.

Sugerencia: verifica primero que $\langle [A, B]f, f \rangle = 2i \text{Im} \langle (A - \alpha I)f, (B - \beta I)f \rangle$ y después, aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ten en cuenta que la igualdad ocurre si y solo si los vectores $(A - \alpha I)f$ y $(B - \beta I)f$ son linealmente dependientes.

P.3.24 Muestra que $Q + P$ es densamente definido en $L_2(\mathbb{R})$.

P.3.25 Prueba que sobre $\mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$, el conmutador de los operadores posición y momento satisface $[Q, P] = iI$.

P.3.26 (*Principio de incertidumbre sobre posición y momento*)

Para α, β y $f \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$, prueba que

$$(97) \quad \|f\| \leq 2 \|(Q - \alpha I)f\| \|(P - \beta I)f\| ,$$

con igualdad si $f(t) = ce^{i\beta t - a(t-\alpha)^2}$, para algún $a > 0$ y $c \in \mathbb{C}$.

Sugerencia: para (97), usa el problema p.3.23a y para la igualdad aplica p.3.23b, denota $a = \tan \varphi$ y resuelve la correspondiente ecuación diferencial de primer orden.

4. PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

4.1. Postulados. La mecánica cuántica es un marco matemático de utilidad para el desarrollo de las teorías físicas. Debemos de hacer una distinción entre la mecánica cuántica que se usa en física, la cual es una aplicación a fenómenos y a sistemas físicos haciendo uso de la teoría desarrollada en un entorno matemático. Esta teoría permite el desarrollo de dicho campo en física y de aquí su gran importancia en el contexto matemático. Por razones didácticas desarrollaremos aquí una introducción axiomática de la mecánica cuántica, aunque a la fecha no existe un sistema completo de postulados que cuenten con el consenso de la comunidad física. Estos postulados se han derivado después de un largo proceso de prueba y error y sobre todo de mucha intuición.

El primer postulado nos indica el universo en donde se desarrolla la Mecánica Cuántica. Este universo es un espacio de Hilbert complejo, noción motivada entre otros por las de series de Fourier. El concepto de espacio de Hilbert fue introducido por John von Neumann en honor a David Hilbert (quien ya lo había utilizado en el estudio de ecuaciones integrales), definiéndolo de manera intrínseca e independiente de sus representaciones.

4.1.1. Postulado uno (estados). Cualquier sistema cuántico aislado tiene asociado un espacio de Hilbert complejo. El sistema se describe totalmente por un estado (o **matriz de densidad**) que es un operador positivo con traza unitaria actuando sobre el espacio de Hilbert del sistema. Un estado lo podemos interpretar como una descripción completa de un sistema físico.

Hay dos tipo de estados cuánticos que son: los llamados **estados puros** y **estados mezclados**. En particular, los estados puros se pueden identificar con los vectores unitarios del espacio de Hilbert.

Este primer postulado no indica cuál es el espacio de Hilbert asociado con un sistema cuántico en particular. Por ejemplo los estados puros de un sistema cuántico fundamental, el oscilador armónico cuántico, son vectores unitarios en el espacio de Hilbert de dimensión infinita $l_2(\mathbb{N})$ y sus estados mezclados son operadores positivos de traza uno sobre este espacio.

La notación usual es la **bra** y la **ket** mencionada anteriormente, se usa ampliamente en la literatura de física. Si $|u\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ denota a un vector columna en \mathbb{C}^2 denotaremos por $\langle u| = (\bar{\alpha} \ \bar{\beta})$ a su transpuesto conjugado (adjunto), entonces escribimos el producto interno de dos vectores $|u\rangle, |v\rangle$ como:

$$\langle v, u \rangle = \langle v||u \rangle = (\bar{\alpha} \ \bar{\beta}) \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta .$$

Si invertimos el orden de v y u se obtiene la matriz asociada con el operador $|u\rangle\langle v|$,

$$|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (\bar{\gamma} \ \bar{\delta}) = \begin{pmatrix} \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} \\ \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \end{pmatrix} .$$

Denotamos por $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a la base canónica de \mathbb{C}^2 , entonces cualquier vector tiene la forma

$$|v\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideramos que $v = u$ entonces

$$|v\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

Los operadores anteriores son positivos si su traza es unitaria. Además, $\text{tr}(|v\rangle\langle v|) = 1$ si y sólo si $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Los elementos en la diagonal se interpretan como las probabilidades de medir 0 y 1, mientras que los elementos fuera de la diagonal se interpretan como correlaciones cuánticas.

4.1.2. Postulado dos (ley dinámica). La evolución de un sistema cuántico aislado se describe mediante un operador unitario, éste se especifica indicando cómo cambian los estados del sistema en el transcurso del tiempo. Es decir, el estado p_{t_1} del sistema en el tiempo t_1 , se relaciona con el estado p_{t_2} en el tiempo t_2 a través de un operador unitario $U(t_1, t_2)$, que depende sólo de los tiempos t_1 y t_2 :

$$p_{t_2} = U(t_1, t_2)p_{t_1}U(t_1, t_2)^*.$$

El movimiento de los estados se realiza mediante una familia de transformaciones unitarias que están generadas por un operador autoadjunto H también llamado **Hamiltoniano del sistema**.

Este postulado no indica qué operadores unitarios corresponden con la dinámica física real del sistema, sólo asegura que la evolución se describe de esa manera e indica cómo se relacionan los estados de un sistema en dos tiempos diferentes. Una forma equivalente de este postulado describe la evolución de un sistema cuántico en tiempo continuo, haciendo uso del aparato de ecuaciones diferenciales, que es una de las maneras más usadas en la literatura Física.

