

# UNA VERSIÓN DEL MÉTODO DE KUDRYASHOV PARA LA SOLUCIÓN DE ALGUNAS EDPs NO LINEALES QUE SURGEN EN LA FÍSICA MATEMÁTICA.

OSWALDO GONZÁLEZ-GAXIOLA

RESUMEN. Introduciremos una función que en la literatura se conoce como la función  $R$  de Kudryashov, expondremos las propiedades básicas de esta función y basados en ella, estableceremos un algoritmo para encontrar soluciones exactas en forma de onda solitaria para ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Finalmente, mostraremos mediante ejemplos la aplicación del método para encontrar soluciones exactas tipo solitones altamente dispersivos de algunas ecuaciones diferenciales que provienen de las aplicaciones de las matemáticas a la física.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (EDPNL) proporcionan modelos matemáticos utilizados en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería para explicar fenómenos complejos de muchos y muy diversos problemas, por ejemplo, en teoría de ondas electromagnéticas, física de plasma, mecánica de fluidos, teoría de campos, óptica no lineal, cinética química, dinámica estructural, evolución estelar, dinámica de poblaciones, evolución de flujos financieros, teoría del control, etc. Encontrar soluciones exactas para EDPNL se ha convertido en un desafío para investigadores en el área de matemáticas y sus aplicaciones debido a que una solución exacta proporciona información esencial que ayudará a describir el comportamiento de los fenómenos modelados por la EDPNL. Hasta donde sabemos, no existe un método clásico que funcione para encontrar soluciones exactas a cualquier tipo de EDPNL. Por ello, la comunidad científica valora mucho la investigación e implementación de nuevas metodologías que aporten soluciones exactas a dichos problemas [1, 2, 3]. En el estudio de fenómenos físicos no lineales, encontrar soluciones exactas tipo ondas viajeras de algunas EDPNL juega un papel muy importante. Por lo tanto, encontrar soluciones exactas e investigar el comportamiento de tales soluciones es un tema básico de investigación en muchas áreas de las ciencias naturales. Es de destacar que la aparición de soluciones tipo solitones de algunas EDPNL también ha mostrado una enorme impacto debido a la implementación en varias áreas científicas. Recientemente en [4], el autor desarrolló un nuevo método para resolver EDPNL, denominado por la comunidad, método de Kudryashov, y ha sido muy útil para resolver una gran diversidad de EDPNL tanto de orden entero como fraccionario que surgen de aplicaciones de las matemáticas a otras disciplinas [5, 6, 7]. En [8] el autor demostró la aplicabilidad de la función logística para encontrar soluciones exactas de ecuaciones diferenciales no lineales. Con el mismo espíritu, Kudryashov introdujo recientemente una nueva función  $R$  que ha demostrado ser muy eficaz para encontrar soluciones tipo solitones para EDPNL con términos de alta dispersión. Nos referiremos a esta nueva función como la función  $R$  de Kudryashov, y la usaremos para encontrar las soluciones tipo onda viajera de ciertas EDPNL estudiadas ampliamente en la física-matemática. La organización del artículo es la siguiente: En la Sección 2 estableceremos la función  $R$  de Kudryashov y describimos las características esenciales de la función. En la Sección 3 describiremos brevemente el algoritmo del método  $R$  de Kudryashov para resolver

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35C05, 35C07, 35Q60, 35Q35.

*Palabras clave.* Método de Kudryashov, soluciones tipo ondas viajeras, ecuación de Schrödinger no lineal, ecuación KdV.

EDPNL. En la Sección 3 consideramos algunos ejemplos para ilustrar el empleo del método.

## 2. LA FUNCIÓN $R$ DE KUDRYASHOV

Recientemente en [9] A. N. Kudryashov introdujo una nueva función  $R$  definida como

$$(1) \quad R(z) = \frac{1}{ce^z + de^{-z}},$$

donde  $c$  y  $d$  son parámetros. Se puede verificar que la función  $R$  es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$(2) \quad (R')^2 = R^2(1 - \chi R^2), \quad \chi = 4cd.$$

En el plano complejo, la función (1) tiene un polo de primer orden y su perfil representa una onda solitaria con

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} R(z) = 0.$$

El máximo de  $R$  es  $(c + d)^{-1}$  y lo alcanza en  $z = 0$ .

La característica principal de la función  $R$  es que sus derivadas de orden par pueden expresarse como polinomios de  $R$ , mientras que sus derivadas de orden impar son polinomios de  $R$  y  $R_z$ .

