mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

www.doi.org/1024275/uami/dcbi/mix/V16n1/2025 ISSN: 2007-7874



Vol. 16, No.1, enero-diciembre del 2025

Revista de divulgación e investigación del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, dedicada a promover las ideas y la creación de todos aquellos interesados en el quehacer matemático.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Casa abierta al tiempo | UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Directorio

Gustavo Pacheco López
Rector General.

Verónica Medina Bañuelos
Rectora Unidad Iztapalapa.

Román Linares Romero
Director de CBI, UAM-Iztapalapa.

Raúl Montes de Oca Machorro
Jefe del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.

Coordinador Editorial
Mario Pineda Ruelas
mpr@xanum.uam.mx

Comité Editorial

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Jorge R. Bolaños Servín
jrbs@xanum.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
stbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
cell@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@cimat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@cimat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

Diseño logo Michael Rivera Arce
Portada revista dibujo Miryam Mielke

MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/ index.php/revistamixba-al. Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN5 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186,Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 121.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Presentación

Queridos lectores, en este número de MIXBA'AL les presentamos varios artículos de divulgación ó investigación, entre ellos, los trabajos del TOMMAD 2025 y los 7 librillos que escribieron investigadores del Departamento de Matemáticas de la UAM-I para el 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Notarán la diferencia entre algunos trabajos; unos son propiamente divulgación seria y otros son bastante especializados, pero atractivos para aquellos que dominan el tema en cuestión. Esperamos que en nuestra propuesta del 2025 puedan encontrar algo de su interés.

A LOS AUTORES

MIXBA'AL, Revista Metropolitana de Matemáticas, es una revista de publicación anual de divulgación e investigación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Los artículos sometidos, pueden ser trabajos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas, por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos; artículos panorámicos sobre un área de investigación; la presentación distinta de algún tema vinculado a la docencia; aplicaciones o aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español impecable; eventualmente podrán aceptarse trabajos en inglés. Éstos deben ser enviados a cualquiera de los editores en formato pdf y en un plazo no mayor a un mes, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista; es caso que así sea, se enviará a arbitraje.

Cuando un trabajo reciba arbitraje favorable, se le comunicará al autor y en un plazo no mayor a tres semanas, deberá reenviarlo al editor responsablle, atendiendo las sugerencias del árbitro y en el formato oficial de la revista. El trabajo debe estar organizado de la siguiente forma: título, resumen no mayor a 100 palabras, clasificación de la AMS 2020, palabras clave, introducción y en seguida el desarrollo del mismo. Para someter un artículo a la revista, es recomendable enviarlo en el formato oficial de **MIXBA'AL**.

CONTENIDO

3 Presentación

9 *Problema de clasificación de foliaciones en $\P^2$ con Teoría de Invariantes Geométricos (GIT)*
P. Rubí Pantaleón-Mondragón & Juan Vásquez Aquino

25 *Una nota sobre árboles biplanares*
Elsa Patricia Omaña Pulido y Eduardo Rivera Campo

33 *Perturbación unidimensional de relaciones autoadjuntas*
Josué I. Rios-Cangas

45 *La curva de Fargues–Fontaine: Una motivación al estudio de la teoría de representaciones de Galois p-ádicas*
Jorge A. Robles Hdez. y J. Rogelio Pérez-Buendía

61 *Un panorama de los automovilistas y sus hábitos al volante en Saltillo, Coahuila*
Pedro Reyes-Pérez, Jaime Burgos-García y Carolina Ramos-Durán

77 *Polinomios y el cálculo de proposiciones*
Alejandro Aguilar Zavoznik

89 *Uso de la herramienta de simulación MATLAB para solución de problemas matemáticos y sus aplicaciones*
Luis A. Vásquez Toledo

233 *Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025*

235 *Coloraciones localizadoras*
Narda Cordero-Michel, Diego González-Moreno

243 *Conjuntos de visibilidad mutua*
Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol, Luis J. López Barrios, Aldo Lozano Piña, Miryam S.N. Mielke Méndez, Raúl Vélez Limón

255 *Destruyendo gráficas*
Juan Carlos García Altamirano

269 *Un modelo de propagación de VIH en una población*
Claudia M. de la Cruz, Julián Fresán-Figueroa, Bruno Graf-Romero, María F. Pérez-Sánchez, Nancy V. Prado Martínez, Pablo C. Sánchez-Silva

277 *Gráficas de re-coloración:¿puedes transformar una coloración en otra sin romper las reglas?*
Romina Barcena Morales, Emilio Y. Licea Mesino, David D. López Contreras, Mika Olsen, Lizzeth A. Sánchez Solis

289 *La geometría de la Mecánica Clásica. El formalismo geométrico con un enfoque físico*
Rafael Leonardo Azuaje Hidalgo, Adrián Mauricio Escobar Ruiz

347 Presentación de las notas del 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Foto del evento

[1]*Análisis de datos con un enfoque bayesiano*
Asael Fabian Martínez Martínez

[2] *Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas*
Rogelio Fernández-Alonso González, Silvia Claudia Gavito Ticozzo, Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

[3] *Resultados relevantes del álgebra lineal en modelos y aplicaciones*
Lorenzo Héctor Juárez Valencia

[4] *Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental*
Josué Mléndez Sánchez, Eduardo Rodríguez Romero

[5] *Una breve introducción a los torneos y sus generalizaciones*
Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol

[6] *Del cero al quantum: un viaje al mundo de los códigos*
Jorge R. Bolaños Servín, Yuriko Pitones Amaro, Josué I. Ríos Cangas

[7] *Introducción a la teoría de juegos epistémica*
Rubén Becerril Borja

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 9-23.
Recibido 24-02-2025. Aceptado 04-06-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/prujuva



PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE FOLIACIONES EN $\mathbb{CP}^2$ CON TEORÍA DE INVARIANTES GEOMÉTRICOS (GIT)

P. RUBÍ PANTALEÓN-MONDRAGÓN & JUAN VÁSQUEZ AQUINO

Resumen. En este artículo panorámico explicamos algunos resultados sobre el problema de clasificación de foliaciones holomorfas de grado 1, 2 y 3 sobre el plano proyectivo complejo usando la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT). Proporcionamos ejemplos explícitos de foliaciones con un único puntos singular y diferentes multiplicidades, además, su clasificación por estabilidad GIT.

1. Introducción

La teoría geométrica de foliaciones se conoce desde principios del siglo XX con los trabajos de C. Ehresmann y G. Reeb. Fue motivada por entender mejor los problemas de estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales. Se cree que tomó impulso al querer resolver el problema 16 de una lista de 23 problemas presentada en 1900 en un congreso de matemáticas en París por el matemático alemán David Hilbert y estudiado principalmente por H. Poincaré. Este problema busca determinar una cota en el número de ciclos límites (conjunto límite de las soluciones periódicas) de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

con $P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$. Sin embargo, este problema sigue sin ser resuelto. En [1], el autor explica los intentos fallidos por tratar de resolverlo. Aunque también muestra los significativos avances en otras áreas, entre ellas la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales y, por supuesto, la teoría de foliaciones. Uno de los enfoques dados en dicho problema fue la complexificación, es decir, en lugar de trabajar sobre los reales se emplean los complejos. En foliaciones, la complexificación abrió muchos problemas, por ejemplo, la existencia de foliaciones con conjuntos minimales no triviales [2], o existencia y clasificación de foliaciones con propiedades específicas en ellas. En general, estos problemas no son fáciles de calcular, por lo que se usan diferentes técnicas, herramientas y teorías para poder decir u obtener información de estos objetos. En este artículo buscamos explicar a través de ejemplos explícitos, una de las herramientas más importantes usadas en geometría algebraica para construir espacios moduli; la Teoría de Invariantes Geométricos (conocida como GIT por sus siglas en inglés) aplicada a la teoría de foliaciones, la cual nos permite exponer explícitamente clases o familias de foliaciones sobre el plano proyectivo $\mathbb{CP}^2$ con propiedades específicas, así como su complejidad. Nos enfocaremos en una clase interesante de foliaciones, proporcionando ejemplos con propiedades específicas y los avances en este problema.

Recordemos que un sistema de ecuaciones como (1) puede interpretarse como un campo vectorial X cuyas soluciones son curvas que son tangentes a este campo en cada punto de sus trayectorias (como muestra la Figura 1) y esto es análogo al considerar el campo $\mathbb{C}$.

Al igual que en el plano real, el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas nos garantiza que por cada punto pasa una y solo

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32S65, 14B05, 37F75, 32M25, 14L30.
Palabras clave. Foliaciones holomorfas, Teoría de Invariantes Geométricos, Acciones de grupos algebraicos, GIT-estabilidad.

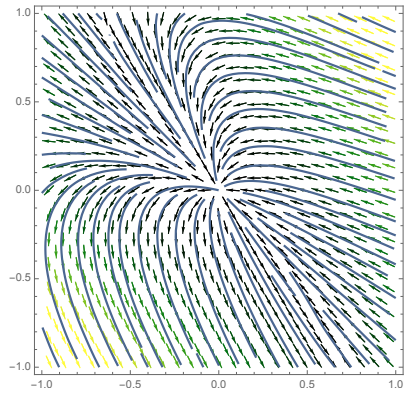


FIGURA 1. Flujo de un campo vectorial.

una solución σ satisfaciendo la condición inicial $\sigma(t_0) = p$, salvo en los puntos donde el campo se "anula ". Es decir, salvo en estos puntos, las soluciones descomponen al espacio $(\mathbb{C}^2)$ en curvas. Esta descomposición es conocida como "foliaciones por curvas asociadas al campo vectorial X". Además, salvo en los puntos donde el campo se anula (llamados puntos singulares), podemos "enderezar "a las curvas (como se muestra en la Figura (2)) obteniendo un comportamiento lineal. Entonces, ¿dónde radica el problema?, pareciera que todo el comportamiento es rectificable. El problema surge cuando uno desea ver el comportamiento alrededor de puntos donde el campo vectorial se anula, por lo que surgen las siguientes preguntas: ¿el conjunto singular del campo vectorial nos da información para definir a la foliación asociada?, ¿una foliación puede ser determinada por un campo vectorial?, etc.

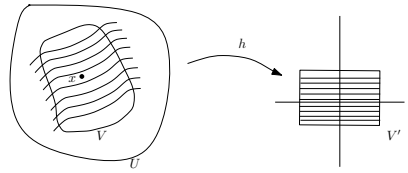


FIGURA 2. Rectificación en una vecindad sin "puntos anuladores"

En [3] Gómez-Mont y Ortiz exponen ampliamente cómo una foliación por curvas sobre un espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$ puede ser descrita por campos vectoriales polinomiales homogéneos en $\mathbb{C}^{n+1}$. En particular, en este artículo nos centraremos en foliaciones holomorfas sobre $\mathbb{CP}^2$. Un sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales como en (1), con $P(x, y)$, $Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, representará una foliación de $\mathbb{CP}^2$ (de manera local). Con esta representación se puede hablar del conjunto singular del campo vectorial asociado y más aún, el conjunto singular jugará un papel muy importante para su comportamiento. De hecho, sobre el plano proyectivo, el conjunto de puntos donde el campo se anula puede ser finito o infinito. En el caso finito, en 1998, Gómez-Mont y Kempf en [4] probaron que si el número de puntos singulares del campo vectorial son diferentes, entonces la foliación asociada está completamente determinada por ellos. Más adelante, en 2001, Campillo y Olivares [5] dan una generalización considerando puntos con multiplicidad (es decir, se valen puntos repetidos) siempre y cuando la foliación sea de grado diferente de 1. Las preguntas naturales en este caso son ¿qué tantos puntos singulares puede tener una foliación?, ¿cualquier configuración de puntos sobre $\mathbb{CP}^2$ determina una foliación con este conjunto singular?

Una de las herramientas importantes cuando se trata de clasificar objetos es la GIT. En la sección 4, daremos un repaso introductorio de esta teoría usando ejemplos simples de su aplicación. Ejemplo de aplicaciones de la GIT sobre foliaciones en el plano proyectivo se puede ver en [6, 7, 8] y [9].

Las secciones están formadas de las siguientes maneras. En la sección (2), hacemos un recordatorio sobre curvas planas y algunas propiedades en ellas. En la sección (3) presentamos los conceptos de foliaciones que usamos a lo largo del texto. A continuación, en la sección (4), introduciremos a grandes rasgos la teoría de invariantes geométricos aplicada sobre el espacio de foliaciones. En la sección (5) tenemos el objetivo principal del escrito, es decir, presentaremos los resultados conocidos de la estabilidad de foliaciones de grado $1, 2$ y 3 con un único punto singular, nuestras aportaciones en ejemplos explícitos y bibliografía donde el interesado en el tema puede explorar para más detalles. Para finalizar, en la sección (6) presentaremos nuestras conclusiones y problemas abiertos en esta línea de investigación.

2. Preliminares básicos

El espacio proyectivo complejo de dimensión n, denotado por $\mathbb{CP}^n$, se define como el conjunto de clases de equivalencia $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\})/\sim$, donde $\sim$ se define de la siguiente manera: dos puntos no cero p y q de $\mathbb{C}^{n+1}$ son equivalentes $(p \sim q)$ si y sólo si existe un escalar no cero, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, tal que $p = \lambda q$. De esta manera, $\mathbb{CP}^n$ parametriza líneas de $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen, sin contener el origen.

Denotaremos a las clases de equivalencia de un punto como $[x_0 : \cdots : x_n]$, también conocidas como coordenadas homogéneas de $\mathbb{CP}^n$. En el caso particular $n = 2$, llamamos al espacio $\mathbb{CP}^2$ como *plano proyectivo*, y denotamos sus coordenadas homogéneas por $[x : y : z]$.

Sean $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n+1$ variables y $S = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ un conjunto finito de polinomios. Denotaremos por

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m) = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f_1(p) = \cdots = f_m(p) = 0\}$$

al conjunto de ceros comunes de los polinomios en S. Con esta definición es fácil ver que $\mathbb{V}(S) = \cap_{f \in S} \mathbb{V}(f)$.