La evolución temporal de los estados de un sistema cuántico aislado se describe mediante la **ecuación de Schrödinger**,

$$i\frac{dp_t}{dt} = Hp_t - p_tH,$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema. Hemos tomado las unidades de tal manera que la constante de Planck $\hbar = 1$.

La solución de la ecuación de Schrödinger con condición inicial p_{t_1} , está dada por la exponencial

$$p_t = e^{-i(t-t_1)H}p_{t_1}e^{i(t-t_1)H}.$$

Entonces el estado del sistema en un tiempo t_2 será

$$p_{t_2} = e^{-i(t_2-t_1)H}p_{t_1}e^{i(t_2-t_1)H},$$

es decir, está descrita por el operador unitario

$$U(t_2, t_1) = e^{i(t_2-t_1)H}.$$

Si conocemos el Hamiltoniano del sistema, entonces tendremos, al menos en principio, completamente determinada su dinámica. Consideremos la familia de operadores $(e^{itH})_{t \in \mathbb{R}}$ que describe la dinámica de un sistema cuántico cerrado, éste es un grupo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert del sistema, es decir, es un conjunto de estados puros, y la correspondencia $H \mapsto e^{itH}$ es una biyección. La propiedad de grupo corresponde con la reversibilidad de la evolución.

Dado que el Hamiltoniano es un operador autoadjunto, entonces tiene una decomposición espectral

$$H = \sum_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle\langle\psi_{\lambda}|,$$

donde λ denota los valores propios de H y ψ_λ son los correspondientes vectores propios normalizados. Los estados ψ_λ del sistema son comúnmente llamados **estados propios de la energía** o **estados estacionarios** y λ se llama la **energía del estado**. De manera que el espectro de H formado por todos los valores de λ , son los posibles valores de la energía del sistema cuántico.

El tercer postulado de la mecánica cuántica se refiere a las mediciones sobre un sistema cuántico. Las cantidades observables son propiedades que se pueden medir como la energía, la posición o el momento.

4.1.3. Postulado tres (mediciones cuánticas). Las observables de un sistema cuántico se representan por operadores autoadjuntos y el valor esperado de una observable A cuando el sistema se encuentra en el estado ρ está dada por la regla de Born:

$$\text{tr}(\rho A)$$

Recordemos que los operadores autoadjuntos tienen una descomposición espectral

$$A = \sum_k a_k |v_k\rangle\langle v_k|.$$

Si la observable A del sistema se mide en el estado puro $|u\rangle\langle u|$, entonces

1. Los posibles resultados son los valores propios a_k de A .
2. La medición del sistema se encontrará en algún estado propio $|v_k\rangle\langle v_k|$ de a_k .
3. La probabilidad de este resultado es

$$|\langle u, v_k \rangle|^2 = \text{tr}(|u\rangle\langle u| |v_k\rangle\langle v_k|).$$

Si se realizan muchas mediciones de A con el sistema en el mismo estado $|u\rangle\langle u|$, entonces el valor esperado de la observable A es

$$\sum_k a_k |\langle u, v_k \rangle|^2 = \langle u, Au \rangle = \text{tr}(A|u\rangle\langle u|).$$

Ejemplo 4.1.I. El valor esperado del Hamiltoniano H de un sistema en el estado puro correspondiente a uno de sus vectores propios $|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$ es

$$\begin{aligned} \text{tr}(H|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|) &= \sum_{\lambda'} \langle\psi_{\lambda'}|H\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle \\ &= \sum_{\lambda'} \delta_{\lambda,\lambda'} \langle\psi_{\lambda'}|H\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda|H\psi_\lambda\rangle = \lambda, \end{aligned}$$

donde λ es la energía del estado ψ_λ .

El proceso de medición es muy peculiar, esto debido a que un sistema en un estado puro $|u\rangle\langle u|$ es enviado de manera repentina e irreversible en otro estado $|v_k\rangle\langle v_k|$, perdiéndose toda la información sobre el estado inicial; sólo se conoce el estado del sistema después de la medición.

Si para cada valor de un observable existe un único posible estado del sistema, en ese caso los estados de dicho sistema se llaman no degenerados. Por simplicidad hemos explicado el proceso de medición suponiendo que los valores propios de la observable son no-degenerados. Cuando las multiplicidades pueden ser diferentes de uno, se usa la expresión $\sum_k a_k E_k$, con valores propios distintos a_k y las proyecciones E_k sobre los correspondientes subespacios propios de dimensión igual a la multiplicidad de a_k . Entonces, una medición puede identificarse con un conjunto de proyecciones ortogonales, es decir, $\{E_k\}$ que satisfacen $E_i E_k = \delta_{i,k} E_k$ y la relación de completéz $\sum_k E_k = I$. Estas se le conocen como las mediciones de von Neumann.

Un estado mezclado es una combinación lineal convexa de estados puros, es decir

$$\rho = \sum_k \rho_k |v_k\rangle\langle v_k|, \quad \text{con } \rho_k > 0 \quad \text{y} \quad \sum_k \rho_k = 1.$$

Cabe mencionar que los estados puros en la representación anterior no son necesariamente ortogonales; sin embargo, si lo son, entonces la representación anterior es la descomposición de ρ . Si se realiza la medición de una observable A sobre un sistema que se encuentra en un estado mezclado ρ , entonces el valor esperado es

$$\sum_k \rho_k \langle v_k, Av_k \rangle = \sum_k \rho_k \text{tr}(A|v_k\rangle\langle v_k|) = \text{tr}(A\rho).$$

En el siguiente postulado indica cómo se construye el espacio de estados de un sistema compuesto a partir de los espacios de estados de cada componente.