A continuación escribiremos el resultado de calcular algunas de las derivadas de orden superior de  $R$ , las cuales son sencillas de verificar:

$$(3) \quad R_{zz} = R - 2\chi R^3,$$

$$(4) \quad R_{zzz} = R_z - 6\chi R^2 R_z,$$

$$(5) \quad R_{zzzz} = R - 20\chi R^3 + 24\chi^2 R^5,$$

$$(6) \quad R_{zzzzz} = R_z - 60\chi R^2 R_z + 120\chi^2 R^4 R_z,$$

$$(7) \quad R_{zzzzzz} = R - 182\chi R^3 + 840\chi^2 R^5 - 720\chi^4 R^7.$$

Finalmente, si consideramos un polinomio de grado  $n$  en  $R$ , *i.e.*, si

$$(8) \quad y(z) = \sum_{k=0}^n a_k R^k(z),$$

entonces, considerando las ecuaciones (3)-(7), tenemos:

$$(9) \quad y_z = \sum_{k=1}^n a_k k R^{k-1} R_z,$$

$$(10) \quad y_{zz} = \sum_{k=1}^n a_k (k^2 R^k - k^2 \chi R^{k+2} - k \chi R^{k+2}),$$

$$(11) \quad y_{zzz} = \sum_{k=1}^n a_k (k^3 R^{k-1} - \chi k^2 (k+2) R^{k+1} - k(k+2) \chi R^{k+1}) R_z,$$

$$(12) \quad y_{zzzz} = \sum_{k=1}^n k a_k R^k [k^3 + (k^3 + 6k^2 + 11k + 6) \chi^2 R^4 - (2k^3 + 6k^2 + 8k + 4) \chi R^2].$$

De manera similar podemos calcular las siguientes derivadas para  $y$  con respecto a  $z$  haciendo uso de algún software adecuado para el cálculo simbólico, por ejemplo, utilizando *Mathematica*.

### 3. UNA BREVE DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO: $R$ -KUDRYASHOV

El método de Kudryashov originalmente establecido en [4] y actualizado recientemente en [9] proporciona un algoritmo muy útil para encontrar soluciones exactas de EDPNL. A continuación haremos una breve descripción de los pasos a seguir para la implementación del método actualizado y conocido como método  $R$ -Kudryashov.

En general, consideremos la EDPNL dada en forma polinomial en las variables  $u = u(x, t)$  y algunas de sus derivadas parciales  $u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$ ,

$$(13) \quad G(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0.$$

Usando el siguiente cambio de variable  $u(x, t) = u(z)$  con  $z = x - \omega t$ , de la ecuación (13) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) no lineal

$$(14) \quad F(u, -\omega u_z, u_z, -\omega u_{zz}, u_{zz}, u_{zzz}, \dots) = 0.$$

Ahora mostramos cómo podemos obtener la solución exacta de la ecuación (14) usando el enfoque del método  $R$ -Kudryashov propuesto en [9].

La implementación del método consta de los siguientes pasos:

**Paso 1:** Supondremos que la solución de la ecuación (14) es de la forma

$$(15) \quad u(z) = \sum_{i=0}^N a_i R^i(z) = a_0 + a_1 R(z) + \dots + a_N R^N(z)$$

donde cada  $a_i$  es una constante que se determinará más adelante y  $a_N \neq 0$ .  $R(z)$  es la función  $R$  definida en (1).

La diferencia del presente método con el método tradicional de Kudryashov es la función  $R$ , en el método tradicional la función  $R$  es una solución de la ecuación diferencial de Riccati  $R_z = R^2 - R$ . Mayores detalles acerca del método tradicional de Kudryashov pueden hallarse en [5].

**Paso 2:** Para determinar el número natural  $N$  que aparece en la ecuación (15), consideraremos el equilibrio homogéneo entre la derivada de mayor orden y el término algebraico no lineal de mayor orden en la ecuación (14).

**Paso 3:** Consideremos  $u(z)$  dada en (15) y las primeras derivadas parciales necesarias  $u_z, u_{zz}, u_{zzz}, \dots$ , para reemplazarlas en (14), y así obtendremos la ecuación polinomial:

$$(16) \quad P[R(z)] = 0.$$

**Paso 4:** En este paso, igualamos a cero las expresiones algebraicas en las mismas potencias de  $R$ . Así obtendremos un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que involucran los parámetros necesarios para obtener  $u(z)$  y por lo tanto de  $u(x, t)$ .

**Paso 5:** Este paso final consiste en encontrar una o varias familias de soluciones para el sistema de ecuaciones algebraicas obtenido en el paso anterior para los coeficientes  $a_i$  y  $\omega$  con el fin de encontrar soluciones de la ecuación (14), y por lo tanto del EDPNL (13).

### 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO $R$ -KUDRYASHOV

En esta sección, aplicamos el método  $R$ -Kudryashov para encontrar soluciones exactas de algunas EDPNL que modelan fenómenos que surgen de diversas áreas de la física-matemática.

#### Ejemplo 1: La ecuación de Triki-Biswas

La ecuación de Schrödinger no lineal (ESNL) es uno de los modelos más importantes de la física matemática que describe no solo el mundo cuántico, sino también muchos

fenómenos en campos tan diversos como la óptica no lineal, la física de plasmas, la oceanografía, la biología, entre muchos otros. En el contexto de la óptica no lineal, la ESNL es una ecuación fundamental para describir la propagación de pulsos ópticos a través de una fibra óptica.