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ de grado d se puede expresar como

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{d-1} + f_d,$$

donde cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k, es decir, todos los monomios de f_k tienen grado k, con $k \in \{0, \ldots, d\}$. En particular, en este escrito, nos interesan los polinomios en no más de 3 variables.

Cuando $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio no constante de grado d, $\mathbb{V}(f)$ define una curva de grado d en $\mathbb{C}^2$. Análogamente, un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d satisface que, para todo $p \in \mathbb{C}^3$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $F(\lambda p) = \lambda^d F(p)$. Así, dado que F se escribe de la forma

$$F = \sum_{i+j+k=d} a_{ij} x^i y^j z^k \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ no todos cero,}$$

si $F(p) = 0$ entonces $F(\lambda p) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, es decir, F se anula en toda la clase de p en $\mathbb{CP}^2$. Denotamos por $\mathbb{C}[x, y, z]_d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado d. Al conjunto $C = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{CP}^2$, donde $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ es un polinomio no cero, se le llama *curva plana de grado d*. Para cada $p \in \mathbb{CP}^2$, la multiplicidad de p respecto a la curva plana $C = \mathbb{V}(F)$ se define de la siguiente manera, supongamos que $p = [1 : 0 : 0]$ (salvo cambio de coordenadas) y $f(y, z) = F(1, y, z)$, entonces, $m_p(f) = 0$ si $p \notin C$ o $m_p(f) = m$ si $f(y, z) = f_m + f_{m+1} + \ldots + f_d$ con $f_m \neq 0$ y $p \in C$.

Un resultado importante sobre intersección de curvas planas es el teorema de Bézout.

Teorema 1 (Bézout, [10]). *Sean F y G polinomios homogéneos de grado d_1 y d_2 respectivamente. Entonces $\mathbb{V}(F, G)$ consiste en $d_1 d_2$ puntos contando multiplicidades.*

Sean $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ dos curvas en $\mathbb{C}^2$ y $p \in \mathbb{C}^2$ un punto. Definimos el número de intersección de $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ en p, denotado por $I_p(f, g)$, como un número real que cumple las siguientes propiedades:

1. $I_p(f,g)$ es un entero no negativo para cada $p \in \mathbb{C}^2$ tal que f y g no tienen componentes comunes que contienen a p, e ∞ en caso contrario.
2. $I_p(f,g) = 0$ si y sólo si $p \notin \mathbb{V}(f) \cap \mathbb{V}(g)$. $I_p(f,g)$ depende sólo de las componentes de f y g.
3. Sea T un cambio de coordenadas en $\mathbb{C}^2$ con $T(p) = q$. Denotamos por f^T y g^T a los polinomios que definen a las curvas transformadas. Entonces $I_p(f,g) = I_q(f^T, g^T)$.
4. $I_p(f,g) = I_p(g,f)$.
5. $I_p(f,g) \geq m_p(f)m_p(g)$. La igualdad se da si y sólo si f y g no tienen rectas tangentes en común en p. De esta forma, el número de intersección es 1 cuando las curvas se intersectan transversalmente.
6. Si $f = \Pi f_i^{r_i}$ y $g = \Pi g_j^{s_j}$, entonces $I_p(f,g) = \sum_{i,j} r_i s_j I_p(f_i, g_j)$.
7. $I_p(f,g) = I_p(f, g + Af)$ para todo $A \in \mathbb{C}[x,y]$.

Este número existe y es único [10].

Con las nociones de ceros de polinomios, sean $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ no tiene elementos nilpotentes, definimos

$$\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad afín* definida por $f_1, \ldots, f_s$. Un morfismo de variedades afines $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ es una función $\varphi : V \to W$ tal que existen funciones $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $\varphi(p) = (g_1(p), \ldots, g_m(p)) \in W$ para cada punto $p \in V$.

Similarmente, sean $F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomios homogéneos. Definimos

$$\mathbb{V}(F_1, \ldots, F_s) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{CP}^n \mid F_i(a_0, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad proyectiva* definida por $F_1, \ldots, F_s$. Sean $V \subset \mathbb{CP}^n$ y $W \subset \mathbb{CP}^m$ dos variedades proyectivas, y suponga que $\varphi : V \to W$ es una función de V a W. Decimos que φ es un *morfismo de variedades proyectivas* si lo siguiente se cumple: Para cada $p \in V$, existen polinomios homogéneos $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ tales que para algún conjunto abierto $U \subset V$ que contiene a p, la función restringida $\varphi_{|_U} : U \to W$ se ve como $q \mapsto [F_0(q) : F_1(q) : \cdots : F_m(q)]$.

3. Foliaciones sobre el Plano Proyectivo Complejo

Definición 2. Una *foliación* X de grado d sobre $\mathbb{CP}^2$ puede ser descrita, salvo factor escalar, de dos maneras principales:

1. Por un campo vectorial

$$X = P(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z},$$

donde $P, Q, R \in \mathbb{C}[x,y,z]_d$. Si consideramos el campo radial $E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Los campos vectoriales X y $X + hE$, donde $h \in \mathbb{C}[x,y,z]_{d-1}$, representan la misma foliación.
2. Por una 1-forma $A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$, donde $A, B, C \in \mathbb{C}[x,y,z]_{d+1}$ con la propiedad $xA + yB + zC = 0$ llamada condición de Euler.

Estas dos expresiones están relacionadas de la siguiente manera: $A = zQ - yR$, $B = xR - zP$ y $C = yP - xQ$.

Denotaremos por $\mathcal{F}(d,2)$ al espacio de foliaciones de grado d sobre $\mathbb{CP}^2$. En [3] se prueba con gran detalle que $\mathcal{F}(d,2)$ es un espacio proyectivo de dimensión $d^2 + 4d + 2$.

Un punto $p \in \mathbb{CP}^2$ se dice *punto singular* de una foliación X si se satisface lo siguiente:

1. Visto como un campo vectorial, $X(p) = \alpha p$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ o,
2. Como una 1-forma, $A(p) = B(p) = C(p) = 0$, es decir, $p \in \mathbb{V}(A, B, C)$.

Se puede verificar que ambas condiciones son equivalentes. Denotaremos al conjunto de puntos singulares de una foliación X como $Sing(X)$.

Observemos que el conjunto singular puede ser infinito o finito como conjunto. De hecho, si las componentes (del campo vectorial o de la 1-forma) no tienen factores en común, el conjunto singular $Sing(X)$ es finito, en este caso decimos que la foliación tiene *singularidades aisladas*. Las foliaciones de mayor interés son justamente las que tienen singularidades aisladas y nos restringiremos a ellas en este artículo. De hecho, Jouanolou demostró que podemos contar dichas singularidades y que este número depende solo del grado de la foliación, como veremos en la Proposición 4.

Sin pérdida de generalidad, si $p = [1 : 0 : 0]$ es una singularidad aislada de la foliación X, se puede dar una representación local de X sobre un abierto $U \subset \mathbb{CP}^2$ que contenga a p (podemos pensar a $U \cong \mathbb{C}^2$) tomando el campo vectorial o la 1-forma asociada a X de la forma

$$f(y,z)\frac{\partial}{\partial y} + g(y,z)\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{o} \quad -g(y,z)dy + f(y,z)dz. \tag{2}$$

donde $f(y,z) = -C(1,y,z)$ y $g(y,z) = B(1,y,z)$.

Considerando la proyección natural $\pi : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{C}^2$, sea $q = \pi(p)$ en el abierto U.

Lema 3. *Existe una correspondencia entre puntos singulares de la foliación X y los puntos en $\mathbb{V}(f,g)$.*

Demostración. Sea $p = [1 : \beta : \gamma] \in Sing(X)$ con $\pi(p) = (\beta,\gamma)$. Como $0 = B(p) = g(\pi(p))$ y $0 = -C(p) = f(\pi(p))$ entonces $(\beta,\gamma) \in \mathbb{V}(f,g)$. De manera inversa, sea $(b,c) \in \mathbb{V}(f,g)$. Sea $p = [1 : b : c]$, como $f(b,c) = g(b,c) = 0$ y $xA(x,y,z) = -yB(x,y,z) - zC(x,y,z)$, entonces $A(p) = -bB(p) - cC(p) = 0$. Por lo tanto, $p \in Sing(X)$. □

Con la representación local anterior, se definen algunos invariantes sobre cada singularidad, entre ellos se encuentran los siguientes. Supongamos que $p \in Sing(X)$ con $q = (0,0)$ (a través de un cambio de coordenadas).

- La *multiplicidad algebraica* de p se define como el orden mínimo de f y g en q, es decir, si descomponemos a f y g en su partes homogéneas: $f = f_m + f_{m+1} + \cdots$ y $g = g_s + g_{s+1} + \cdots$, donde $f_i, g_i \in \mathbb{C}[x,y]_i$, entonces
$$m_p(X) := min\{m,s\}.$$
- El *número de Milnor* de p sobre X se define como
$$\mu_p(X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f,g\rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)},$$
donde $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)$ es el anillo de funciones regulares sobre q y $\langle f,g\rangle$ es el ideal generado por las componentes del campo vectorial local. Un hecho conocido es que este número coincide con el índice de intersección de las curvas definida por f y g en el punto q, $I_q(f,g)$ (ver [10]).

Una propiedad importante del número de Milnor es la siguiente.

Proposición 4 (Jouanolou, [11]).
$$\sum_{p \in Sing(X)} \mu_p(X) = d^2 + d + 1.$$

Esta fórmula es de naturaleza topológica y nos da una manera de determinar cuántos puntos singulares podemos tener, por ejemplo: $d^2 + d + 1$ puntos singulares con número de Milnor 1, o el caso donde hay un único punto singular p con número de Milnor máximo $\mu_p(X) = d^2 + d + 1$.

Ejemplo 1. Consideremos el campo vectorial:
$$X = y^2\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y},$$

o equivalentemente, la 1-forma:

$$-z^3dx + zy^2dy + (xz^2 - y^3)dz,$$

que definen a una foliación de grado 2. Observemos que $p = [1 : 0 : 0] \in Sing(X)$, así, en una vecindad de p, X puede representarse por la expresión local $f = -zy^2$ y $g = -z^2 + y^3$, es decir,

$$-zy^2dy + (-z^2 + y^3)dz,$$

con punto singular $q = (0, 0)$, como se puede observar en la Figura 3. De la expresión local de la 1-forma se puede ver que la multiplicidad del punto es $m_p(X) = 2$. Para calcular el número de Milnor de X sobre p, se pueden usar las propiedades de índice de intersección entre las curvas definidas por f y g de la sección 2. Así,

$$\begin{aligned}\mu_{(p)}(X) =& I_q(f, g)\\ =& I_q(z, z^2 - y^3) + 2I_q(y, z^2 - y^3) \text{ (propiedad 6)}\\ =& 3 + 4 = 7 \text{ (propiedad 7)}.\end{aligned}$$

Por Jouanolou, como el número de Milnor es el máximo posible, entonces $Sing(X) = \{p\}$. De hecho, este es un ejemplo de las cuatro foliaciones (salvo cambio de coordenadas) de grado 2 que tienen un único punto singular clasificadas en [12].

1 Aguacate.pdf

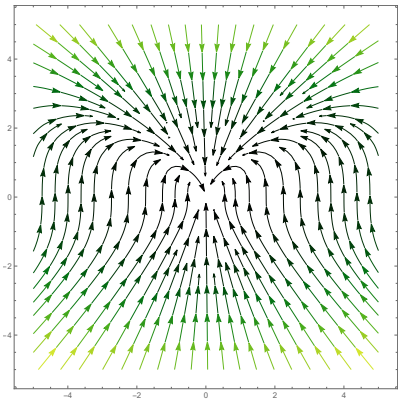


FIGURA 3. Representación local de la foliación $X = z^2\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial x}$.

En general, no es trivial determinar las foliaciones de grado d con un único punto singular, es decir, no existe una clasificación en general. Sin embargo, bajo condiciones a añadidas, existen varios resultados, ver por ejemplo: [12, 7, 13, 14, 15, 9, 16, 17].

4. Problema de clasificación de foliaciones en $\mathbb{CP}^2$ con GIT

La Teoría de Invariantes Geométricos (GIT) es una herramienta importante y poderosa para construir espacios moduli, como cocientes de acciones de grupos algebraicos sobre variedades algebraicas [18]. Esta teoría busca construir una variedad algebraica donde cada punto de esta variedad represente una clase de isomorfismo, es decir, una clase de equivalencia de los objetos que deseamos clasificar, como en nuestro caso, clasificar foliaciones en $\mathbb{CP}^2$ salvo isomorfismos del plano proyectivo.

Los conceptos básicos de esta sección pueden ser explorados con más detalle en [18, 19, 20] y [21].

Definición 5. Un *grupo algebraico* G es un grupo que además tiene estructura de variedad algebraica y cuyas operaciones de grupo, producto e inverso, son morfismos de variedades algebraicas.

Algunos ejemplos clásicos de grupos algebraicos son:

- El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2+1}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(ydet-1)$, donde $ydet-1 \in \mathbb{C}[x_{ij}, y]$ y det denota al polinomio determinante de matrices de tamaño $n \times n$.
- El grupo especial lineal $SL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(det-1)$, donde $det-1 \in \mathbb{C}[x_{ij}]$.
- Los subgrupos cerrados de $GL_n(\mathbb{C})$ son grupos algebraicos, conocidos como *Grupos algebraicos lineales*.

Un morfismo de grupos algebraicos es un morfismo de grupos que también es morfismo de variedades algebraicas.

Definición 6. Una *acción* de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica V afín o proyectiva, es un morfismo

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & g \cdot v \end{array}$$

que satisface lo siguiente para todo $g, g' \in G$ y $v \in V$;

- $g \cdot (g' \cdot v) = (gg') \cdot v$
- $e \cdot v = v$, donde e es la identidad del grupo G.

La acción $G \times V \to V$ se dice *lineal* si viene dada por una representación, es decir, un espacio vectorial W y un morfismo de grupos algebraicos $\rho : G \to GL(W)$ tal que la acción de G en V se ve como $g \cdot v = \rho(g)v$.