4.1.4. Postulado cuatro (sistemas compuestos). El espacio de estados de un sistema cuántico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de las componentes del sistema. Si la j -ésima componente del sistema se encuentra en el estado ρ_j , con $1 \leq j \leq n$, entonces el sistema compuesto se encontrará en el estado $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$.

4.2. El oscilador armónico cuántico. Antes de introducirnos a la teoría de estados Gaussianos, veamos una parte introductoria aplicable a formas de Schrödinger que podemos encontrar en [8, 11, 10].

4.2.1. Forma diferencial de Schrödinger del oscilador armónico. Consideremos una partícula moviéndose sobre una recta bajo la influencia de la energía potencial correspondiente a un oscilador armónico clásico, es decir $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de oscilación. De manera física, podemos imaginarnos una caja negra que emite y absorbe energía en “quantum”, es decir, en múltiplos de una cantidad fija.

Para conocer la dinámica del sistema debemos de resolver la **ecuación de Schrödinger**, dada por

$$(98) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_t(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_t(x),$$

con condición inicial $\psi_{t=0}(x) = \psi(x)$. Al resolver esta ecuación por el método de separación de variables obtendremos soluciones de la forma $\psi_t(x) = f(t)\phi(x)$, del modo que al derivar y substituir en la ecuación (98) obtenemos

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{\phi(x)} \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x) \right),$$

que se cumple si existen valores constantes E tales que

$$i\hbar \frac{df}{dt} = Ef,$$

donde al resolver se obtiene que $f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$. Así,

$$(99) \quad -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x) = E\phi(x),$$

donde el Hamiltoniano $H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Entonces, podemos escribir de manera más compacta (99) como $H\phi(x) = E\phi(x)$ el cual es un problema de valores propios para H .

Supondremos que \hbar , m y ω son iguales a 1, lo que implica

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right).$$

Si definimos los operadores $P = -i \frac{d}{dx}$ y Q como el operador de multiplicación inducido por la función identidad, es decir, $I(x) = x$. Entonces

$$P^2\phi(x) = -i \frac{d}{dx} \left(-i \frac{d}{dx} \phi(x) \right) = -\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \quad \text{y} \quad Q^2\phi(x) = x^2\phi(x).$$

De esta manera, podemos expresar $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$.

4.2.2. *Relaciones canónicas de conmutación (CCR)*. El **conmutador** de dos operadores A, B , se define como

$$[A, B] = AB - BA.$$

Es claro que si los operadores A y B conmutan entonces su conmutador es cero.

Dirac propuso de una factorización de H como $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$. Si

$$([P, Q]\phi)(x) = -i\frac{d}{dx}(x\phi(x)) - x\left(-i\frac{d}{dx}\phi(x)\right) = -i\phi(x),$$

entonces $[P, Q] = -iI$, es decir, P y Q no conmutan. Esta es la relación canónica de conmutación en términos de P y Q . Siguiendo la idea de Dirac, resulta que

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ) = H + \frac{i}{2}[P, Q] = H + \frac{1}{2}I,$$

donde $H + \frac{1}{2}I$ corresponde a la factorización propuesta. Con esta idea, podemos obtener resultados útiles.

Definición 4.2.1. Definimos el **operador de creación y aniquilación** como

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ) \quad \text{y} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ),$$

respectivamente.

A estos operadores también se les conoce como de ascenso y descenso, por razones que veremos más adelante. Notemos que si calculamos el conmutador

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\right) \\ &= H + \frac{1}{2}I - \left(H - \frac{1}{2}I\right) = I, \end{aligned}$$

obtenemos la relación de conmutación canónica, ahora en términos de a y a^\dagger . De modo similar podemos calcular de manera sencilla $[H, a] = -a$ y $[H, a^\dagger] = a^\dagger$.

Si existiera una función ϕ_0 tal que $a\phi_0 = 0$, entonces $H\phi_0 = (a^\dagger a + \frac{1}{2}I)\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0$. Esto quiere decir que ϕ_0 sería un vector propio asociado a $\frac{1}{2}$ de H . Notemos que $a\phi_0$ es equivalente a la ecuación lineal de primer orden $\frac{d}{dx}\phi_0(x) = x\phi_0(x)$ con solución general de la forma $\phi_0(x) = ce^{-x^2/2}$. Supongamos que ϕ_0 es un estado, es decir $\|\phi_0\| = 1$, entonces al resolver

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(ce^{-\frac{x^2}{2}}\right) \left(ce^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx,$$

obtenemos que $c = \pi^{-\frac{1}{4}}$ y $\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Gráficamente podemos observar que es una distribución Gaussiana, ya que está normalizada y el área de $\phi_0 = 1$ sobre \mathbb{R} es igual a uno. A este estado se le llama el **estado fundamental** o **estado base** del oscilador armónico cuántico, la razón de este nombre es notar que $[H, a^\dagger] = a^\dagger$. Usando varias veces esta relación

$$\begin{aligned} Ha^{\dagger n}\phi_0 &= Ha^{\dagger n}\phi_0 - a^{\dagger n}H\phi_0 + a^{\dagger n}H\phi_0 = [H, a^{\dagger n}] + a^{\dagger n}H\phi_0 \\ &= \frac{1}{2}a^{\dagger n}\phi_0 + [H, a^\dagger]a^{\dagger(n-1)}\phi_0 + a^\dagger[H, a^{\dagger(n-1)}]\phi_0 \\ &= \dots = \left(n + \frac{1}{2}\right)a^{\dagger n}\phi_0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que las funciones $\{a^{\dagger n}\phi_0\}_{n \geq 0}$ son vectores propios de H , con valores propios $\{n + \frac{1}{2}\}_{n \geq 0}$. El siguiente resultado se sigue directamente, notando que los vectores propios de un operador autoadjunto son ortogonales y $\|a^{\dagger n}\phi_0\|^2 = n!$