Recientemente, H. Triki y A. Biswas en [10] han hecho una generalización de la ESNL y cuya utilidad es para describir la propagación de pulsos ultracortos, esta generalización se conoce en la literatura como la ecuación de Triki-Biswas (ETB) y ha sido estudiada en diferentes contextos por varios autores [11, 12, 13].

La forma adimensional de ETB es dada para  $n$  natural por

$$(17) \quad iq_t + aq_{xx} + ib(|q|^{2n}q)_x = 0,$$

donde  $q(x, t)$  gobierna la evolución de una onda no lineal,  $x$  es una variable longitudinal y  $t$  es el tiempo y  $i = \sqrt{-1}$ . Esta ecuación se conoce como modelo de Kaup-Newell si  $n = 1$ . Para  $n = 2$ , los términos de no linealidad tipo Kerr juegan un papel importante en la propagación de pulsos muy cortos de ancho alrededor de sub-10 fs en fibras ópticas con comportamientos altamente no lineales [14].

Consideremos la Ec. (17) con el cambio de variable  $q(x, t) = Q(z)e^{i(\eta(z)-\nu t)}$  donde  $z = x - \omega t$ , del cual obtenemos

$$(18) \quad q_x = \left[ Q'(z) + iQ(z)\eta'(z) \right] e^{i(\eta(z)-\nu t)},$$

$$(19) \quad q_{xx} = \left[ Q''(z) + 2iQ'(z)\eta'(z) + iQ(z)\eta''(z) - Q(z)(\eta'(z))^2 \right] e^{i(\eta(z)-\nu t)},$$

$$(20) \quad q_t = \left[ (-\omega Q'(z) - iQ(z))(\omega\eta'(z) + \nu) \right] e^{i(\eta(z)-\nu t)},$$

$$(21) \quad (|q|^{2n}q)_x = \left[ (2n+1)Q^{2n}(z)Q'(z) + iQ^{2n+1}(z)\eta'(z) \right] e^{i(\eta(z)-\nu t)}.$$

Sustituyendo las Ecs. (18)-(21) en la Ec. (17) y al descomponer en partes real e imaginaria, obtenemos:

$$(22) \quad \omega Q'(z) + a(Q(z)\eta''(z) + 2Q'(z)\eta'(z)) - (2n+1)bQ^{2n}(z)Q'(z) = 0,$$

y

$$(23) \quad \eta Q(z) + \omega Q(z)\eta'(z) - bQ^{2n+1}(z)\eta'(z) + aQ(z)(\eta'(z))^2 - aQ''(z) = 0.$$

Multiplicando la Ec. (22) por  $Q$  e integrando con respecto a  $z$  y tomando la constante de integración nula, obtenemos

$$(24) \quad \frac{\omega}{2}Q^2(z) + aQ^2(z)\eta'(z) - \frac{(2n+1)b}{2n+2}Q^{2n+2}(z) = 0,$$

de donde obtenemos,

$$(25) \quad \eta'(z) = \frac{(2n+1)b}{(2n+2)a}Q^{2n}(z) - \frac{\omega}{2a}.$$

Sustituyendo (25) en (23) obtenemos la ecuación diferencial

$$(26) \quad Q''(z) - \left( \frac{4a\nu - \omega^2}{2a^2} \right) Q(z) - \frac{b\omega}{2a^2}Q^{2n+1}(z) + \frac{b^2(2n+1)}{4a^2(n+1)^2}Q^{4n+1}(z) = 0$$

o, bien

$$(27) \quad Q''(z) + c_1Q^{4n+1}(z) + c_2Q^{2n+1}(z) + c_3Q(z) = 0,$$

donde

$$c_1 = \frac{b^2(2n+1)}{4a^2(n+1)^2}, \quad c_2 = -\frac{b\omega}{2a^2}, \quad c_3 = \frac{\omega^2 - 4a\nu}{2a^2}.$$

Balanceando  $Q''$  con  $Q^{4n+1}$  obtenemos

$$N + 2 = (4n + 1)N \Rightarrow N = \frac{1}{2n}.$$

Puesto que  $N$  no es entero, usaremos el cambio

$$(28) \quad Q(z) = \sqrt[2n]{U(z)}$$

Bajo esta nueva transformación, la Ec. (27) resulta ser

$$(29) \quad 2nUU'' + (1 - 2n)(U')^2 + 4n^2[c_1U^4 + c_2U^3 + c_3U^2] = 0.$$

Balanceando  $UU''$  y el término  $U^4$  obtenemos  $N = 1$ . Así, para aplicar el método propuesto, consideremos

$$(30) \quad U(z) = a_0 + a_1R(z).$$

Además, como  $R_z^2 = R^2(1 - \chi R^2)$ , sustituyendo en (29) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} 4c_1a_0^4n^2 + 4c_2a_0^3n^2 + 4c_3a_0^2n^2 &= 0 \\ 16a_1c_1a_0^3n^2 + 12a_1c_2a_0^2n^2 + 8c_3a_0a_1n^2 + 2na_0a_1 &= 0 \\ 24c_1a_0^2a_1^2n^2 + 12a_0c_2a_1^2n^2 + 4c_3a_1^2n^2 + a_1^2 &= 0 \\ 16a_0c_1a_1^3n^2 + 4c_2a_1^3n^2 - 4a_0a_1n\chi &= 0 \\ 4c_1a_1^4n^2 - 2n\chi a_1^2 - \chi a_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviéndolo simultáneamente, obtenemos los siguientes conjuntos de soluciones y las correspondientes familias de solitones:

**Conjunto 1:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{3c_2^2 - 9c_1}{9c_1},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(31) \quad q_1(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_1t)} + de^{-(x-\omega_1t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(32) \quad q_{1,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_1t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(33) \quad q_{1,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_1t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{2a^2c_2^2 - 6a^2c_1 + 12ac_1\nu}{3c_1}}.$$

**Conjunto 2:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{9c_2^2 - 8c_1}{32c_1},$$

de donde, considerando (28) and (30), la familia de soluciones asociada es

$$(34) \quad q_2(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1} - c_2}{4c_1} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_2t)} + de^{-(x-\omega_2t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , tenemos

$$(35) \quad q_{2,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1} - c_2}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_2t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(36) \quad q_{2,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1} - c_2}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_2t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_2 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9a^2c_2^2 - 8a^2c_1 + 64ac_1\nu}{c_1}}.$$

**Conjunto 3:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = -\frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{n^2 - 2n - 1}{4n^4 + 8n^3 + 4},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(37) \quad q_3(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_3t)} + de^{-(x-\omega_3t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(38) \quad q_{3,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_3t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(39) \quad q_{3,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_3t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{a^2n^2 - 2a^2n - a^2 + 8an^4\nu + 16an^3\nu + 8a\nu}{2n^4 + 4n^3 + 2}}.$$

**Conjunto 4:**

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n}, \quad \text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{2n - 1}{4n^2},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(40) \quad q_4(x, t) = \left[ \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_4t)} + de^{-(x-\omega_4t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)}$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(41) \quad q_{4,1}(x, t) = \left[ \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_4t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(42) \quad q_{4,2}(x, t) = \left[ \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_4t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_4 = \pm \sqrt{\frac{a^2(2n + 1) + 8an^2\nu}{2n^2}}.$$

En todos los casos, la función  $\eta$  se obtiene de la Ec. (25).

La figura 1 muestra un solitón brillante que se obtiene de la familia  $q_{2,1}$  eligiendo ciertos parámetros para los coeficientes y el índice de no linealidad en Ec. (17).

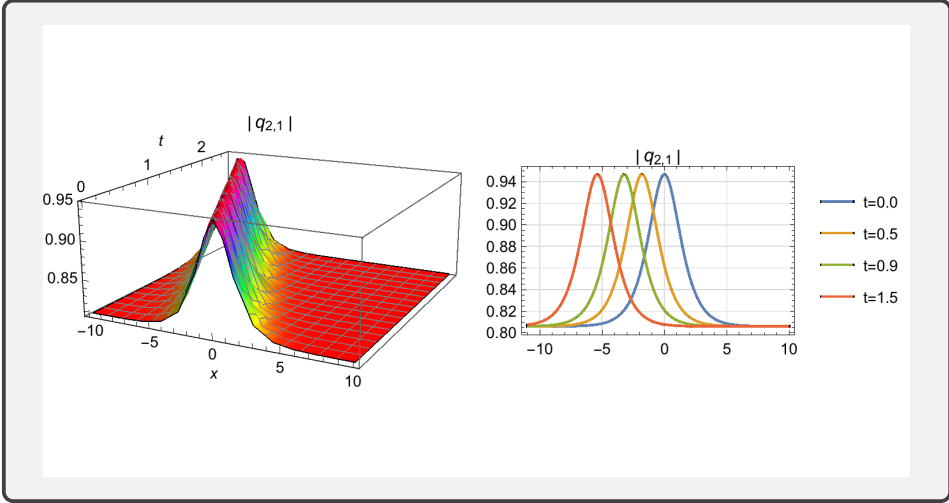


FIGURA 1. Evolución de un solitón brillante para la Ec. (17) con  $a = 4$ ,  $b = 3$  y  $n = 5$  (izquierda). Evolución de la solución en 2D para  $t = 0.0$ ,  $t = 0.5$ ,  $t = 0.9$  y  $t = 1.5$  (derecha).