La teoría de representaciones de grupos es muy extensa y muy rica. Un libro clásico sobre este tema es [19]. En los capítulos 12 y 13 de dicho libro se explica que para grupos específicos podemos dibujar un diagrama de pesos de la representación, por ejemplo, para las representaciones de $SL_n(\mathbb{C})$ y cuando $n = 3$, este diagrama se puede ver en $\mathbb{R}^2$.

4.1. Acción por cambio de coordenadas. Uno de los objetivos de la teoría de foliaciones sobre $\mathbb{CP}^2$ es clasificar estos objetos salvo isomorfismos del plano proyectivo. Así, dos foliaciones X_1 y X_2 son equivalentes si existe un isomorfismo de $\mathbb{CP}^2$ que nos lleva uno al otro. Esto se ve formalmente por la siguiente acción.

Sea $V = \mathcal{F}(d, 2)$ el espacio de foliaciones holomorfas de grado d sobre $\mathbb{CP}^2$ y $G = SL_3(\mathbb{C})$. La función definida por

$$\begin{array}{rcl} SL_3(\mathbb{C}) \times \mathcal{F}(d,2) & \to & \mathcal{F}(d,2) \\ (g, X) & \mapsto & g \cdot X = DgX(g^{-1}), \end{array}$$

es una acción lineal, y es llamada *acción por cambio de coordenadas en* $\mathcal{F}(d, 2)$. En efecto; sean $g, h \in SL_3(\mathbb{C})$ y $X \in \mathcal{F}(d, 2)$, entonces

1. $g \cdot (h \cdot X) = g \cdot (DhX(h^{-1})) = D(gh)X((gh)^{-1}) = (gh) \cdot X$.
2. $Id \cdot X = DIdX(Id^{-1}) = DIdX = X$.

La GIT (clásica) estudia acciones de un tipo particular de grupos algebraicos, los *grupos reductivos*, que evitaremos su explicación en este texto, ya que para nuestros fines, el grupo de nuestro interés, $SL_3(\mathbb{C})$, sí lo es. El lector interesado puede consultar [21] para descubrir la historia de esta definición y su relación con el problema 14 de Hilbert.

Dos conceptos importantes derivados de la acción de un grupo algebraico sobre una variedad algebraica son los siguientes.

Definición 7. Sean G un grupo reductivo actuado sobre una variedad algebraica V y $v \in V$.

- El *estabilizador* de v, o también llamado el *subgrupo de isotropía* de v, es el subgrupo cerrado $G_v := \{g \in G \mid gv = v\}$ de G.
- La *órbita* de v es la subvariedad $O(v) := \{g \cdot v \mid g \in G\}$ de V.

Una consecuencia importante de estos conjuntos y los cuales los relaciona, está dada en el siguiente lema muy conocido.

LEMA 8. *Si G actúa linealmente en V. Para cada $v \in V$,*

$$\dim O(v) = \dim G - \dim G_v.$$

Ejemplo 2. Sea $X = (-xz - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{F}(2,2)$. Podemos ver que $Sing(X) = \{[0:0:1]\}$. Consideremos las matrices

$$g_1 = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} j^2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } j = e^{2i\pi/3} \text{ y } g_3 = Id.$$

Bajo la acción por cambio de coordenadas, el estabilizador de X es $SL_3(\mathbb{C})_X = \{g_1, g_2, g_3\}$. En efecto, supongamos que $g = (a_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ y $g^{-1} = (b_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. De las igualdades $g \cdot X = X$ y $g \cdot g^{-1} = Id$ tenemos: $b_{32} = 0$, $b_{31} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{21} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{12} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{12} = 0$, $b_{33} = 1$, $a_{33} = 1$, $a_{22} = b_{11}$, $a_{11} = b_{22}$, $b_{22}^2 = b_{11}$, $b_{11}b_{22} = 1$, $b_{11}^2 = b_{22}$. De esto concluimos que b_{22} y b_{11} son una raíz cúbica de la unidad. Más aún, se satisface una de las siguientes condiciones

$$(a_{11} = b_{22},\ a_{22} = b_{22}^2)\ o\ (a_{11} = b_{11}^2,\ a_{22} = b_{11}).$$

Por lo tanto, $g = diag(b_{22}, b_{22}^2, 1)$ o $g = diag(b_{11}^2, b_{11}, 1)$ o $g = Id$. Es decir, los únicos elementos que dejan fijos a X bajo la acción son g_1, g_2 y Id, por lo tanto, $\dim O(X) = 8$.

En el ejemplo anterior, uno de los problemas importantes a entender es el comportamiento de la órbita de X bajo la acción. En [12] los autores estudian los comportamientos de las órbitas para foliaciones de grado 2 con único punto singular, aunque en general no es trivial describir dicho conjunto.

Uno de los resultados más importantes de la GIT nos dice que, dada una acción lineal de un grupo reductivo sobre una variedad proyectiva, no siempre existe el cociente V/G, al menos no como variedad algebraica, pero que al considerar un cierto subconjunto abierto de la subvariedad V, que llamaremos V^{ss}, existe un cociente, denotado por $V^{ss}//G$, que sí es una variedad proyectiva. Por otro lado, construir dicho cociente es uno de los problemas más difíciles de esta área, comenzando por describir los objetos en V^{ss} y su complemento.

Definición 9. Sea x un punto en la variedad proyectiva V. Consideremos un representante $\overline{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$, es decir, $\overline{x} \in x$. Denotemos por $O(\overline{x})$ la órbita de $\overline{x}$ en el cono afín de V, entonces

- x es *inestable* si $0 \in \overline{O(\overline{x})}$ (donde la barra significa cerradura). El conjunto de puntos inestables es denotado por V^{un}.
- x es *semiestable* si $0 \notin \overline{O(\overline{x})}$. El conjunto de puntos semiestables es denotado por V^{ss}.
- x es *estable* si es semiestable, la órbita de x es cerrada en V^{ss} y $\dim O(x) = \dim G$. El conjunto de puntos estables es denotado por V^s.

Un método para determinar la estabilidad de los puntos de una variedad con la acción de un grupo algebraico es el conocido Criterio de Hilbert-Mumford [21]. Aquí vamos a presentar brevemente un criterio equivalente al Hilbert-Mumford, como se muestra en [22].

Dado que la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en el espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d,2)$ es una acción lineal, tenemos una representación de $SL_3(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1}$. Para dibujar el diagrama de pesos de esta representación consideremos el toro maximal T de $SL_3(\mathbb{C})$ dada por el conjunto de matrices diagonales con determinante igual a 1. De la representación de $SL_3(\mathbb{C})$ tenemos una representación inducida de T, es decir, un morfismo no trivial $T \to GL(\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1})$. De esta manera, tenemos una descomposición en subrepresentaciones escalares $\mathbb{C}^{d^2+4d+3} = \bigoplus_r \alpha_r V_{\alpha_r}$, donde $\alpha_r : T \to \mathbb{C}$ con $r = 1, \ldots, d^2+4d+3$ y es llamada peso de la representación. Para el caso específico de nuestra acción, estos

pesos están definidos como sigue: consideremos el conjunto generador del espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d,2)$ dada por

$$\left\{x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x}, x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \text{ donde } i+j+k=d \text{ y } x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \text{ con } i+k=d\right\}.$$

Tomamos una matriz diagonal $diag(a,b,c) \in T$ y aplicamos la acción por cambio de coordenadas definida anteriormente. Así

$$\mathbb{C}^{d^2+4d+3} = \bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k+1}b^{-i}c^{-j}\langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x}\rangle$$
$$\bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k}b^{-i+1}c^{-j}\langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y}\rangle \bigoplus_{k+i=d} a^{-k}b^{-i}c\langle x^k y^i \frac{\partial}{\partial z}\rangle,$$

A esta representación le vamos a asociar un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{ll}(1-k+j)L_1+(-i+j)L_2: & i+j+k=d,\\ (-i+k)L_1+(1-j+k)L_2: & i+j+k=d,\\ (-1-k)L_1+(-1-i)L_2: & i+k=d\end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

donde $L_1=(1,0), L_2=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $L_3=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

A este conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ le llamaremos *diagrama de pesos de la representación*. Los ejemplos explícitos de estos diagramas para la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en espacios de foliaciones se pueden ver en las figuras 4, 5 y 6.

Para una foliación $X \in \mathcal{F}(d,2)$, podemos considerar el conjunto convexo definido por sus pesos en el diagrama correspondiente en $\mathbb{R}^2$. Si para cualquier cambio de coordenadas se tiene que:

- si el origen está contenido en el interior del convexo, entonces la foliación es estable,
- si el origen está en el convexo, la foliación es semiestable, y
- si el origen está fuera del convexo, la foliación es inestable.

Ejemplos explícitos de este criterio se muestran en las figuras 7a, 8a y 9a. Otros problemas de GIT donde se usa este criterio se puede ver en [23], [22] y [25].

En [26], la autora estudia foliaciones de grado 2. Describe a las foliaciones inestables de este grado y da otra prueba de las 4 foliaciones de grado 2 con un único punto singular que fueron descritas en [12], también salvo cambio de coordenadas. En [24] de la misma autora, se describe más en general a las foliaciones inestables clasificandolas por medio de sus grupos de automorfismos.

En [7] y [9] los autores damos ejemplos explícitos de foliaciones de grado 3 con un único punto singular. Además, damos una prueba sencilla de que las foliaciones con puntos singulares de multiplicidad 1 son estables. También damos ejemplos de foliaciones con singularidades de multiplicidad 2 que son inestables y semiestables no estables. Casos explícitos serán considerados en la siguiente sección.

5. Foliaciones con un único punto singular

Dos clases importantes de foliaciones son aquellas extremas, es decir, aquellas que tienen todas sus singularidades diferentes (también llamadas foliaciones no degeneradas), o aquellas con un único punto singular. Las foliaciones no degeneradas forman un espacio denso en el espacio de foliaciones y son estables (ver [4]). Por otro lado, no hay una clasificación general de foliaciones con un único punto singular, aunque sí hay algunos resultados importantes al respecto. En esta sección hablaremos de los avances para foliaciones de grado $1,2$ y 3 (incluyendo nuestras contribuciones [9]) con un único punto singular.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{A}_d := \{X \in \mathcal{F}(d,2) \mid Sing(X)=\{p\},\ \mu_p(X)=d^2+d+1\},$$
$$\mathcal{A}_{d,m} := \{X \in \mathcal{A}_d \mid m_p(X)=m\}.$$

5.1. Grado 1, $\mu_p(X) = 3$. Consideremos el diagrama de pesos de las foliaciones de grado 1 sobre $\mathbb{CP}^2$ dado por la Figura 4.

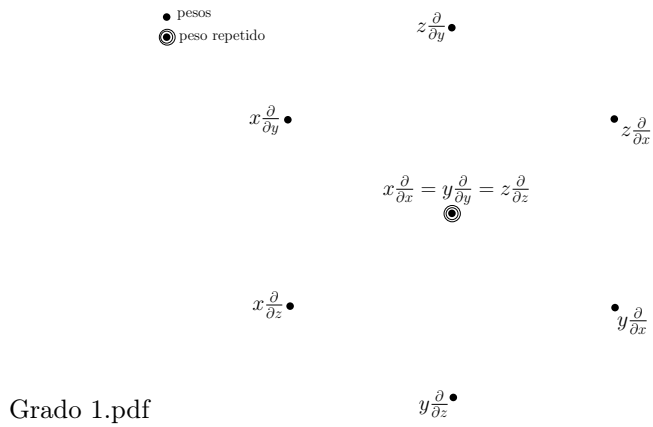


FIGURA 4. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(1,2)$.

TEOREMA 10. [6] *Una foliación de grado* 1 *es de la forma*

$$X = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$. *Además,* X *es inestable si* A *es nilpotente.*

5.2. Grado 2, $\mu_p(X) = 7$. La Figura 5 representa el diagrama de pesos del espacio $\mathcal{F}(2,2)$. Por [12], existen cuatro foliaciones (hasta cambio de coordenadas) en $\mathcal{A}_2$:

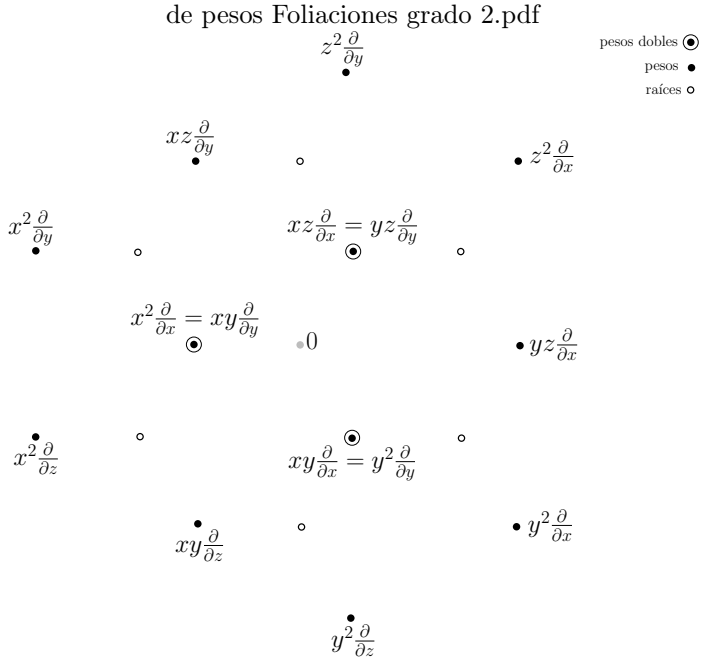


FIGURA 5. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(2,2)$.