TEOREMA 4.2.2. *El espectro de H es el subconjunto $\{n + \frac{1}{2}\}_{n \geq 0}$ y el conjunto de funciones $\{\phi_n = (n!)^{-1/2} a^{\dagger n} \phi_0\}_{n \geq 0}$, forman una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$.*

Usando el método de separación de variables, a partir de todo esto podemos concluir que la solución de la ecuación de Schrödinger (98) se puede representar en la forma

$$\psi_t(x) = \sum_{n \geq 0} c_n e^{-(n+\frac{1}{2})t} \phi_n(x), \quad \sum_{n \geq 0} c_n^2 < \infty.$$

Se puede verificar de manera fácil que

$$a^{\dagger} \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}, \quad a \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1} \quad \text{y} \quad a^{\dagger} a \phi_n = n \phi_n.$$

El operador $a^{\dagger} a$ es autoadjunto y el valor esperado del estado ϕ_n viene dado por $\langle \phi_n, a^{\dagger} a \phi_n \rangle = \langle \phi_n, n \phi_n \rangle = n$. Por esta razón, a ϕ_n se le llama el **estado de n partículas**. Las relaciones anteriores podemos interpretarlo para el caso del oscilador armónico cuántico cuando se encuentra en el estado ϕ_n . Entonces,

1. Operador número: es el operador $a^{\dagger} a$ que indica el número de partículas en el estado ϕ_n .
2. Operador de creación: el operador a^{\dagger} agrega (o crea) una partícula al estado ϕ_n , incrementando la energía del sistema en $\hbar \omega$ unidades.
3. Operador de aniquilación: el operador a destruye o aniquila una partícula del estado ϕ_n disminuyendo la energía del sistema en $\hbar \omega$ unidades.
4. Se cumple la relación canónica de conmutación (CCR) $[a, a^{\dagger}] = I$.

4.3. Estados Gaussianos. Para un espacio de Hilbert real \mathcal{H} , una forma bilineal $\sigma: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **forma simpléctica** si $\sigma(u, v) = -\sigma(v, u)$ para todo $u, v \in \mathcal{H}$. El par (\mathcal{H}, σ) es llamado el **espacio simpléctico**. Una forma simpléctica σ es llamada no degenerada si la condición $\sigma(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathcal{H}$ implica que $u = 0$.

Un espacio simpléctico (\mathcal{H}, σ) es llamado **estándar** si $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert complejo y $\sigma(u, v) = \text{Im} \langle u, v \rangle$. Se llama **separable** si existe una sucesión $\{u_k\}_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$ tal que $\sigma(u, u_k) = 0$, para todo $k \geq 0$ entonces $u = 0$. Un espacio simpléctico estándar es no degenerado y separable si \mathcal{H} es separable. En efecto, si $\sigma(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathcal{H}$, entonces $\langle u, v \rangle = \text{Re} \langle u, v \rangle$ y $0 = \sigma(u, iv) = \text{Re} \langle u, v \rangle$, i.e., $\langle u, v \rangle = 0$ y, por lo tanto, $u = 0$. Un espacio simpléctico estándar es el par (\mathbb{C}, σ) , con $\sigma(u, v) = \text{Im} \bar{u}v$. Lo siguiente es una introducción a estados coherentes que podemos encontrar en [?] (véase también [21]).

4.3.1. Representación de estados coherentes. Consideraremos la representación de estados coherentes de las CCR, i.e., el subespacio de Hilbert $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ de $L_2(\mathbb{C})$ con base ortonormal (b.o.n., para abreviar) $\{\phi_k\}_{k \geq 0}$, donde

$$\phi_k(z) e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{\bar{z}^k}{\sqrt{\pi k!}}$$

son llamados **estados coherentes canónicos**, y el **operador de Weyl**

$$\int W_z(u, v) \phi(v) \bar{v} dv, \quad \phi \in \mathcal{E}_2(\mathbb{C}),$$

con el kernel

$$W_z(u, v) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|z+v-u|^2}{2} + i\sigma(u, z+v) - i\sigma(z, v)}.$$

La representación de estados coherentes se obtiene de la siguiente manera: comencemos con el **espacio toy Fock** (también espacio baby Fock) $\Gamma_s(\mathbb{C})$ y siguiendo Parthasarathy, $\Gamma_s(\mathbb{C}) \cong L_2(\mathbb{R})$, a través de la identificación:

$$\varepsilon(z) \mapsto f_z(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{\sqrt{2}zx - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2}},$$

que satisface $\langle f_z, f_{z'} \rangle = e^{\bar{z}z'}$, donde $\varepsilon \in \Gamma_s(\mathbb{C})$ son las **funciones exponenciales**.

Sea $Qf(x) = xf(x)$ y $Pf(x) = -i\frac{df(x)}{dx}$ la relación de los operadores de posición y momento en $L_2(\mathbb{R})$ que satisfacen que $[Q, P] = iI$.

Recordemos que los operadores de creación y aniquilación en $L_2(\mathbb{R})$ son

$$a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP), \quad a := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$$

de donde se sigue que $Q = (a^\dagger + a)/\sqrt{2}$, $P = i(a^\dagger - a)/\sqrt{2}$ y $[a, a^\dagger] = I$. El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico es

$$(100) \quad H = N + \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right),$$

donde $N = a^\dagger a$ se le conoce como el **operador de número**.