**Ejemplo 2: La ecuación de Fokas-Lenells (EFL) perturbada**

La forma adimensional de la EFL perturbada es dada por

$$(43) \quad iq_t + a_1q_{xx} + a_2q_{xt} + |q|^2(bq + i\sigma q_x) = i[\alpha q_x + \lambda(|q|^2q)_x + \mu(|q|^2)_xq].$$

Esta ecuación fue estudiada por primera vez en [15, 16, 17, 18] y surge en óptica al considerar los efectos ópticos lineales y no lineales de orden superior así como los efectos dispersivos espacio-temporales. La EFL perturbada se ha derivado como un modelo para describir la propagación de pulsos con duración de femtosegundos a través de fibras óptica monomodales de silicio. En la Ec. (43),  $q(x, t)$  es una función complejo-valuada que representa la evolución de una onda no lineal,  $x$  y  $t$  son variables espaciales y temporales, respectivamente. El coeficiente  $a_1$  es la velocidad de dispersión y  $a_2$  representa la dispersión espacio-temporal, el coeficiente  $b$  representa la modulación de auto-fase, además  $\sigma$  considera la dispersión no lineal. En el término de perturbación del lado derecho de la Ec. (43), el primer término representa la dispersión intermodal, el segundo término es el efecto de auto-atenuación y, finalmente, el último término representa la rapidez de la dispersión no lineal.

Consideremos la Ec. (43) con el cambio de variable  $q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega t)}$  donde  $z = x - \nu t$ , del cual obtenemos, descomponiendo en parte real e imaginaria

$$(44) \quad \omega y + a_1(y_{zz} - k^2y) - a_2(\nu y_{zz} - \omega ky) + y^2(by - \sigma ky) = -(\alpha ky + \lambda ky^3),$$

$$(45) \quad (2ka_1 - \nu)y_z - a_2(\omega + k\nu)y_z + \sigma y^2y_z = \alpha y_z + 3\lambda y^2y_z + 2\mu y^2y_z,$$

respectivamente.

Integrando una vez la Ec. (45) y tomando al constante de integración nula, obtenemos

$$(46) \quad [-\nu + 2a_1k - a_2(\omega + k\nu) - \alpha]y + (\sigma - 3\lambda - 2\mu)\frac{y^3}{3} = 0.$$

Ahora, elegimos los parámetros de la Ec. (46) tales que los coeficientes de  $y$  y  $y^3$  sean cero, así obtenemos

$$(47) \quad \sigma = 3\lambda + 2\mu, \quad \nu = \frac{2a_1k - a_2\omega - \alpha}{1 + a_2k}.$$

Considerando esto, podemos escribir la parte real (44) en una forma más simple, esto es

$$(48) \quad y_{zz} + b_1y + b_3y^3 = 0,$$

donde  $b_1$  y  $b_3$  son constantes dadas por

$$(49) \quad b_1 = \frac{\omega - a_1k^2 + a_2\omega k + \alpha k}{a_1 - a_2\nu}, \quad b_3 = \frac{b - \sigma k + \lambda k}{a_1 - a_2\nu}, \quad a_1 \neq a_2\nu.$$

Haciendo el balance entre  $y_{zz}$  y  $y^3$  obtenemos  $N = 1$ . Entonces por el método  $R$ -Kudryashov, la solución tipo onda solitaria estará dada por

$$(50) \quad y(z) = A_0 + A_1R(z).$$

Sustituyendo esta forma de la solución en (48) y al usar las derivadas de la función de  $R$  de Kudryashov, obtenemos

$$(51) \quad A_1(R - 2\chi R^3) + b_1(A_0 + A_1R) + b_3(A_0 + A_1R)^3 = 0.$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $R$  a cero, tenemos:

$$(52) \quad A_1 = \sqrt{\frac{2\chi}{b_3}}, \quad A_0 = 0, \quad b_1 = -1.$$

Usando el valor obtenido de  $b_1$  en (49) y considerando el valor de  $\nu$  de (47), obtenemos

$$(53) \quad \omega = \frac{a_1a_2k^3 + (a_1 + \alpha a_2)k^2 + (\alpha + a_1a_2)k - (a_1 + \alpha a_2)}{a_2^2k^2 + 2a_2k + a_2^2 + 1}$$

y además

$$(54) \quad \nu = \frac{a_1a_2 + (3a_1a_2^2 + 2a_1 - \alpha a_2)k + (3a_1a_2 - 2\alpha a_2^2)k^2 + a_2a_2^2k^3}{a_2^2(1 + a_2k) + (1 + a_2k)^3}.$$

Finalmente, combinando (47), (49), (53) y (54), obtenemos

$$(55) \quad k = \frac{-2a_1a_2 \pm \sqrt{4a_1^2a_2^2 + 4\alpha a_2(\alpha a_1a_2 - a_1 - 2\alpha a_2)}}{2(\alpha a_1a_2 - a_1 - 2\alpha a_2)}.$$

Considerando todo lo anterior, tenemos que las soluciones de la EFL perturbada son dadas por:

$$(56) \quad q(x, t) = \pm \sqrt{\frac{2\chi}{b_3}} \left[ \frac{4a}{4a^2e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right] e^{i(kx - \omega t)}.$$

Recientemente, en [19, 20] se ha estudiado un modelo similar al proporcionado por la Ec. (43) utilizando el método  $R$  Kudryashov.