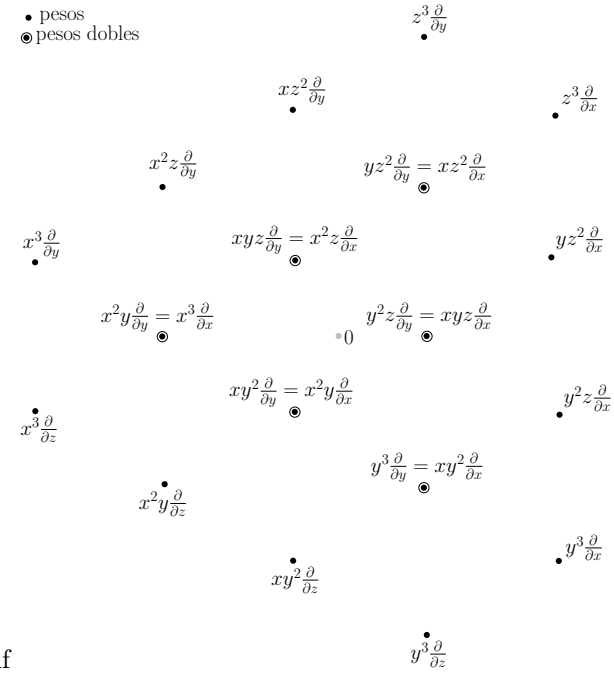
1. $X_1 = y^2\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y}$,
2. $X_2 = -y^2\frac{\partial}{\partial x} + (yz - z^2)\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$,

3. $X_3 = (y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y}$,
4. $X_4 = -yz\frac{\partial}{\partial x} + (xy + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial z}$.

Sin perder generalidad, podemos ver que $Sing(X_i) = \{[1:0:0]\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Usando la representación local alrededor de la singularidad y usando el diagrama de pesos, tenemos la siguiente tabla:

i	f	g	$m_p(X)$	Estabilidad
1	$z^2 - y^3$	$-zy^2$	2	Inestable
2	$yz - z^2 + y^3$	$z^2 + y^2z$	2	Inestable
3	$yz - y^3 - yz^2$	$-y^2z - z^3$	2	Inestable
4	$y + z^2 + y^2z$	$y^2 + yz^2$	1	Estable

5.3. Grado 3, $\mu_p(X) = 13$. El diagrama de pesos de foliaciones de grado 3 está dado en la Figura 6. Los resultados particulares presentados en esta sección pueden ser consultados en [9] principalmente.



de pesos Foliaciones drado 3.pdf

FIGURA 6. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(3, 2)$.

Para foliaciones de grado 3, con multiplicidad 1 se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 11. $\mathcal{A}_{3,1} \subset \mathcal{F}(3, 2)^s$.

Para foliaciones de grado 3 y multiplicidad 2, simplificaremos los resultados con ejemplos explícitos.

Ejemplo 3. [9, Theorem 4.1] La foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 - 6y^3 - xyz - 7y^2z - 2xz^2 - 3z^3 \\ y^3 + xyz + xz^2 - yz^2 + 2z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

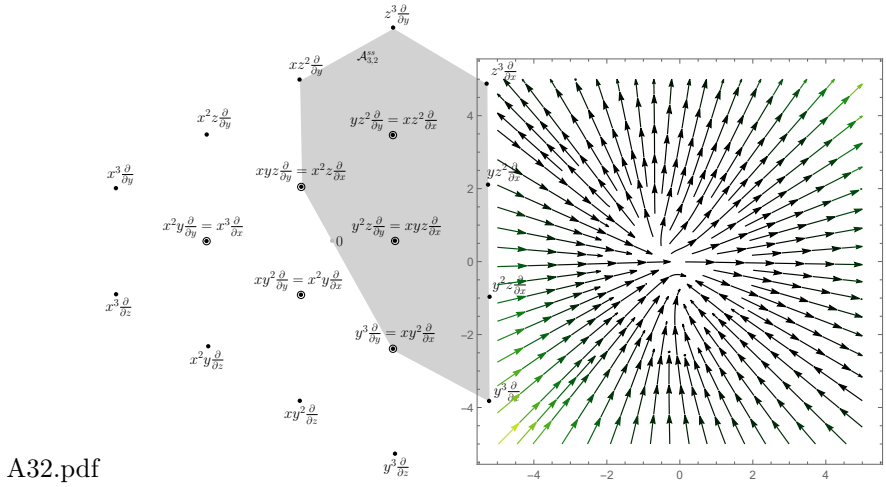
tiene como punto singular al punto $p = [1:0:0]$. Alrededor de p, una representación local de X, que se puede ver en la figura 7b, es dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y,z) = yz + z^2 + yz^2 + y^2z + 2z^3 + 6y^4 + 7y^3z + 3yz^3 \\ g(y,z) = -y^2z + 6y^3z + yz^2 + 7y^2z^2 + 2z^3 + 3z^4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $m_p(X) = 2$. Además,

$$\begin{aligned}\mu_{(p)}(X) =& I_{(0,0)}(f,g)\\ =& I_{(0,0)}(f,z) - I_0\left(P(1,y,z), Q(1,y,z)\right)\\ =& I_0(y^4,z) - I_0\left(P(1,y,z), Q(1,y,z)\right)\\ =& 4 + I_0(zP(1,y,z) - (y-2z)Q(1,y,z), Q(1,y,z)) - I_0(z, Q(1,y,z))\\ =& 4 + I_0((y+z)^4, Q(1,y,z)) - 3\\ =& 4 + 12 - 3 = 13.\end{aligned}$$

Los términos de las componentes de X (hasta cambio de coordenadas) pueden verse en el convexo sombreada de la Figura 7a. Observemos que la condición de estabilidad está determinada por $xy^2\frac{\partial}{\partial x}$, $xyz\frac{\partial}{\partial y}$ y $y^3\frac{\partial}{\partial y}$ los cuales son no cero en X, así, $X \in \mathcal{A}^{ss}_{3,2}$.



(A) Semiestable no estable (B) Campo vectorial local del ejemplo 3

FIGURA 7. Estabilidad de $\mathcal{F}(3,2)$ con multiplicidad 2.

Ejemplo 4. [9, Proposition 4] Consideremos la foliación de grado 3 representada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} x^2y + x^2z - 3xy^2 - 3xyz - xz^2 + y^3 \\ -4y^3 - 6y^2z - 4yz^2 - z^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

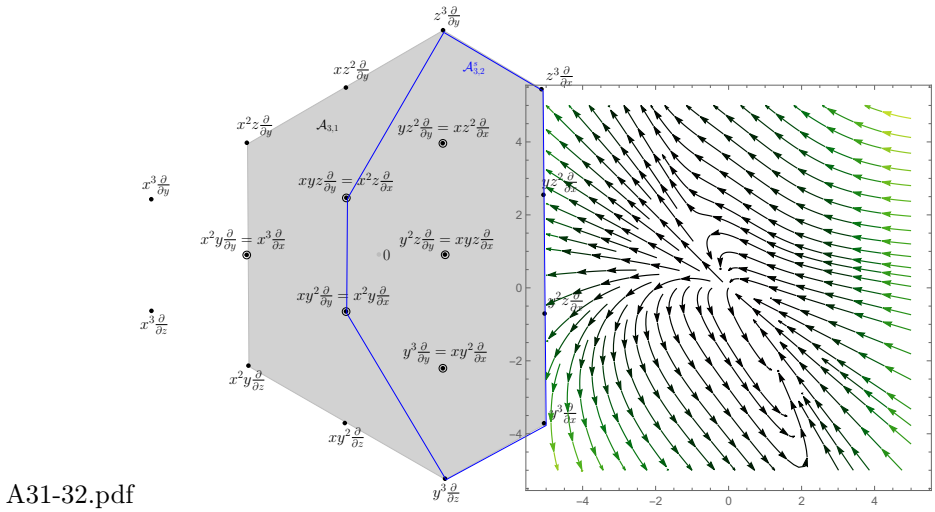
Observemos que $p = [1:0:0]$ es un punto singular de X. Por lo tanto, una representación local alrededor de p (la cual podemos ver en la figura 8b) está dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y,z) \\ g(y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4 - y^3 - 3y^2z - 3yz^2 - z^3 - y^2 - yz \\ -y^3z + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - yz - z^2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $m_p(X) = 2$. Además, observemos que $f(y,z) = (y+z)[(y+z)^2 - y] + y^4$. Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mu_{(p)}(X) =& I_{(0,0)}(f,g)\\ =& I_{(0,0)}(zf - yg, f) - I_0(y,f)\\ =& I_0((y+z)^4, f) - I_0(y, z^3)\\ =& 4I_0(y+z, y^4) - 3\\ =& 16 - 3 = 13.\end{aligned}$$

Uno puede verificar que los términos de las componentes de X pertenecen al convexo $\mathcal{A}^s_{3,2}$ de la figura 8a. Además, las condiciones de estabilidad están fuertemente dadas en los coeficientes de $y^3\frac{\partial}{\partial z}, z^3\frac{\partial}{\partial y}$ y $x^2y\frac{\partial}{\partial x}$ los cuales son no cero. Por lo tanto, $X \in \mathcal{A}^s_{3,2}$.



A31-32.pdf

(A) Estable (B) Campo vectorial local del ejemplo 4

FIGURA 8. Estabilidad de $\mathcal{F}(3,2)$ con multiplicidad 1 y 2.

Para terminar la multiplicidad 2, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. [9, Lemma 1] Consideremos la foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ xyz - 2y^2z + xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el punto $p = [1:0:0]$ es punto singular de X, una representación local (ver figura 9b) está dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y,z) \\ g(y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4 - 3y^3z - 3y^2z^2 - yz^3 - 2y^2z + \frac{1}{2}yz^2 + yz + z^2 \\ -y^3z - 3y^2z^2 - 3yz^3 - z^4 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que $m_p(X) = 2$. Además, observemos que $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 = (y+z)^3$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_{(p)}(X) =& I_{(0,0)}(f,g) \\ =& I_{(0,0)}(f,z) + 3\left(I_{(0,0)}(y+z,z) + I_{(0,0)}(y+z, y(4y-z))\right) \\ =& 4 + 3(1+2) = 13. \end{aligned}$$

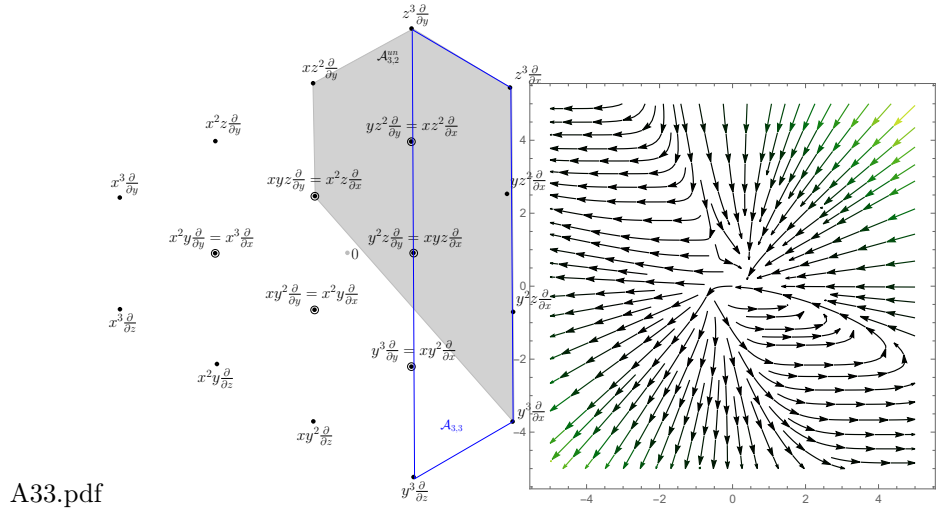
Los monomios en las componentes de X pertenecen al convexo sombreado dado en la figura 9a, por lo que X es inestable, es decir, $X \in \mathcal{A}^{un}_{3,2}$.

Además, para grado 3 y multiplicidad 3 (salvo cambio de coordenadas) se tiene lo siguiente.

TEOREMA 12. $\mathcal{A}_{3,3} \subset \mathcal{F}(3,2)^{un}$.

En resumen, la siguiente tabla muestra la estabilidad de foliaciones de grado 3 con un único punto singular y multiplicidad $1, 2$ y 3.

$m_p(X)$	$\mu_p(X)$	Estabilidad
1	13	estable
2	13	estable, semiestable no-estable, inestable
3	13	inestable



A33.pdf

(A) Inestable (B) Campo vectorial local del ejemplo 5

FIGURA 9. Estabilidad de $\mathcal{F}(3,2)$ de multiplicidad 2 y 3.

6. Conclusión

Los resultados presentados en este artículo son casos particulares de resultados dados en [9] principalmente con el objetivo de hacer más explícita la descripción de los campos vectoriales que definen a las foliaciónes con cada tipo de estabilidad. Además, uno podría fácilmente demostrar el siguiente corolario.

COROLARIO 13. *Para cada* $d \geq 2$, $\mathcal{A}_{d,d} \subset \mathcal{F}(d,2)^{un}$.

Algunas preguntas por responder en este camino: ¿Cómo se distribuyen la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{A}_{d,i}$ con $2 \leq i \leq d-1$?, ¿qué se puede decir de la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{F}(d,2)$ con al menos dos puntos singulares? Más aún, ¿podemos entender el comportamiento de las órbitas?

Un problema importante en la GIT, es la existencia del cociente bueno. En caso de foliaciones sobre $\mathbb{CP}^2$, en [6], la autora demostró que el cociente $\mathcal{F}(1,2)//SL_3(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^1$, y recientemente en [8] se dieron avances para el caso $\mathcal{F}(2,2)//SL_3(\mathbb{C})$. ¿Qué se puede decir de $\mathcal{F}(d,2)//SL_3(\mathbb{C})$ para $d \geq 2$?

Todas estas preguntas no son fáciles de contestar y siguen siendo temas de investigación activas.

Referencias

[1] Ilyashenko, Y., *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39, no. 3, 301–354, 2002.

[2] Camacho, C., De Figueiredo, L. H., *The dynamics of the Jouanolou foliation on the complex projective 2-space*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press. 21, no. 3, 757–766, 2001.

[3] Gómez-Mont, X., Ortiz-Bobadilla, L., *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación, 3, 2004.