Definición 4.3.1. Para $z = r + is \in \mathbb{C}$ y $f \in L_2(\mathbb{R})$, el **operador de Weyl** W_z está definido como

$$(101) \quad W_z f(x) = e^{-i\sqrt{2}(rP - sQ)} f(x).$$

Observación 4.3.2. El operador de Weyl satisface

$$(102) \quad W_z f(x) = e^{-is(r - \sqrt{2}x)} f(x - \sqrt{2}r).$$

Ciertamente, de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff $e^{A+B} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, con $A = -irP$, $B = isQ$ y $[A, B] = rs[P, Q] = -irsI$, obtenemos (102).

La representación (102) es llamada **representación de Schrödinger**, la cual es irreducible (es decir, los únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y todo $L_2(\mathbb{R})$) y unitario, con adjunto $W_z^* = W_{-z}$. Además,

$$W_z W_{z'} = e^{-i(rs' - r's)} W_{z+z'} = e^{-i\sigma(z, z')} W_{z+z'}.$$

Esta forma (simpléctica) de CCR adquiere significado en cualquier espacio complejo de Hilbert si el producto $\bar{z}z'$ se entiende como el producto interno $\langle z, z' \rangle$. Además, teniendo en cuenta (101),

$$(103) \quad \begin{aligned} W_z &= e^{-i(ir(a^\dagger - a) - s(a^\dagger + a))} \\ &= e^{za^\dagger - \bar{z}a} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} e^{-\bar{z}a}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\mathbf{1}(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sea el estado fundamental en $L_2(\mathbb{R})$ y denotamos los **vectores coherentes**

$$\psi_z := W_z \mathbf{1} \in L_2(\mathbb{R}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que, $a\mathbf{1} = 0$ y por (103),

$$(104) \quad \begin{aligned} \psi_z(x) &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} \mathbf{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k (Q - iP)^k}{k! \sqrt{2^k}} \mathbf{1}(x) \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(z/\sqrt{2})^k}{k!} h_k(x) \mathbf{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{\sqrt{2}xz - \frac{z^2}{2}} \mathbf{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} f_z(x), \end{aligned}$$

donde h_k son los llamados **polinomios de Hermite** (ortogonales con respecto a e^{-x^2} y función generadora $e^{2zx - z^2}$)

$$\{1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \dots\}.$$

El siguiente conjunto es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$,

$$(105) \quad \left\{ \varphi_k (2^k k!)^{-\frac{1}{2}} h_k \mathbf{1} \right\}_{k \geq 0},$$

el cual es llamado el conjunto de *funciones de Hermite* y satisfacen

$$a^\dagger \varphi_k = \sqrt{k+1} \varphi_{k+1}; \quad a \varphi_k = \sqrt{k} \varphi_{k-1}.$$

Además,

$$(106) \quad Q\varphi_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\varphi_{k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}}\varphi_{k-1}; \quad P\varphi_k = i\sqrt{\frac{k+1}{2}}\varphi_{k+1} - i\sqrt{\frac{k}{2}}\varphi_{k-1}.$$

De esta manera, con respecto a la base ortonormal (105), uno tiene las siguientes representaciones matriciales

$$(107) \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Debido a (104), la familia de vectores coherentes ψ_z coincide con los vectores exponenciales normalizados f_z , pero no son ortogonales. De hecho, se calcula que

$$\langle \psi_z, \psi_{z'} \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2 - 2\bar{z}z')}.$$

Además,

$$(108) \quad \psi_z = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} \varphi_k \quad \text{y} \quad W_{z'} \psi_z = e^{-i\sigma(z', z)} \psi_{z'+z}.$$

Más aún,

$$a\psi_z = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} a\varphi_k = e^{-\frac{|z|^2}{2}} z \sum_{k \geq 1} \frac{z^{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}} \varphi_{k-1} = z\psi_z,$$

esto implica que los vectores coherentes son un continuo de autovectores del operador de aniquilación.

LEMA 4.3.3. *La relación de completitud*

$$(109) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |W_z f\rangle \langle W_z f| dz = I,$$

es cierta, para algún vector unitario $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Se sigue de [12, Prop. 3.5.1] (reescalado por $(2)^{-1/2}$) que si $\{e_k\}_{k \geq 0}$ es una b.o.n. para $L_2(\mathbb{R})$, entonces

$$(110) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{ \langle e_j, W_z e_k \rangle \}_{j, k \geq 0}$$

es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R}^2)$ y las relaciones de ortogonalidad se mantienen

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\langle e_j, W_z e_k \rangle} \langle e_l, W_z e_m \rangle dz = \delta_{jl} \delta_{km}.$$

De esta manera por linealidad,

$$(111) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle h, W_z g \rangle \langle W_z f, k \rangle dz = \langle f, g \rangle \langle h, k \rangle, \quad f, g, h, k \in L_2(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto, como h, k son arbitrarios y poniendo $f = g$ con la norma unitaria, concluimos que (109) es cierta, con la integral definida en sentido débil. \square

En virtud de la relación (109), la fórmula $\varphi = \int \langle \psi_z, \varphi \rangle \psi_z dz / \pi$ sugiere considerar el mapeo $\varphi \mapsto \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi}$ en $L_2(\mathbb{R})$ con funciones $\phi(z) = \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi}$. Este mapeo a veces es llamado **Isomorfismo de Klauder-Bargman**.