### Ejemplo 5: La ecuación de Kawahara (EK)

La ecuación de Kawahara es dada por [21]

$$(57) \quad u_t + uu_x + pu_{xxx} + qu_{xxxx} = 0.$$

En (57),  $p$  y  $q$  denotan constantes reales. Este ecuación no lineal dispersiva fue propuesta por Kawahara en el año 1972 en [21] como un modelo matemático que considera la evolución de olas en aguas poco profundas. En [5, 22] se abordaron versiones modificadas de esta ecuación. La EK representa un ejemplo de un sistema altamente dispersivo y su estudio aquí es puramente ilustrativo, proporcionando un caso para tratar con otra EDPNL con dispersión de orden superior.



Consideremos la Ec. (57) con el cambio de variable  $u(x, t) = y(z)$  donde  $z = x - \nu t$ , del cual obtenemos,

$$(58) \quad qy_{zzzz} + py_{zz} + \frac{y^2}{2} - \nu y = 0.$$

Tenga en cuenta que hemos tomado la constante de integración como cero. Haciendo el balance entre  $y_{zzzz}$  y  $y^2$  obtenemos  $N = 4$ . Entonces por el método  $R$ -Kudryashov, la solución tipo onda solitaria de la Ec. (58) estará dada por

$$(59) \quad y(z) = A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3 + A_4 R^4.$$

Sustituyendo en (58) obtenemos directamente  $A_1 = A_3 = 0$  y el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} A_4 + 1680q\chi^2 &= 0 \\ 96q\chi A_2 - (p + 52q)A_4 &= 0 \\ (256q - \nu)A_4 - (6p + 24q)\chi A_2 + A_0 A_4 + A_2^2 &= 0 \\ (16q + 4p + A_0 - \nu)A_2 &= 0 \\ (A_0 - 2\nu)A_0 &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtienen los siguientes conjuntos de soluciones:

**Conjunto 1:**

$$A_0 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = 256q, \quad p = -52q.$$

**Conjunto 2:**

$$A_0 = -512q, \quad A_2 = 0, \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = -256q, \quad p = -52q.$$

**Conjunto 3:**

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_2 &= -\frac{1120}{59}(-3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \\ \nu &= \frac{64}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = \frac{4}{59}(-815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 4:**

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{128}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad A_2 = -\frac{1120}{59}(-3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \\ A_4 &= -1680\chi^2 q, \quad \nu = -\frac{64}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = \frac{4}{59}(-815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 5:**

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_2 &= \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \\ \nu &= -\frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 6:**

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{128}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad A_2 = \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \\ A_4 &= -1680\chi^2 q, \quad \nu = \frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el conjunto 5 obtenemos la familia de soluciones para la Ec. (57)

$$(60) \quad \begin{aligned} u_v(x, t) &= \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q) \left[ \frac{4c}{4c^2 e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right]^2 \\ &\quad - 1680\chi^2 q \left[ \frac{4c}{4c^2 e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right]^4 \end{aligned}$$

siendo  $\nu = -\frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q)$ ,  $\chi = 4cd$ , además  $p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q)$  es la relación entre los coeficientes  $p$  y  $q$  para que esta función  $u_\nu$  sea solución de (57). La figura 2 muestra un solitón oscuro que se obtiene de la familia  $u_\nu$  eligiendo ciertos parámetros de la Ec. (57).

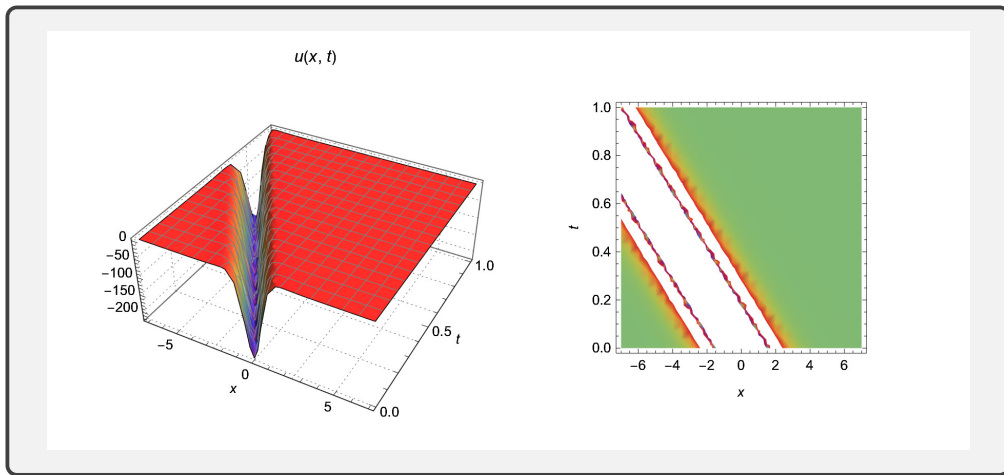


FIGURA 2. Evolución de un solitón oscuro para la Ec. (57) con  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\chi = 4$ ,  $\alpha = 1$  y  $q = 0.01$  (izquierda). Gráfica de la densidad del solitón para  $-6 \leq x \leq 6$  y  $0 \leq t \leq 1$  (derecha).