[4] Gómez-Mont, X., Kempf, G., *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici, Springer, 64, no. 1, 462–473. 1989.

[5] Campillo, A., Olivares, J., *Polarity with respect to a foliation and Cayley-Bacharach Theorems*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, Walter de Gruyter, 534, 95–118, 2001.

[6] R. Alcántara, C., *The Good Quotient of the Semi-Stable Foliations of* $\mathbb{CP}^2$ *of Degree 1*, Results in Mathematics, 53, no. 1, 1–7, 2009.

[7] R. Alcántara, C., Ronzon-Lavie, R., *Classification of foliations on* $\mathbb{CP}^2$ *of degree 3 with degenerate singularities*, 14, 52–73, 2016.

[8] R. Alcántara, C., Vásquez Aquino, J., *GIT quotient of holomorphic foliations on* $\mathbb{CP}^2$ *of degree 2 and quartic plane curves.* Forum Mathematicum. doi:10.1515/forum-2024-0043, 2024.

[9] Castorena, Abel, Pantaleón-Mondragón, P. R., Vásquez Aquino, J., *On the GIT-Stability of Foliations of Degree 3 with a Unique Singular Point.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. Springer. 55, no. 6, 2024.
[10] Fulton, W., *Algebraic curves*, An Introduction to Algebraic Geom. 54, 2008.
[11] Jouanolou, J.P., *Equations de Pfaff algébriques*,Springer, 708, 2006.
[12] Cerveau, D., Déserti, J., Belko, D. G., Meziani, R., *Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux*,Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 41, no. 2, 161–198, 2010.
[13] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{CP}^2$ of degree d with a singular point with Milnor number d^2+d+1* , Revista Matemática Complutense, Springer, 31, no. 1, 187–199, 2018.
[14] R. Alcántara, C., y Pantaleón-Mondragón, P. R., *Foliations on $\mathbb{CP}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves*, Geometriae Dedicata, Springer, 207, no. 1, 193–200, 2020.
[15] R. Alcántara, C., *Special foliations on $\mathbb{CP}^2$ with a unique singular point*, Research in the Mathematical Sciences, Springer, 9, no. 1, 2022.
[16] Martín Del Campo, A., Pantaleón-Mondragón, P. R., *The Euler-Betti Algorithm to identify foliations in the Hilbert Scheme*, https://arxiv.org/abs/2303.17698, 2023.
[17] Medina, N.S., *Estratificación del espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo*, Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú), 2021.
[18] Mumford, D., Kirwan, F., Fogarty, J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin. 1994.
[19] Fulton, W., Harris, J., *Representation theory: a first course*, Springer Science & Business Media. 129, 2013.
[20] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer Science & Business Media, 52, 2013.
[21] Newstead, P. E., *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
[22] Mumford, D., *Stability of projective varieties* L'Enseignement mathématique, 1977.
[23] Kirwan, F. C., *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, 31, 1984.
[24] R. Alcántara, C., *Singular points and automorphisms of unstable foliations of $\mathbb{CP}^2$*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), 16, 39–51, 2010.
[25] Vásques Aquino, J., *Intersection Betti Numbers of the GIT Quotient of Quartic Plane Curves*, Transformation Groups, Springer, 1–25, 2024.
[26] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{CP}^2$ of degree 2 with degenerate singularities*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 44, no. 3, 421–454, 2013.

Petra Rubí Pantaleón Mondragón
SECIHTI-Universidad Nacional Autónoma de México ,
Centro de Ciencias Matemáticas,
Antigua Carretera a Pátzcuaro # 8701,
Col. Ex. Hacienda San José de la Huerta
Morelia, C.P. 58089, Michoacán, México.
e-mail: `pantaleon.rubi@gmail.com`

Juan Vásquez Aquino
SECIHTI-Universidad Autónoma de Zacatecas,
Unidad Académica de Matemáticas.
Paseo la Bufa, C.P. 98060
Zacatecas, Zacatecas, México.
e-mail: `juan.vasquez@cimat.mx`

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 25-32.
Recibido 24-04-2025. Aceptado 05-06-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/eoperc

UNA NOTA SOBRE ÁRBOLES BIPLANARES

ELSA PATRICIA OMAÑA PULIDO Y EDUARDO RIVERA CAMPO

Resumen. Estudiamos una variante de la gráfica de árboles biplanares definida por Figueroa y Fresán-Figueroa [Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020)] y damos demostraciones elementales de que la gráfica de árboles biplanares es conexa y de que el diámetro y el radio de ésta es $2n-5$ y $n-2$, respectivamente, en donde $n \geq 3$ es el número de vértices.

1. Introducción

Dado un conjunto de puntos P en el plano, una *gráfica topológica* G con conjunto de vértices P es una gráfica simple dibujada en el plano en la que las aristas son curvas simples con extremos en P. En una gráfica topológica cualquier par de aristas se intersectan en a lo más un punto que es un vértice en común, o un punto en el que las dos aristas se cruzan. Dos gráficas topológicas G y H son *debilmente isomorfas* si G y H son isomorfas como gráficas abstractas, y son tales que dos aristas uv y xy se cruzan en G si y sólo si las aristas correspondientes se cruzan en H.

Una gráfica topológica H es subgráfica topológica (o simplemente subgráfica) de una gráfica topológica G si H se obtiene del dibujo de G borrando las aristas y los vértices de G que no pertenecen a H. Un *árbol generador* de una gráfica G es una subgráfica H de G conexa, sin cíclos y que contiene a todos los vértices de G.

Una *gráfica geométrica* es una gráfica topológica G en la que sus aristas son segmentos de recta. Una gráfica geométrica es *gráfica convexa* si su conjunto de vértices P es el conjunto de vértices de un polígono convexo.

Claramente todas las gráficas convexas completas con el mismo número de vértices son debilmente isomorfas entre si. Esto nos permite pensar en cualquier gráfica convexa completa con n vértices como la gráfica G_n cuyos n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices de un polígono regular y que están ordenados cíclicamente como en la figura 1.

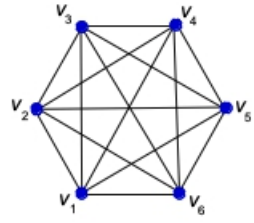


Figura 1. G_6

La gráfica G_n tiene el máximo número posible de cruces $\binom{n}{2}$, entre todas las gráficas topológicas con n vértices. Otra familia de gráficas topológicas con esa propiedad (ahora llamadas *gráficas torcidas*) fue descubierta por Harborth y Mengersen [2]. Una gráfica topológica completa G con $n \geq 3$ vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es *gráfica torcida* si

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05.
Palabras clave. Árbol Biplanar, Gráfica Topológica, Gráfica Convexa, Gráfica Torcida.

dos aristas v_iv_j y v_sv_t (con $i < j$ y $s < t$) se cruzan si y sólo si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$.

Denotamos por T_n a la gráfica torcida con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sobre una recta horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 2.

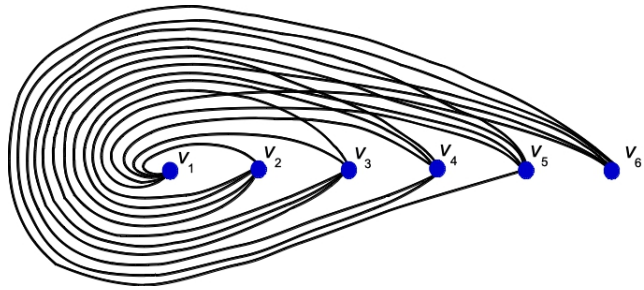


FIGURA 2. La gráfica torcida T_6.

También es claro que toda gráfica torcida con $n \geq 3$ vértices es debilmente isomorfa a la gráfica T_n.

El estudio de las gráficas torcidas y su relación con las gráficas convexas surgió con el siguiente resultado de Pach *et al.* [3].

TEOREMA 1. *Existe una constante c tal que toda gráfica topológica completa con n vértices contiene una subgráfica con $m = c\log^{1/8} n$ vértices que es debilmente isomorfa a C_m o a T_m.*

Sea $n \geq 3$ un entero. De acuerdo a Figueroa y Fresán-Figueroa [1], un árbol abstracto R con n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es *árbol biplanar* si los correspondientes árboles generadores R' y R'' de G_n y T_n, respectivamente, son árboles planos. Ver figura 3.

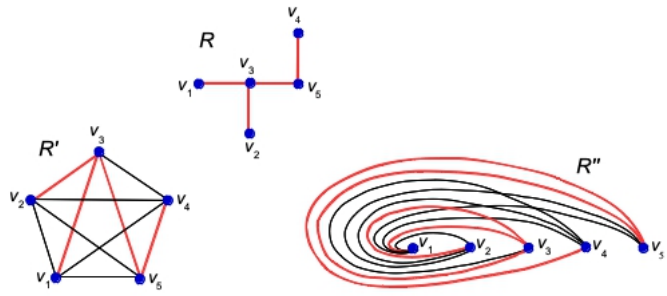


FIGURA 3. Árbol biplanar R.

Para cada entero $n \geq 3$ sea F_n la gráfica topológica con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sobre una línea horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 4.

Decimos que dos aristas $e = v_iv_j$ y $f = v_sv_t$ de F_n están anidadas si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$, ver figura 5 (derecha). Notemos que dos aristas $e = v_iv_j$ y $f = v_sv_t$ de F_n se cruzan si $i < s < j < t$ o $s < i < t < j$.

Sea G una subgráfica de G_n. La subgráfica correspondiente G' de F_n es tal que dos aristas v_iv_j y v_sv_t se cruzan en G si y sólo si las correspondientes aristas se cruzan en G'. Asimismo si H es subgráfica de T_n, entonces la subgráfica correspondiente H' de

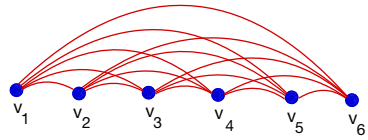


FIGURA 4. F_6.

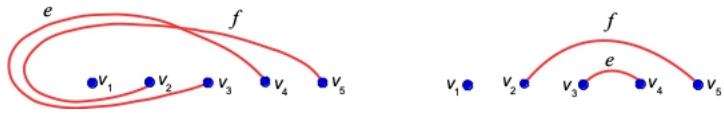


FIGURA 5. e y f se cruzan en H (izquierda) y están anidadas en H' (derecha).

F_n es tal que dos aristas v_iv_j y v_sv_t se cruzan en H si y sólo si las correspondientes aristas están anidadas en H'. Ver figura 5.

De esta forma los árboles biplanares corresponden a los árboles generadores de F_n que no tienen pares de aristas que se cruzan y no tienen pares de aristas anidadas. Figueroa y Fresán-Figueroa [1] dieron una caracterización geométrica de los árboles biplanares con $n \geq 3$ vértices. Ver sección 2.

En el mismo trabajo Figueroa y Fresán-Figueroa definieron *la gráfica de árboles biplanares* $\mathcal{B}_n$ como la gráfica abstracta en la que los vértices son los árboles biplanares con n vértices y en la que dos árboles R y S son adyacentes si existen aristas r de R y s de S tales que $S = (R - r) + s$, ver figura 6.

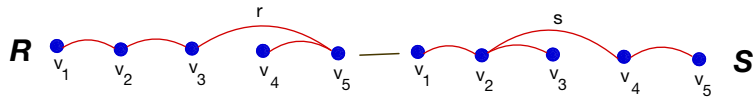


FIGURA 6. R y S son adyacentes en $\mathcal{B}_5$.

Figueroa y Fresán-Figueroa demostraron que $\mathcal{B}_n$ siempre es conexa, que tiene radio igual a $n-2$ y diámetro igual a $2n-5$.

En su definición de adyacencia en $\mathcal{B}_n$, Figueroa y Fresán-Figueroa permiten que las dos aristas r y s que se intercambian para obtener S de R se crucen o estén anidadas en F_n. Por ejemplo: las aristas r y s de la figura 6 se cruzan en F_5. En este trabajo consideramos la subgráfica $\overline{\mathcal{B}_n}$ de $\mathcal{B}_n$ en la que dos árboles R y S son adyacentes si S se obtiene de R sustituyendo una arista r de R por una arista s de S, en donde las aristas r y s no se cruzan ni están anidadas en F_n. El propósito de este trabajo es dar demostraciones elementales de que $\overline{\mathcal{B}_n}$ es conexa y de que el radio y el diámetro de $\overline{\mathcal{B}_n}$ también son iguales $n-2$ y a $2n-5$, respectivamente.

2. Conexidad de $\overline{\mathcal{B}_n}$ y cotas superiores para radio y diámetro de $\overline{\mathcal{B}_n}$

La siguiente caracterización de los árboles biplanares fue dada por Figueroa y Fresán-Figueroa [1]. Nosotros basamos nuestras demostraciones en esa caracterización.

Sea R una árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Como R es un árbol, existe una única trayectoria $v_1 = w_0, w_1, \ldots, w_l = v_n$ (llamada *cuerpo de* R) que une v_1 con v_n en R.

Ya que el árbol R no tiene pares de aristas anidadas en F_n, entonces para $t = 0, 1, \ldots, l-1$, R no tiene aristas v_iv_j con v_i y v_j entre w_t y w_{t+1}.

Por otro lado R no tiene pares de aristas que se cruzan en G_n por lo que para $t = 0, 1, \ldots, l-1$, todo vértice v_i, entre w_t y w_{t+1} unicamente es adyacente en R a w_t o a w_{t+1}.

Por lo anterior para $t = 1, 2, \ldots, l$, existen enteros no negativos a_t y b_t tales que los vértices $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+a_t}$ son adyacentes a w_t en R y los vértices $v_{s-b_t}, v_{s-(b_t-1)}, \ldots, v_{s-1}$ son adyacentes a w_{t+1} en R, en donde $w_t = v_r$ y $w_{t+1} = v_s$. Ver figura 7

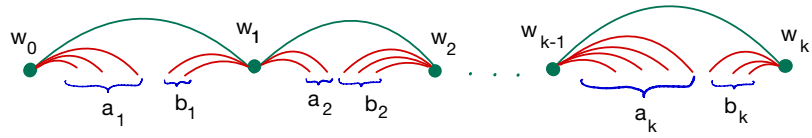


FIGURA 7. Árbol biplanar

Para $n \geq 3$ sea P_n el árbol biplanar con aristas $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$. Ver figura 8.