TEOREMA 4.3.4. *El mapeo $\varphi \mapsto \phi(z) = \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi}$ de $L_2(\mathbb{R})$ en $L_2(\mathbb{C})$ es un isomorfismo isométrico y la familia de los estados coherentes canónicos*

$$(112) \quad \{ \phi_k(z) := \langle \psi_z, \varphi_k \rangle / \sqrt{\pi} \}_{k \geq 0},$$

es una base ortonormal de $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}) \subset L_2(\mathbb{C})$.

Demostración. Para algún par de elementos $\varphi, \varphi' \in L_2(\mathbb{R})$ se obtiene de (111) que

$$(113) \quad \langle \phi, \phi' \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\langle \psi_z, \varphi \rangle} \langle \psi_z, \varphi' \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \varphi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, \varphi' \rangle dz = \langle \varphi, \varphi' \rangle$$

Como $\{ \varphi_k \}_{k \geq 0}$ es b.o.n. para $L_2(\mathbb{R})$, la familia de estados coherentes (112) satisface

$$\int_{\mathbb{C}} \overline{\phi_j(z)} \phi_k(z) dz = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk},$$

es decir, (112) es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{C})$. □

En virtud de (108), los estados coherentes canónicos satisfacen

$$\phi_k(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{\bar{z}^k}{\sqrt{\pi k!}}, \quad k \geq 0.$$

Observación 4.3.5. Un operador acotado X en $L_2(\mathbb{R})$ corresponde con un operador integral acotado \hat{X} en $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$, con Kernel $\langle \psi_z, X \psi_v \rangle / \pi$ y norma $\| \hat{X} \| = \| X \|$. Ciertamente, si \hat{X} actúa como $\phi(z) = \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi} \mapsto \langle \psi_z, X \varphi \rangle / \sqrt{\pi}$, entonces de (109),

$$\| \hat{X} \phi \|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle X \varphi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, X \varphi \rangle dz = \langle X \varphi, X \varphi \rangle = \| X \varphi \|^2,$$

lo que implica $\| \hat{X} \| = \| X \|$, debido a que $\| \phi \| = \| \varphi \|$ (ver (113)). Además,

$$\hat{X} \phi(z) = \frac{\langle \psi_z, X \varphi \rangle}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \psi_z, X \psi_v \rangle \frac{\langle \psi_v, \varphi \rangle}{\sqrt{\pi}} dv = \int_{\mathbb{C}} \phi(v) \frac{\langle \psi_z, X \psi_v \rangle}{\pi} dv,$$

En particular de (108), el operador de Weyl en $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ tiene kernel

$$(114) \quad \frac{\langle \psi_u, W_z \psi_v \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|z+v-u|^2}{2} + i\sigma(u, z+v) - i\sigma(z, v)}.$$

4.3.2. *Transformada de Fourier no conmutativa.* Definimos la **transformada de Fourier (o no conmutativa) cuántica** de un operador de clase de traza ρ en $L_2(L_2(\mathbb{R}))$, por medio de

$$(115) \quad \mathcal{F}[\rho](z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{tr}(\rho W_z), \quad z \in \mathbb{C},$$

que es una función compleja evaluada en \mathbb{C} , con las siguientes propiedades:

- (a) $|\mathcal{F}[\rho](z)| \leq \| \rho \|_1 / \sqrt{\pi}$.
- (b) $\mathcal{F}[\rho^*](z) = \overline{\mathcal{F}[\rho](-z)}$.
- (c) $\mathcal{F}[\rho W_u](z) = e^{-i\sigma(u, z)} \mathcal{F}[\rho](z + u)$.
- (d) $\mathcal{F}[W_u^* \rho W_u](z) = e^{-2i\sigma(u, z)} \mathcal{F}[\rho](z)$.

TEOREMA 4.3.6 (Identidad de Parseval no conmutativa). *El mapeo $\rho \mapsto \mathcal{F}[\rho]$ se extiende únicamente a un mapeo unitario de $L_2(L_2(\mathbb{R}))$ sobre $L_2(\mathbb{C})$, tal que*

$$(116) \quad \int \overline{\mathcal{F}[\rho](z)} \mathcal{F}[\eta](z) dz = \text{tr}(\rho^* \eta), \quad \rho, \eta \in L_2(L_2(\mathbb{R})).$$

Demostración. Primero consideramos un operador de clase traza autoadjunto ρ en $L_2(\mathbb{R})$, con descomposición espectral $\rho = \sum_{k \geq 0} \rho_k |e_k\rangle \langle e_k|$. Entonces, por la propiedad (a) de la transformada de Fourier y como $\{ \langle e_k, W_z e_k \rangle / \sqrt{\pi} \}_{k \geq 0}$ es ortonormal en $L_2(\mathbb{C})$ (ver (110)), tenemos que la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\rho_k}{\sqrt{\pi}} \langle e_k, W_z e_k \rangle = \mathcal{F}[\rho](z)$$

converge en $L_2(\mathbb{C})$ y $\|\mathcal{F}[\rho]\|^2 = \sum_{k \geq 0} |\rho_k|^2 = \|\rho\|_2^2$. Debido a la descomposición de partes reales e imaginarias de cualquier operador de clase traza y dado que el conjunto lineal de esta clase es denso en $L_2(L_2(\mathbb{R}))$, se sigue que \mathcal{F} es un operador isométrico de $L_2(L_2(\mathbb{R}))$ a $L_2(\mathbb{C})$. Para concluir,

$$\left\{ \mathcal{F}[|\varphi_j\rangle\langle\varphi_k|] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle\varphi_k, W_z \varphi_j\rangle \right\}_{j,k \geq 0}$$

es una b.o.n. para $L_2(\mathbb{C})$, donde φ_k son las funciones de Hermite (105). Por lo tanto, \mathcal{F} es unitario. Observemos que (116) es directa de la identidad de polarización. \square

Observación 4.3.7. Un estado ρ en $L_2(\mathbb{R})$ es puro si y solo si $\|\mathcal{F}[\rho]\| = 1$. En efecto, Los autovalores $\{\rho_j\}$ de ρ son positivos y satisfacen $\sum_j \rho_j = 1$ y por (116), se tiene $\|\mathcal{F}[\rho]\|^2 = \sum_j \rho_j^2 \leq 1$, y la igualdad se cumple si y solo si ρ tiene un autovalor propio igual a uno, i.e., ρ es un estado puro.