**Ejemplo 4: La ecuación Korteweg-de Vries (KdV) modificada**

La ecuación de KdV modificada es dada por:

$$(61) \quad u_t + \alpha\sqrt{u}u_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

En el contexto de la física del plasma, en [23] los autores obtuvieron la ecuación anterior estudiando las propiedades de la propagación de ondas acústicas solitarias en un plasma homogéneo y pulverizado, sin magnetizar y sin colisiones electrónicas con iones no térmicos.

Para encontrar soluciones exactas para la EDPNL (61), primero introducimos el siguiente cambio de variable,  $u = w^2$  y con él, escribimos la ecuación (61) como:

$$(62) \quad ww_t + \alpha w^2 w_x + 3\beta w_x w_{xx} + \beta w w_{xxx} = 0.$$

Ahora, suponiendo una solución tipo onda viajera de la forma,  $w = y(z)$  con  $z = x - \nu t$ , obtenemos la EDO no lineal

$$(63) \quad \beta y y_{zzz} + 3\beta y_z y_{zz} - \nu y y_z + \alpha y^2 y_z = 0.$$

Considerando equilibrio homogéneo, obtenemos  $N = 2$ . Por lo tanto, las soluciones, de acuerdo con (15), serán de la forma

$$(64) \quad y(z) = a_0 + a_1 y(z) + a_2 y^2(z).$$

Sustituyendo la forma anterior de la solución en la ecuación (63) y usando las expresiones algebraicas para  $y_z, y_{zz}$ , obtenemos un polinomio de quinto grado en  $R$ . Igualando los coeficientes de cada grado algebraico de  $R$  a cero, obtenemos

$$(65) \quad a_2 = \frac{30\beta\chi}{\alpha}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -\frac{20\beta}{\alpha}, \quad \nu = -16\beta.$$

por lo tanto, después de hacer cambios inversos de variables, obtenemos las familias paramétricas de soluciones para la ecuación KdV modificada dadas por

$$(66) \quad u(x, t) = \left[ -\frac{20\beta}{\alpha} + \frac{30\beta\chi}{\alpha} \left( \frac{4c}{4c^2 e^{(x+16\beta t)} + \chi e^{-(x+16\beta t)}} \right) \right]^2.$$

donde,  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros propios de la ecuación KdV modificada,  $\alpha \neq 0$  y tanto  $c$  como  $\chi$  son parámetros reales abiertos que definen a la función  $R$  de Kudryashov. La figura 3 muestra un solitón brillante en forma de W que se obtiene de la Ec. (66) con los valores de los parámetros que se indican en la misma figura.

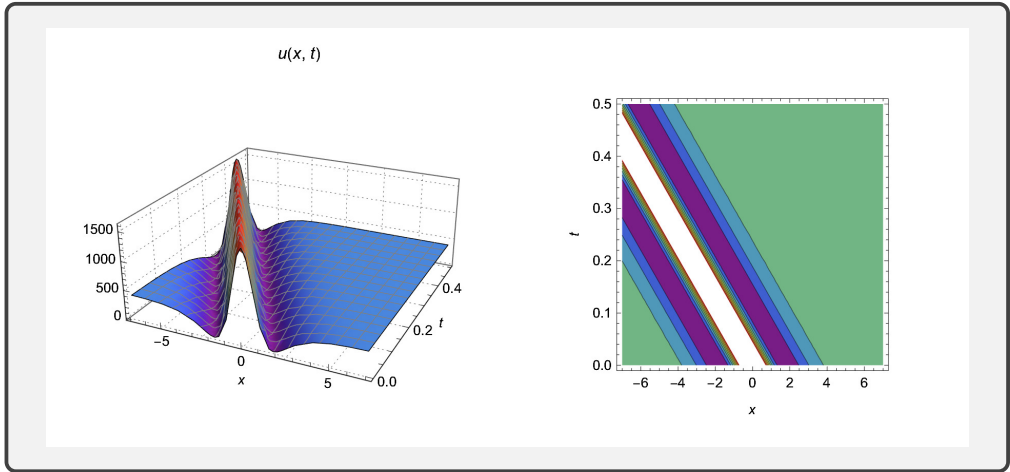


FIGURA 3. Evolución de un solitón brillante con forma de W para la Ec. (66) con  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\chi = 4$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$  (izquierda). Evolución del contorno en 2D para  $-6 \leq x \leq 6$  y  $0 \leq t \leq 0.5$  (derecha).