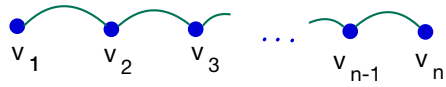


FIGURA 8. P_n.

Para cualquier par de árboles biplanares R y S denotamos por $d(R, S)$ la distancia de R a S en $\overline{\mathcal{B}_n}$.

Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Denotamos por $k(R)$ al número de vértices en el cuerpo de R y por $m(R)$ al entero no negativo $n - k(R)$.

LEMA 2. *Para todo árbol biplanar R con $n \geq 3$ vértices, $d(R, P_n) \leq m(R)$.*

Demostración. Si $m(R) = 0$, entonces $k(r) = n$ lo cual implica $R = P_n$. Continuamos la demostración por inducción matemática en $m(R)$ suponiendo que para cierto entero $l \geq 0$ se cumple $d(Q, P_n) \leq m(Q)$ si Q es árbol biplanar con n vértices tal que $m(Q) = l$.

Sea R un árbol biplanar con n vértices tal que $m(R) = l + 1$. Sea $v_1 = w_0, w_1, \ldots, w_{k(R)-1} = v_n$ el cuerpo de R. Como $k(R) = n - m(R) < n$ podemos escoger t tal que el número de vértices $a_t + b_t$, entre w_t y w_{t+1}, es mayor que cero. Sin perder generalidad suponemos $a_t > 0$.

Sea $Q = (R - w_tw_{t+1}) + v_{r+a_t}w_{t+1}$, en donde $w_t = v_r$. Ver figura 9 para el caso $b_t = 0$ y figura 10 para el caso $b_t > 0$.

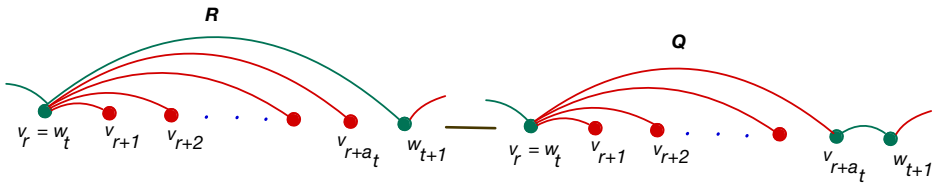


FIGURA 9. Caso $b_t = 0$

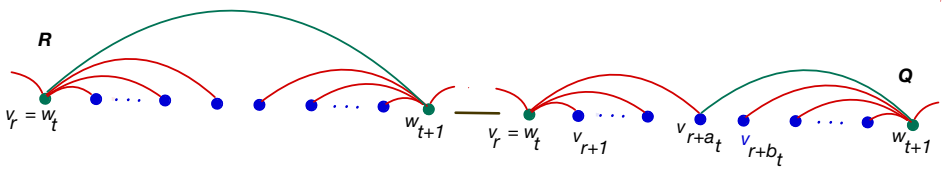


FIGURA 10. Caso $b_t > 0$.

En ambos casos Q es un árbol biplanar pues satisface las condiciones en la caracterización de éstos. Notemos que Q tiene n vértices y es tal que $m(Q) = m(R) - 1 = l$ pues las aristas $w_t v_{r+a_t}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ están en el cuerpo de Q. Por la hipótesis de inducción $d(Q, P_n) \leq m(Q)$.

Las aristas intercambiadas $w_t w_{t+1}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ tienen un vértice en común por lo que ni se cruzan ni están anidadas en F_n. Por lo tanto R y Q son adyacentes en $\overline{\mathcal{B}_n}$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(R, P_n) &\leq d(R, Q) + d(Q, P_n) \\ &\leq 1 + m(Q) \\ &= m(R) \end{aligned}$$

□

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Para todo entero $n \geq 3$, la gráfica $\overline{\mathcal{B}_n}$ es conexa y tiene radio $Rad(\overline{\mathcal{B}_n})$ a lo más $n - 2$.*

Demostración. Por el lema 2, para todo árbol biplanar R con n vértices, existe una trayectoria en $\overline{\mathcal{B}_n}$ que une R con P_n. Esto implica que $\overline{\mathcal{B}_n}$ es conexa. Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Como $k(R) \geq 2$, necesariamente $m(r) \leq n - 2$. Por el lema 2, $d(R, P_n) \leq n - 2$ por lo que $Rad(\overline{\mathcal{B}_n}) \leq n - 2$. □

Sean R y S árboles biplanares con vértices $v_1, v_2, \ldots v_n$, $n \geq 3$. Entonces

$$\begin{aligned} d(R, S) &\leq d(R, P_n) + d(P_n, S) \\ &\leq m(R) + m(S) \\ &\leq (n - 2) + (n - 2) \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

Supongamos $d(R, S) = 2n - 4$. Por lo anterior $m(R) = n - 2$ y $m(S) = n - 2$, de donde $k(R) = 2$ y $k(S) = 2$; esto implica que el cuerpo de R y de S consta de la arista $v_1 v_n$. Entonces existen enteros $1 \leq r \leq n$ y $1 \leq s \leq n$ tales que R contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \ldots, r$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = r + 1, r + 2, \ldots n - 1$ y S contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \ldots, s$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = s + 1, s + 2, \ldots n - 1$. Sin perder generalidad suponemos $r < s$. Ver figura 11.

Una pareja a la vez, intercambiamos primero la arista $v_{r+1} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+1}$; posterormente, si $s > r + 1$, intercambiamos la arista $v_{r+2} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+2}$ y así sucesivamente hasta intercambiar la arista $v_s v_n$ y la arista $v_1 v_s$. Aquí también cada par de aristas intercambiadas tienen un vértice en común lo cual implica que no se cruzan ni estan anidadas.

De esta manera obtenemos una sucesión de árboles biplanares $R = Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-r} = S$ tal que Q_{i+1} es adyacente a Q_i en $\overline{\mathcal{B}_n}$ para $i = 0, 1, \ldots, S - r - 1$. Ver figura 12.

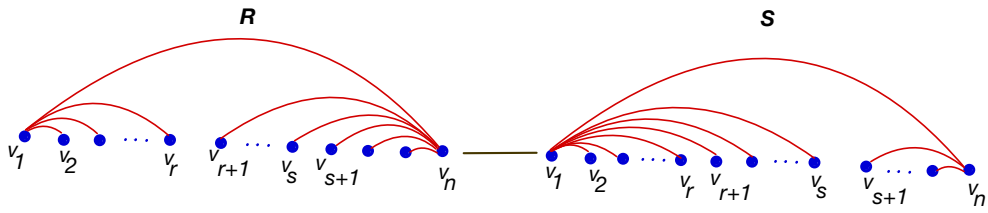


FIGURA 11. Arboles R y S con $k(R) = k(S) = 2$.

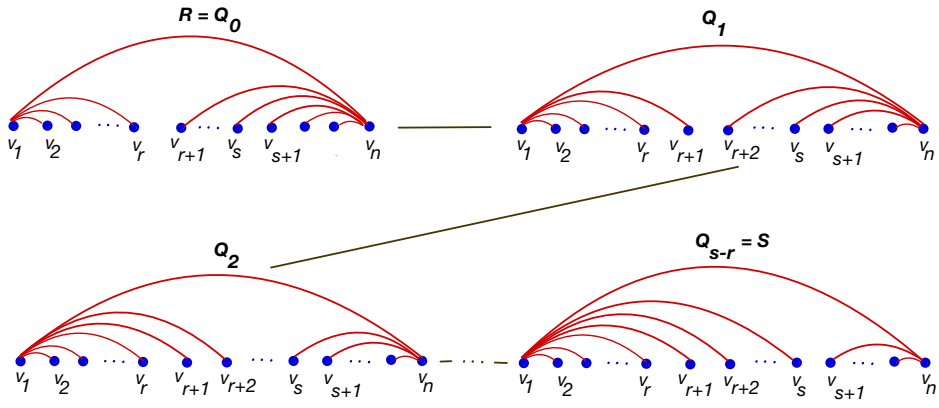


FIGURA 12. $R = Q_0, Q_1, \ldots, Q_{s-r} = S$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(R,S) &= d(Q_0, Q_{s-r}) \\ &\leq s - r \\ &\leq n - 2 \end{aligned}$$

lo cual contradice $d(R,S) = 2n-4$ pues $n \geq 3$. Por lo tanto $d(R,S) \leq 2n-5$.

Con el argumento anterior hemos probado el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Para todo entero $n \geq 3$, el diámetro $Diam(\overline{\mathcal{B}_n})$ de $\overline{\mathcal{B}_n}$ es a lo más $2n-5$.*

3. COTAS INFERIORES PARA $Rad(\overline{\mathcal{B}_n})$ Y $Diam(\overline{\mathcal{B}_n})$

Sean S_n^1 y S_n^2 las estrellas con n vértices con centro en v_1 y v_2, respectivamente.

Como P_n y S_n^1 solamente tienen en común a la arista v_1v_2, necesariamente $d(S_n^1, P_n) \geq n-2$. Por lo tanto $Rad(\overline{\mathcal{B}_n}) \geq n-2$.

Sea $S_n^1 = R_0, R_1, R_2, \ldots R_d = S_n^2$ una trayectoria de longitud $d = d(S_n^1, S_n^2)$ que une S_n^1 con S_n^2 en $\overline{\mathcal{B}_n}$ y sea t el menor subíndice tal que R_t contiene una arista de la forma v_2v_j con $j \geq 3$.

Notemos que:

1. La arista v_2v_j de R_t forma un ciclo en F_n con las aristas v_1v_2 y v_1v_j de S_n^1. Ver figura 13.

Como R_t no tiene ciclos, al menos una de las aristas v_1v_2 o v_1v_j de S_n^1 no es arista de R_t.

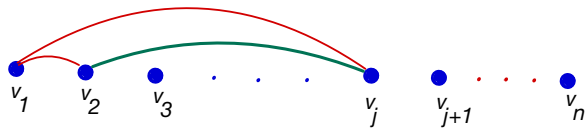


FIGURA 13. Las aristas v_2v_j,v_1v_2 y v_1v_j forman un ciclo.

2. Si $j > 3$, entonces la arista v_2v_j de R_t cruza en F_n a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \ldots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1. Ver figura 14.

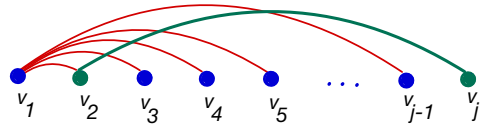


FIGURA 14. La arista v_2v_j cruza a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \ldots, v_1v_{j-1}$.

Como R_t no tiene aristas que se cruzan en F_n, necesariamente las $j-3$ aristas $v_1v_3, v_1v_4, \ldots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1 no son aristas de R_t.

3. Si $j < n$, entonces la arista v_2vj de R_t está anidada con las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \ldots v_1v_n$ de S_n^1. Ver figura 15.

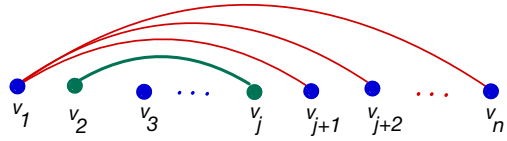


FIGURA 15. La arista v_2v_j está anidada con cada una de las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \ldots v_1v_n$.

Como R_t no tiene aristas anidadas, necesariamente las $n-j$ aristas v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, $\ldots$, v_1v_n de S_n^1 no son aristas de R_t

Por 1, 2 y 3, el árbol R_t no tiene al menos $1 + (j-3) + (n-j) = n-2$ aristas de S_n^1; esto implica $t \geq n-2$.

Finalmente, por la elección de t, el árbol R_t tiene a lo más dos aristas (v_2v_1 y $e = v_2v_j$) de S_n^2 por lo que se requieren al menos $n-3$ intercambios de aristas para obtener el árbol S_n^2 a partir del árbol R_t. Entonces $d - t \geq n-3$, lo cual implica $d(S_n^1, S_n^2) = d \geq t + (n-3) \geq 2n-5$. Por lo tanto $Diam(\overline{\mathcal{B}_n}) \geq 2n-5$.

Como las cotas superiores e inferiores de $Rad(\overline{\mathcal{B}_n})$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}_n})$ coinciden, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5. *Para todo entero $n \geq 3$, $Rad(\overline{\mathcal{B}_n}) = n-2$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}_n}) = 2n-5$.*

REFERENCIAS

[1] A. P. Figueroa y J. Fresán- Figueroa, The biplanar tree graph, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020), 795–806.

[2] H. Harborth, I Mengersen, Drawings of the complete graph with maximum number of crossings, in *Proceedings of the Twenty-Third Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, (Boca Raton, Fl 1992), Congressus Numerantium 88, Utilitas Math., Winnipeg, 1992, 225–228.

[3] J. Pach, J. Solymosi, G. Tóth, Unavoidable configurations in complete topological graphs, Discrete Comput Geom 30 (2003), 311–320.

Elsa P. Omaña Pulido
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `eop@xanum.uam.mx`

Eduardo Rivera Campo
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `erc@xanum.uam.mx`

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 33-43.
Recibido 06-03-2024. Aceptado 06-06-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/jirca



PERTURBACIÓN UNIDIMENSIONAL DE RELACIONES AUTOADJUNTAS

JOSUÉ I. RIOS-CANGAS

Resumen. En la teoría de transformaciones lineales que se aborda en los cursos clásicos del álgebra lineal, siempre consideran equivalente las nociones de ser simétrica y autoadjunta. Sin embargo, esta equivalencia no sucede si el dominio de la transformación no es todo el espacio vectorial. Este tipo de transformaciones siempre tienen extensiones autoadjuntas que son transformaciones lineales multivaluadas o también conocidas como relaciones. Mediante la teoría de perturbación de transformaciones lineales multivaluadas autoadjuntas, en este trabajo analizamos las extensiones autoadjuntas de transformaciones lineales multivaluadas simétricas, y en particular, de transformaciones lineales cuyo dominio no necesariamente es todo el espacio vectorial.