Para un operador de la clase de traza ρ , se sigue de (109) que

$$(117) \quad \text{tr}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \text{tr}(\rho |\psi_z\rangle\langle\psi_z|) dz.$$

Además, un operador positivo ρ es una clase de traza si y solo si la integral en el lado derecho de (117) es finita.

TEOREMA 4.3.8. *La transformada de Fourier satisface la siguiente representación:*

$$(118) \quad \mathcal{F}[\rho](u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} e^{-i\sigma(u,z)} \frac{\langle\psi_z, \rho\psi_{u+z}\rangle}{\pi} dz,$$

donde $\langle\psi_z, \rho\psi_v\rangle / \pi$, representa el kernel de ρ .

Demostración. Usando (117), uno calcula que

$$\mathcal{F}[\rho](u) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{C}} \text{tr}(\rho W_u |\psi_z\rangle\langle\psi_z|) dz = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{C}} \langle\psi_z, \rho W_u \psi_z\rangle dz.$$

Por lo tanto, de (108) se obtiene (118). \square

4.3.3. Estados cuánticos Gaussianos. Comenzamos directamente con la definición de un estado cuántico Gaussiano [16].

Definición 4.3.9. Un estado $\rho \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}))$ es **estado Gaussiano** si existe $w \in \mathbb{C}$ y una matriz real simétrica $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{F}[\rho](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i \text{Re}\langle w, z\rangle - \frac{1}{2} \text{Re}\langle z, Sz\rangle}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

En este caso escribimos $\rho = \rho(w, S)$.

La definición anterior determina un funcional lineal real $z \mapsto \text{Re}\langle w, z\rangle$ y una forma cuadrática real $z \mapsto \text{Re}\langle z, Sz\rangle$ en el espacio de Hilbert real \mathbb{C} . Por lo tanto el vector de valor medio w y el operador de covarianza S están determinados de forma única. Para $w = \sqrt{2}(l - im)$, con $l, m \in \mathbb{R}$, llamamos l el vector de momento medio y a m el vector de posición media, respectivamente.

Ejemplo 4.3.I (Estados coherentes). Dado $u \in \mathbb{C}$, se tiene que el estado coherente $\rho_u = |\psi_u\rangle\langle\psi_u|$ es un estado Gaussiano. De hecho, siguiendo (114),

$$\mathcal{F}[|\psi_u\rangle\langle\psi_u|](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle\psi_u, W_z \psi_u\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2i \text{Im} \bar{z}u - \frac{|z|^2}{2}}.$$

Por lo tanto $\rho_u = \rho(w, S) = \rho(-2iu, I)$.

Ejemplo 4.3.II (Estado de Gibbs a temperatura inversa β). El estado dado por $\rho_\beta = (1 - e^{-\beta})e^{-\beta a^\dagger a}$, con $\beta > 0$, está bien definido, debido a que

$$\text{tr} \left(e^{-\beta a^\dagger a} \right) = \sum_{n \geq 0} e^{-n\beta} = \frac{1}{1 - e^{-\beta}}.$$

Por lo tanto, uno tiene de la representación integral (118) y (104) que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi} \mathcal{F}[\rho_\beta](u)}{1 - e^{-\beta}} &= \frac{1}{\pi} \int e^{-i \text{Im}(\bar{u}z)} \langle \psi_z, e^{-\beta a^\dagger a} \psi_{u+z} \rangle dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int e^{-\frac{|z|^2}{2} - i \text{Im}(\bar{u}z) - \frac{|u+z|^2}{2}} \langle f_z, e^{-\beta a^\dagger a} f_{u+z} \rangle dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int e^{-|z|^2 - \bar{u}z - \frac{|u|^2}{2}} \langle f_z, f_{e^{-\beta}(u+z)} \rangle dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int e^{-\frac{|u|^2}{2} - (1 - e^{-\beta})|z|^2 + (\bar{z}u e^{-\beta} - z\bar{u})} dz \\ &= e^{-\frac{|u|^2}{2} \left(1 + \frac{2e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}\right)} \frac{1}{\pi} \iint e^{-(1 - e^{-\beta}) \left[\left(x - \frac{ue^{-\beta} - \bar{u}}{2(1 - e^{-\beta})}\right)^2 + \left(y + i \frac{ue^{-\beta} + \bar{u}}{2(1 - e^{-\beta})}\right)^2 \right]} dx dy \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta}} e^{-\frac{1}{2} \coth(\beta/2) |u|^2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue $\mathcal{F}[\rho_\beta](u) = e^{-\frac{1}{2} \coth(\beta/2) |u|^2} / \sqrt{\pi}$. Hemos usado que $e^{-\beta a^\dagger a} f_z = f_{e^{-\beta}z}$. Por lo tanto, con $S_\beta = \coth(\beta/2)I$ y $w_\beta = 0$, se tiene que ρ_β es Gaussiano.

Problemas de la sección.