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo hemos empleado el método  $R$  de Kudryashov para encontrar soluciones tipo ondas solitarias de algunas EDPNL que surgen con frecuencia en algunas ramas de la física. El algoritmo para deducir tales soluciones está claramente marcado por una gran simplificación debido a las propiedades intrínsecas de la función  $R$  de Kudryashov. El método que hemos expuesto es particularmente efectivo para encontrar soluciones exactas para EDPNL dispersivas de orden superior, y tiene ventajas significativas sobre otros enfoques de este tipo. Una ventaja es el hecho de que en los cálculos no usamos la forma de una función específica y otra es que resulta fácil de implementar simbólicamente como lo ilustramos a través de algunos ejemplos. El método que hemos descrito y empleado en este artículo puede aplicarse a una amplia variedad de EDPNL que surgen en otras ramas de las ciencias aplicadas para explorar analíticamente diferentes sistemas complejos no lineales.

## REFERENCIAS

- [1] Nayfeh, A. H., *Perturbation methods*. New York, John Wiley & Sons, 1973.
- [2] Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*. New York, John Wiley & Sons, 1999.
- [3] Kudryashov, A. N. & Loguinova, N. B. *Be careful with the Exp-function method*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14, 1881-1890, 2009.
- [4] Kudryashov, A. N. *One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17, 2248-2253, 2012.
- [5] González-Gaxiola, O., León-Ramírez, A. & Chacón-Acosta, G. *Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the Schamel-Kawahara equation*. Russian J. Nonlinear Dyn., 18(2), 203-215, 2022.
- [6] León-Ramírez, A., González-Gaxiola, O. & Chacón-Acosta, G. *Analytical solutions to the Chavy-Waddy-Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes*. Mathematics, 10(11), 2352, 2023.
- [7] Gaber, A. A., Aljohani, A. F., Ebaid, A. & Tenreiro Machado, J. *The generalized Kudryashov method for nonlinear space-time fractional partial differential equations of Burgers type*. Nonlinear Dyn., 95(1), 361-368, 2019.

- [8] Kudryashov, A. N. *Logistic function as solution of many nonlinear differential equations*. Appl. Math. Model., 39, 5733-5742, 2015.
- [9] Kudryashov, A. N. *Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations*. Optik, 206, 163550, 2020.
- [10] Triki, H. & Biswas, A. *Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model*. Optik, 173, 235-241, 2018.
- [11] Kudryashov, N. A. *First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation*. Optik, 185, 275-281, 2019.
- [12] Kara, A. H. *A the invariance and conservation laws of the Triki-Biswas equation describing monomode optical fibers*. Optik, 186, 300-302, 2019.
- [13] González-Gaxiola, O. *Optical soliton solutions for Triki-Biswas equation by Kudryashov's R function method*. Optik, 249, 168230, 2022.
- [14] Choudhuri, A. & Porsezian, K. *Higher-order nonlinear Schrödinger equation with derivative non-Kerr nonlinear terms: A model for sub-10-fs-pulse propagation*. Phys. Rev. A, 88, 033808, 2013.
- [15] Fokas, A. S. *On a class of physically important integrable equations*. Physica D, 87, 145-150, 1995.
- [16] Lenells, J. *Exactly solvable model for nonlinear pulse propagation in optical fibers*. Stud. Appl. Math., 123, 215-232, 2009.
- [17] Lenells, J. & Fokas, A. S. *On a novel integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation*. Nonlinearity, 22, 11-27, 2009.
- [18] Yang, C., Liu, W., Zhou, Q., Mihalache, D. & Malomed, B. A. *One-soliton shaping and two-soliton interaction in the fifth-order variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation*. Nonlinear Dyn., 95, 369-380, 2019.
- [19] Yadav, R., Malik, S., Kumar, S., Sharma, R., Biswas, A., Yildirim, Y., González-Gaxiola, O., Moraru, L. & Alghamdi, A. A. *Highly dispersive W-shaped and other optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity: Symmetry analysis and new Kudryashov's method*. Chaos, Solitons & Fractals, 173, 113675, 2023.
- [20] Elsherbeny, A. M., Arnous, A. H., Biswas, A., González-Gaxiola, O., Moraru, L., Moldovanu, S., Iticescu, C. & Alshehri, H. M. *Highly dispersive optical solitons with four forms of self-phase modulation*. Universe, 9(1), 51, 2023.
- [21] Kawahara, T. *Oscillatory solitary waves in dispersive media*. J. Phys. Soc. Japan, 33(1), 260-264, 1972.
- [22] Wazwaz, A. M. *New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation*. Phys. Lett. A, 360, 588-592, 2007.
- [23] Adhikary, N. C., Deka, M. K., Dev, A. N. & Sarmah, J. *Modified Korteweg-de Vries equation in a negative ion rich hot adiabatic dusty plasma with non-thermal ion and trapped electron*. Physics of Plasmas, 21, 083703, 2014.

*Oswaldo González-Gaxiola*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Cuajimalpa.

División de Ciencias Naturales e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.

Av. Vasco de Quiroga 4871, Santa Fe, Cuajimalpa

C.P. 05300, Ciudad de México.

e-mail: ogonzalez@cua.uam.mx