1. Introducción

Con frecuencia encontramos que los problemas del análisis, la geometría diferencial, el análisis funcional, los sistemas dinámicos, la física teórica, entre otras importantes teorías, se pueden reducir a un problema de matrices. Este comportamiento es de interés en las ramas de la matemática aplicada, debido a que resulta más factible resolver un problema de matrices que el problema de origen. Horn - Johnson [9, 10] y Bhatia [3, 2] desarrollaron una teoría exhaustiva del análisis matricial, en donde incluye resultados modernos con numerosas pruebas simplificadas de resultados clásicos, basados en publicaciones o al aporte de alumnos, ayudantes y profesores de todos los cursos del álgebra lineal y temas afines.

Una parte que resalta en la teoría de matrices es la teoría de transformaciones lineales (u operadores lineales) es espacios vectoriales de dimensión finita. Recordemos que una transformación lineal $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ en un espacio vectorial sobre el campo de los complejos $\mathbb{C}$, es una aplicación que satisface

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta g\,, \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } f, g \in \mathcal{H}\,. \tag{1}$$

Las matrices y las transformaciones lineales están estrechamente relacionadas. De hecho, si $\dim \mathcal{H} = n$ entonces la transformación (1) se puede representar como una matriz en $M_n(\mathbb{C})$ (espacio de matrices complejas de tamaño $n \times n$). Inversamente, toda matriz A en $M_n(\mathbb{C})$ se puede ver como una transformación lineal $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

En los cursos clásicos del álgebra lineal usualmente se considera el dominio de las transformaciones lineales como todo el espacio vectorial y se deja este análisis de dominio en cursos más avanzados de licenciatura o de posgrado como los cursos del análisis funcional, teoría de operadores lineales o teoría espectral de operadores (por mencionar algunos), en donde el dominio del operador lineal actúa en espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, existen ejemplos de transformaciones lineales que no pueden ser analizados con la teoría clásica del álgebra lineal. Por ejemplo, si consideramos a $\mathbb{C}_n[x]$ como el espacio de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en variable la x y el operador de multiplicación por la variable independiente $J\colon \mathcal{D}(J) \subset \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dado por

$$Jp(x) = xp(x)\,, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Principal 15A04, 47A06; Secundaría 47B25, 47A55.
Palabras clave. Transformaciones lineales, relaciones autoadjuntas, teoría de perturbación.

uno puede calcular de manera simple que J es una transformación lineal. Note que hemos hecho énfasis en el dominio de J debido a lo siguiente: como $\{1,\dots,x^n\}$ es una base para $\mathbb{C}_n[x]$, se tiene de (2) que

$$J1 = x\,, \quad Jx = x^2\,,\dots\,, \quad Jx^{n-1} = x^n\,, \quad \text{pero } Jx^n \text{ no está definido}$$

ya que $x^{n+1} \notin \mathbb{C}_n[x]$ y $\mathcal{D}(J) = \operatorname{span}\{1,\dots,x^{n-1}\} \neq \mathbb{C}_n[x]$. Además, si equipamos a $\mathbb{C}_n[x]$ con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir, si lo convertimos en un espacio de Hilbert, podemos construir una base ortonormal $\{e_j(x)\}_{j=0}^n$ para $\mathbb{C}_n[x]$ mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^n$. De esto se sigue que el dominio de (2) satisface $\mathcal{D}(J) = \operatorname{span}\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ y de manera sencilla se verifica que $\langle p(x), Jp(x)\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $p(x) \in \mathcal{D}(J)$, es decir J es una transformación lineal simétrica. Por otra parte, existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que (ver proposición 15 de la sección 5)

$$Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1}e_{j-1}(x)\,, \quad j = 0,\dots,n-1\,. \quad (b_{-1} = 0)$$

De esta manera, uno puede calcular la representación matricial de J, dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & * \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & * \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En los cursos de álgebra lineal nos enseñan que una transformación lineal simétrica es autoadjunta, pero esto no sucede con la transformación (2), ya que su representación (3) no es autoadjunta. De hecho, ni siquiera tiene sentido la adjunta de J en teoría clásica del álgebra lineal (incluso ni en teoría de operadores lineales).

Lo anterior es un ejemplo de transformación lineal con dominio no densamente definido en el espacio vectorial y este tipo de transformaciones motivaron a von Neumann a introducir la teoría de transformaciones multivaluadas (o también conocidas como relaciones lineales). Esto por la necesidad de trabajar con la adjunta de una transformación lineal no densamente definida. Es increíble que Neumann no solamente fue el pionero de la teoría de extensiones de operadores simétricos, más también de la teoría de transformaciones multivaluadas iniciada en su trabajo [13], y posteriormente desarrollada en [1, 6, 7].

Hoy en día encontramos numerosos trabajos sobre transformaciones multivaluadas, la cual busca dar solución a problemas lineales y de extensión que son difíciles o imposibles de resolver con la teoría clásica de operadores lineales. En este trabajo abordamos la teoría de extensión de transformaciones lineales simétricas multivaluadas a través de la teoría de perturbación unidimensional (ver sección 4), ya que estas transformaciones siempre tiene extensiones autoadjuntas [12, prop. 4.10]. Para lograr esto, en la sección 2 damos una serie de conceptos y resultados básicos sobre transformaciones multivaluadas, mientras que la sección 3 un poco de teoría de transformaciones simétricas multivaluadas. La última sección la dedicamos en mostrar las extensiones autoadjuntas del operador (2) o equivalente a encontrar las matrices autoadjuntas que contengan a la matriz (3).

2. Transformaciones lineales multivaluadas

Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial finito-dimensional sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, siendo el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ anti-lineal en su primera entrada.

Para trabajar con transformaciones lineales multivaluadas es necesario trabajar en el espacio vectorial que es copia de $\mathcal{H}$ consigo mismo (c.f. [4, sec. 2.3]),

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \,:\, f,g \in \mathcal{H} \right\}, \quad \text{con} \quad \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle := \langle f,u\rangle + \langle g,v\rangle\,.$$

Es fácil verificar que el producto anterior de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es un producto interno y por consiguiente induce una norma que es equivalente a la norma $\left\|\binom{f}{g}\right\| = \|f\|+\|g\|$. Así, la convergencia en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

Definición 1. Una *transformación lineal multivaluada* (o también llamada relación) T en $\mathcal{H}$ es un conjunto lineal de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{D}(T) := \left\{f\in\mathcal{H} \,:\, \binom{f}{g}\in T\right\}, \qquad \mathcal{R}(T) := \left\{g\in\mathcal{H} \,:\, \binom{f}{g}\in T\right\},$$
$$\mathcal{N}(T) := \left\{f\in\mathcal{H} \,:\, \binom{f}{0}\in T\right\}, \qquad \mathcal{M}(T) := \left\{g\in\mathcal{H} \,:\, \binom{0}{g}\in T\right\},$$

representan el *dominio*, *rango*, *núcleo* y *multivaluado* de T, respectivamente, los cuales son conjuntos lineales de $\mathcal{H}$.

De esta manera, al hablar de una relación en $\mathcal{H}$ nos estamos refiriendo a un conjunto lineal de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

Ejemplo 1. Abusando un poco de la notación, si identificamos a la transformación lineal (2) con su gráfica en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ (cf. [4, cap. 3]), tenemos que

$$J = \left\{\binom{p(x)}{xp(x)} \,:\, p(x)\in \operatorname{span}\{x^j\}_{j=0}^{n-1}\right\} \subset \mathbb{C}_n[x]\oplus\mathbb{C}_n[x]\,. \tag{4}$$

Entonces, para $\binom{p(x)}{xp(x)}, \binom{q(x)}{xq(x)} \in J$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, se sigue que

$$\alpha\binom{p(x)}{xp(x)} + \beta\binom{q(x)}{xq(x)} = \binom{\alpha p(x)+\beta q(x)}{x(\alpha p(x)+\beta q(x))} \in J\,.$$

Por lo tanto, J es una relación en $\mathbb{C}_n[x]\oplus\mathbb{C}_n[x]$.

Observación 1. El ejemplo 1 se cumple de manera general, i.e., toda transformación lineal $T\colon \mathcal{D}(T)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ identificada con su gráfica es una relación en $\mathcal{H}$.

El inverso de la observación anterior no se cumple, pues es simple ver que para $f\in\mathcal{H}$ distinto de cero, $\operatorname{span}\left\{\binom{0}{f}\right\}$ es una relación en $\mathcal{H}$ que no representa la gráfica de una transformación lineal. De hecho se cumple la siguiente caracterización.

Observación 2. Una relación T en $\mathcal{H}$ es gráfica de una transformación lineal si y solo si $\mathcal{M}(T)=\{0\}$ [5, prop. 3.2.1].

A partir de aquí, las transformaciones lineales serán identificadas con su gráfica para tratarlas como relaciones. Diremos que una relación no es transformación lineal si no es la gráfica de una transformación lineal.

Ejemplo 2. El conjunto T de $\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2$ dado por

$$T = \left\{\binom{(x,y)}{(x+y,a)} \,:\, x,y,a\in\mathbb{C}\right\}.$$

es una relación que no es transformación lineal. En efecto, si $\binom{(x,y)}{(x+y,a)}, \binom{(r,s)}{(r+s,b)} \in T$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, entonces

$$\alpha\binom{(x,y)}{(x+y,a)} + \beta\binom{(r,s)}{(r+s,b)} = \binom{(\alpha x+\beta r,\alpha y+\beta s)}{(\alpha x+\beta r+\alpha y+\beta s,\alpha a+\beta b)} \in T\,.$$

Sin embargo, para $\alpha\neq 0$ se sigue que $\binom{(0,0)}{(0,\alpha)}\in T$, o bien, $\mathcal{M}(T)\neq\{(0,0)\}$.

Para dos relaciones T, S y $\zeta\in\mathbb{C}$, consideremos las operaciones *suma, multiplicación por escalar, composición* e *inversa* de relaciones dadas por

$$T+S := \left\{\binom{f}{g+h} \,:\, \binom{f}{g}\in T,\ \binom{f}{h}\in S\right\}, \quad \zeta T := \left\{\binom{f}{\zeta g} \,:\, \binom{f}{g}\in T\right\},$$
$$ST := \left\{\binom{f}{k} \,:\, \binom{f}{g}\in T,\ \binom{g}{k}\in S\right\}, \qquad T^{-1} := \left\{\binom{g}{f} \,:\, \binom{f}{g}\in T\right\},$$

respectivamente, las cuales son relaciones en $\mathcal{H}$. Es directo ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T^{-1}) &= \mathcal{R}(T)\,, & \mathcal{N}(T^{-1}) &= \mathcal{M}(T)\,, \\ \mathcal{R}(T^{-1}) &= \mathcal{D}(T)\,, & \mathcal{M}(T^{-1}) &= \mathcal{N}(T)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La relación $T\restriction_{\mathcal{C}}$ es la relación T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición 2. Para dos relaciones T, S, decimos que S es extensión de T, escribimos $T \subset S$, si $S\restriction_{\mathcal{D}(T)} = T$.

Ejemplo 3 (continuación del ejemplo 1)**.** Teniendo en cuenta la representación matricial (3), considere $J_0 \colon \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ con representación matricial

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

el cual siendo identificado con su gráfica en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ se sigue que J_0 es extensión de J dado en (4), debido a que $J_0\restriction_{\mathcal{D}(J)} = J$.

Dos relaciones T y S son linealmente independientes si $T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. De esto, podemos asumir que los símbolos $\perp, \dot{+}, \oplus$, y $\ominus$ representan la notación estándar en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, es decir,

$$\begin{aligned} T^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \left\langle \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ T \dot{+} S &= \left\{ \begin{pmatrix} f+h \\ g+k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S \text{ y } T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}, \\ T \oplus S &= T \dot{+} S\,, \text{ con } T \subset S^{\perp}\,, \\ T \ominus S &= T \cap S^{\perp}\,, \end{aligned}$$

los cuales se vuelven conjuntos lineales en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, o bien, relaciones en $\mathcal{H}$. Hablando de manera estricta, el símbolo $\oplus$ en este contexto difiere de la expresión $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Esto no debería causar confusión al usar el mismo símbolo.

En el contexto de relaciones, se denota la *adjunta* de una relación T como la relación en $\mathcal{H}$ dada por

$$T^* := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \langle h, g \rangle = \langle k, f \rangle\,, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}. \tag{6}$$

Este concepto extiende al usual en transformaciones lineales, e incluso al de operadores lineales en donde es necesario la densidad del dominio [5, sec. 3.4].

Observación 3. La adjunta de T satisface $T^* = \left(-T^{-1}\right)^{\perp}$. Además, para dos relaciones T, S y $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, se tiene lo siguiente [11, teo. 3 y cor. 4]:

$$\begin{aligned} T^{**} &= T\,, & (T+S)^* &= T^* + S^*\,, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*\,, & S \subset T &\Rightarrow T^* \subset S^*\,, \\ (\alpha T)^* &= \overline{\alpha} T^*\,, & \mathcal{N}(T^*) &= \mathcal{R}(T)^{\perp}\,. \end{aligned}$$

Las propiedades de la inversa (5) y la última igualdad de la observación 3 implican

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1}) \subset \mathcal{N}(A^{*-1})^{\perp} = \mathcal{M}(A^*)^{\perp}\,. \tag{7}$$

En la observación 2 mencionamos que el multivaluado de una relación determina si la relación es o no una transformación lineal. Uno se pregunta si una relación contiene una parte que sea transformación lineal, la respuesta incide en la siguiente descomposición.

Definición 3. Para una relación T, considere

$$T_{\mathrm{m}} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \quad \text{y} \quad T_{\mathrm{o}} := T \ominus T_{\mathrm{m}}\,, \tag{8}$$

de donde se consigue la descomposición $T = T_{\mathrm{o}} \oplus T_{\mathrm{m}}$.