- P.4.1 Muestre que en efecto el operador de Weyl (101) es un operador unitario y que su adjunto satisface $W_z^* = W_{-z}$. *Nota: es suficiente mostrarlo para la familia de vectores coherentes $\{\psi_z\}$, debido a que forma un conjunto total en $L_2(\mathbb{R})$.*
- P.4.2 Con base en las representaciones matriciales (107), calcula la representación matricial del Hamiltoniano (100) y del operador de número $N = a^\dagger a$.
- P.4.3 Verifique las siguientes propiedades de la trasformada de Fourier cuántica $\mathcal{F}[\rho]$:
- $|\mathcal{F}[\rho](z)| \leq \|\rho\|_1 / \sqrt{\pi}$.
 - $\mathcal{F}[\rho^*](z) = \overline{\mathcal{F}[\rho](-z)}$.
 - $\mathcal{F}[\rho W_u](z) = e^{-i\sigma(u,z)} \mathcal{F}[\rho](z + u)$.
 - $\mathcal{F}[W_u^* \rho W_u](z) = e^{-2i\sigma(u,z)} \mathcal{F}[\rho](z)$.
- P.4.4 Para $u \in L_2(\mathbb{R})$, demuestra que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\langle u, \psi_z \rangle|^2 dz = \|u\|^2.$$

Sugerencia: usa (117) con $\rho = |u\rangle\langle u|$.

- P.4.5 Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ y $\beta > 0$,

$$e^{-\beta N} \psi_z = e^{-|z|^2(1 - e^{-\beta})/2} \psi_{e^{-\beta}z}.$$

Sugerencia: use el hecho que $e^{-\beta N} f_z = f_{e^{-\beta}z}$ (ver conclusión del ejemplo 4.3.II) y que ψ_z es el vector normalizado de f_z .

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a los árbitros anónimos cuya revisión y comentarios mejoraron la presentación de este trabajo. También agradecemos a los lectores, y en particular a los estudiantes, que utilizaron versiones preliminares de estas notas y cuyos valiosos comentarios nos ayudaron a mejorar el texto. De igual forma, a la Universidad Autónoma Metropolitana (PEAPDI 2023 “Semigrupos cuánticos de Markov: Operadores de transición de niveles de energía y sus generalizaciones”) y al CONAHCYT (proyecto CF2019-684340).

REFERENCIAS

- [1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993, Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one. MR 1255973 (94i:47001)
- [2] Werner O. Amrein, *Hilbert space methods in quantum mechanics*, Fundamental Sciences, EPFL Press, Lausanne; distributed by CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. MR 2571750
- [3] Ju. M. Berezanskiĭ, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR 0222718 (36 #5768)
- [4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchĕv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)
- [5] Jorge R. Bolaños-Servín, Roberto Quezada and Josué Ríos-Cangas, Weyl moments and quantum Gaussian states, Rep. Math. Phys. 90 (2022), no. 3, 357–376. MR 4516426
- [6] Charles A. McCarthy, C_p , Israel J. Math. 5 (1967), 249–271. MR 0225140
- [7] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829
- [8] Shiu Ming Cheung and Harry Hochstadt, *An inverse spectral problem*, Linear Algebra and Appl. 12 (1975), no. 3, 215–222. MR 0385625 (52 #6485)
- [9] Ronald Cross, *Multivalued linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 213, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. MR 1631548
- [10] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, study ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 883643
- [11] P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 66 (1997), no. 4, 359–371. MR 1459512
- [12] Alexander Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, second ed., Quaderni/Monographs, vol. 1, Edizioni della Normale, Pisa, 2011, With a foreword from the second Russian edition by K. A. Valiev. MR 2797301
- [13] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132. MR 0407617 (53 #11389)
- [14] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. MR 992618
- [15] Joseph Muscat, *Functional analysis*, Springer, Cham, 2014, An introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras. MR 3308576
- [16] K. R. Parthasarathy, *What is a Gaussian state?*, Commun. Stoch. Anal. 4 (2010), no. 2, 143–160. MR 2662722
- [17] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002)
- [18] ———, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)
- [19] Konrad Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 265, Springer, Dordrecht, 2012. MR 2953553
- [20] Joachim Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, Translated from the German by Joseph Szücs. MR 566954
- [21] Pantaleón-Martínez L. y Quezada R., *Una introducción a la teoría cuántica de la información*, en Texto para el primer Simposio del Departamento de Matemáticas (2008).

Nombre del autor: Jorge Ricardo Bolaños Servín

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2856-1902>

e-mail: jrbs@xanum.uam.mx

Nombre del autor: Roberto Quezada Batalla
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8039-2574>
e-mail: roqb@xanum.uam.mx

Nombre del autor: Josué I. Rios Cangas
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7758-7362>
e-mail: jottsmok@xanum.uam.mx

mixba'al

CONTENIDO

- 7 *El problema del barrendero*
Héctor A. Chang-Lara
- 27 *Muchos juegan... ¡yo también quiero jugar!*
Raúl Montes de Oca
- 37 *¿Cómo modelar una población?*
Josué Manik Nava Sedeño
- 53 *Recollements de categorías trianguladas*
Valente Santiago Vargas
- 77 *Modelos ocultos de Markov: una aplicación de estimación Bayesiana para redes de tiempo financieras*
Lizbeth Naranjo Albarrán y Luz J. Rodríguez Esparza
- 101 *Convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier*
Fernando Brambila Paz y Luis A. Díaz Leal Merino
- 113 *Ceros de polinomios aleatorios trigonométricos*
Verania Hernández Orgaz y Liliana Peralta
- 133 *Formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital*
René Benítez López
- 143 *Elementos matemáticos de la mecánica cuántica*
Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada Batalla, Josué I. Rios Cangas