Es claro que T_{o} es una transformación lineal y es llamada la *parte operador* de T, mientras que T_{m} es una relación puramente multivaluada y es llamada la *parte multivaluada* de T. Además,

$$\mathcal{R}(T_{\mathrm{o}}) \perp \mathcal{R}(T_{\mathrm{m}}) = \mathcal{M}(T) \quad \text{y} \quad \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_{\mathrm{o}})\,.$$

La descomposición de una relación es sus partes operador y multivaluada (8) simplifica el análisis de su espectro debido a la siguiente observación.

Observación 4. Si T es una relación tal que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M}(T)^{\perp}$, entonces tanto el dominio como el rango de T_{o} están contenidos en $\mathcal{M}(T)^{\perp}$. Así, para el espacio vectorial copia de $\mathcal{M}(T)^{\perp}$ consigo mismo,

$$\mathcal{M}(T)^{\perp} \oplus \mathcal{M}(T)^{\perp}\,, \tag{9}$$

se sigue que la relación T_T en el espacio (9) dada por

$$T_T := T \cap \left(\mathcal{M}(T)^{\perp} \oplus \mathcal{M}(T)^{\perp}\right) = T_{\mathrm{o}}\,,$$

es decir, T_T es equivalente a T_{o} en el espacio (9) y por consiguiente es una transformación lineal. Con esta construcción se puede afirmar que los espectros de T y de T_T son los mismos [11, teo. 9].

3. Transformaciones multivaluadas simétricas

Abordamos en esta sección un poco de la teoría de transformaciones lineales multivaluadas que son simétricas, i.e., relaciones simétricas. Esto para extender la noción de transformaciones lineales simétricas que no necesariamente son autoadjuntas (ver por ejemplo el operador (2) que se vio en la sección 1).

Definición 4. Se dice que una relación A en $\mathcal{H}$ es simétrica si

$$\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}\,, \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A\,. \tag{10}$$

La noción de ser simétrica se caracteriza de la siguiente manera (cf. [11, prop. 10]):

$$A \text{ es simétrica} \quad \Leftrightarrow \quad \langle f, k\rangle = \langle g, h\rangle\,, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \subset A^*\,. \tag{11}$$

Proposición 5. *Una relación simétrica A satisface $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{M}(A)^{\perp}$ y, por lo tanto, cumple las condiciones de la observación 4.*

Demostración. Se sigue de la última implicación de (11) que $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(A^*)$. Por lo tanto, de (7) y tomando complemento ortogonal, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{M}(A^*)^{\perp} \subset \mathcal{M}(A)^{\perp}$. □

Lo siguiente muestra una propiedad del adjunto de una relación simétrica.

Proposición 6. *Si A es una relación simétrica en $\mathcal{H}$, entonces*

$$\mathcal{R}(A^* - \zeta I) = \mathcal{H}\,, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\,. \tag{12}$$

Demostración. Como A es simétrica, si $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in (A - \overline{\zeta} I)$ entonces $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in A$ y $\overline{\zeta}\,\|f\|^2 = \langle f, \overline{\zeta} f\rangle \in \mathbb{R}$, lo que implica $f = 0$, es decir, $\mathcal{N}(A - \overline{\zeta} I) = \{0\}$. Por lo tanto, de la última implicación de la observación 3 se sigue (12). □

Diremos que una relación A es *autoadjunta* si $A = A^*$. Es claro que toda relación autoadjunta es simétrica, pero el sentido inverso no necesariamente se cumple. Por ejemplo, la transformación (2) que se mostró en la sección 1 es simétrica no autoadjunta, debido a que su representación matricial (3) no es autoadjunta.

Corolario 7. *Una relación simétrica con dominio todo el espacio vectorial es una transformación lineal autoadjunta.*

Demostración. Como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, se sigue de (7) que $\mathcal{M}(A^*) = \{0\}$ y por consiguiente A^* es una transformación lineal. Ahora bien, (11) implica que si $\binom{h}{k} \in A^*$ entonces existe $\binom{h}{g} \in A \subset A^*$, de donde se sigue que $\binom{0}{k-g} = \binom{h}{k} - \binom{h}{g} \in A^*$, o bien, $k = g$ y $A^* \subset A$. Por lo tanto, $A = A^*$. □

Para trabajar con la teoría de extensión de relaciones simétricas consideramos el *espacio defecto* de una relación T dado por

$$\mathrm{N}_\zeta(T) := \left\{ \binom{f}{\zeta f} \in T \right\} , \quad \zeta \in \mathbb{C} ,$$

el cual es una transformación lineal contenida en T con $\mathcal{D}(\mathrm{N}_\zeta(T)) = \mathcal{N}(T - \zeta I)$.

El espacio defecto es útil en la caracterización de la adjunta de una relación simétrica A, viz. (cf. [12, teo. 4.6])

$$A^* = A \dotplus \mathrm{N}_\zeta(A^*) \dotplus \mathrm{N}_{\overline{\zeta}}(A^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} , \tag{13}$$

donde la suma en (13) se vuelve ortogonal si $\zeta \in \{i, -i\}$. Cabe mencionar que la ecuación (13) se le conoce como la *primera fórmula* de von Neumann para relaciones lineales.

Debido a que el espacio defecto está involucrado en la caracterización de la adjunta de una relación, es conveniente considerar el *índice de defecto* de una relación simétrica A, el cual viene dado por

$$\eta_\zeta(A) := \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} . \tag{14}$$

este índice permanece constante sobre $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ [12, sec. 3].

Proposición 8. *Una relación simétrica A es autoadjunta si y solo si $\eta_\zeta(A) = 0$.*

Demostración. El índice $\eta_\zeta(A)$ es cero si y solo si $\mathrm{N}_\zeta(A^*) = \left\{ \binom{0}{0} \right\}$, para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, esto si y solo si $A = A^*$, debido a (13). □

Observación 5. La proposición 8 proporciona una manera de determinar si una relación simétrica es autoadjunta o no. Además, en [12, prop. 4.10] nos aseguran que una relación simétrica no autoadjunta siempre tiene extensiones autoadjuntas.

Surge el interés de describir las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica y una manera de hacerlo es mediante la llamada *segunda fórmula* de von Neumann para relaciones [12, teo. 4.7]. Otra manera de describir estas extensiones es a través de la teoría de perturbación la cual se aborda en la siguiente sección.

4. Perturbación unidimensional de relaciones autoadjuntas

Iniciamos esta sección con la siguiente igualdad entre relaciones que será de gran utilidad en la secuela. Recalcamos que dos relaciones son linealmente independientes si solo coinciden en el elemento cero.

Lema 9. *Si T y S son relaciones linealmente independientes, entonces*

$$T \dotplus S = (T^* \cap S^*)^* . \tag{15}$$

Demostración. Mostremos primero por contención que

$$T \dotplus S = \left(T^\perp \cap S^\perp\right)^\perp . \tag{16}$$

Si $\mathbf{a} \in T^\perp \cap S^\perp$, entonces es simple ver que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, para todo $\mathbf{b} \in T \dotplus S$, es decir, $\mathbf{a} \in (T \dotplus S)^\perp$ y se cumple $T^\perp \cap S^\perp \subset (T \dotplus S)^\perp$. Ahora, es claro que $T, S \subset T \dotplus S$, o bien, $(T \dotplus S)^\perp \subset T^\perp, S^\perp$, es decir, $(T \dotplus S)^\perp \subset T^\perp \cap S^\perp$ y por consiguiente iguales,

que tomando complemento ortogonal se llega a (16). Por lo tanto, las propiedades de la observación 3 y (16) implican

$$\begin{aligned} T \dot{+} S &= (-T^{*-1})^{\perp} \dot{+} (-S^{*-1})^{\perp} = -\left(T^{*\perp} \dot{+} S^{*\perp}\right)^{-1} \\ &= -\left((T^* \cap S^*)^{\perp}\right)^{-1} = \left(-(T^* \cap S^*)^{-1}\right)^{\perp} = (T^* \cap S^*)^* \,, \end{aligned} \tag{17}$$

como se queria. □

Hemos usado libremente en (17) la conmutación de las operaciones multiplicación por menos, inversa y complemento ortogonal de una relación (cf. [11, prop. 2]).

Para una relación A y $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ de norma uno, consideremos las relaciones

$$S_A := A\restriction_{\mathcal{D}(A)\ominus\varphi} \,, \qquad A_\varphi := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}\right\} .$$

LEMA 10. *Las relaciones A^*, A_φ son linealmente independientes. Además,*

(a) $S_A = A \cap A_\varphi^*$.
(b) $S_A^* = A^* \dot{+} A_\varphi$.
(c) $\mathcal{M}(S_A^*) = \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\}$.

Demostración. Teniendo en cuenta (7), se sigue que $\varphi \perp \mathcal{M}(A^*)$, lo que implica $A_\varphi \cap A^* = \binom{0}{0}$ y se cumple la primera parte de la afirmación.

(a): Es sencillo calcular que $\binom{f}{g} \in S_A \subset A$ si y solo si $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, 0\rangle$, esto si y solo si $\binom{f}{g} \in A_\varphi^* \cap A$.

(b): Se sigue del punto anterior y de la ecuación (15).

(c): Se mostró en la primera parte de la afirmación que $\operatorname{span}\{\varphi\} \perp \mathcal{M}(A^*)$ y del punto (b) se tiene que $\mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\} \subset \mathcal{M}(S_A^*)$. Para la otra contención, si $g \in \mathcal{M}(S_A^*)$ se sigue de (b) que existe $h \in \mathcal{M}(A^*)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$g = h + \alpha\varphi \in \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\} \,,$$

o bien, $\mathcal{M}(S_A^*) \subset \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\}$. □

Lo siguiente describe las partes (8) de S_A^*.

COROLARIO 11. *Las partes operador y multivaluada de la adjunta de S_A cumplen*

$$(S_A^*)_{\mathrm{m}} = (A^*)_{\mathrm{m}} \oplus A_\varphi \,; \quad (S_A^*)_{\mathrm{o}} = \left\{\begin{pmatrix} f \\ g - \langle\varphi, g\rangle\,\varphi\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix} \in (A^*)_{\mathrm{o}}\right\} . \tag{18}$$

Demostración. La primera igualdad de (18) es directo de 10.(c). Ahora, definamos el lado derecho de la segunda igualdad de (18) como T para mostrar que $(S_A^*)_{\mathrm{o}} = T$. De 10.(b) se sigue que $T \subset S_A^*$ y es sencillo ver que T es transformación lineal, pues $(A^*)_{\mathrm{o}}$ lo es, lo que implica $T \subset (S_A^*)_{\mathrm{o}}$. Para la otra contención, si $\binom{f}{h} \in (S_A^*)_{\mathrm{o}} \subset S_A^*$ entonces se tiene nuevamente de 10.(b) que $\binom{f}{h} = \binom{f}{g+\alpha\varphi}$, con $\binom{f}{g} \in A^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que $f = 0$ implica $0 = h = g + \alpha\varphi$, o bien, $g = \alpha\varphi = 0$, pues A^* y A_φ son linealmente independientes. Así, $\binom{f}{g} \in (A^*)_{\mathrm{o}}$ y de 10.(c) se cumple que $h \perp \varphi$,

$$0 = \langle\varphi, h\rangle = \langle\varphi, g + \alpha\varphi\rangle = \langle\varphi, g\rangle + \alpha \,,$$

es decir, $h = g - \langle\varphi, g\rangle\,\varphi$. Por lo tanto, $\binom{f}{h} \in T$ y $(S_A^*)_{\mathrm{m}} \subset T$. □

Note que la relación $S_A \subset A$ es simétrica si A lo es, ya que $S_A \subset A \subset A^* \subset S_A^*$.

TEOREMA 12. *Si A es una relación simétrica, entonces:*

(a) $\dim \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) = \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 1$, *con* $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
(b) $\dim[S_A^*/S_A] = [A^*/A] + 2$.

Demostración. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, de (12) existe $\binom{f}{g} \in A^*$ tal que $-\alpha\varphi = g - \zeta f$, o bien, $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^*$. Además, si $\binom{f}{\zeta f} \in \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) \subset S_A^*$ entonces de 10.(b) existen $\binom{f}{g} \in A^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}$, viz. $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^*$. De esto podemos considerar $D = \left\{ \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^* : \alpha \in \mathbb{C} \right\} \subset A^*$, el cual es un conjunto lineal con $\dim D = \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 1$, debido a que A^* y A_φ son linealmente independientes. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma \colon \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) &\to D \\ \binom{f}{\zeta f} &\mapsto \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi}. \end{aligned}$$

Observe que $\gamma\binom{0}{0} = \binom{0}{-\alpha\varphi}$ implica $\alpha = 0$, debido a independencia lineal de A^* y A_φ. Además, es sencillo ver que $\ker\gamma = \left\{\binom{0}{0}\right\}$ y para $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in D$ se tiene que $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} + \binom{0}{\alpha\varphi} \in S_A^*$, i.e., $\binom{f}{\zeta f} \in \mathrm{N}_\zeta(S_A^*)$. Por lo tanto, γ es un isomorfismo y se cumple (a). Además, uno calcula de (13) que

$$\dim[S_A^*/S_A] = 2\dim \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) = 2\dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 2 = [A^*/A] + 2\,,$$

de donde se sigue (b). □

El punto 12.(b) es equivalente a decir que el índice (ver (14)) de S_A es

$$\eta_\zeta(S_A) = \eta_\zeta(A) + 1\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\,. \tag{19}$$

En lo siguiente caracterizamos todas las extensiones autoadjuntas de S_A cuando A es relación autoadjunta.

Teorema 13. *Si A es una relación autoadjunta, entonces $\eta_\zeta(S_A) = 1$. Además, todas las extensiones autoadjuntas de S_A están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las cuales vienen dadas por*

$$A_\tau = \left\{ \binom{f}{g + \tau\langle\varphi, f\rangle\varphi} : \binom{f}{g} \in A \right\}, \quad \tau \neq \infty\,, \tag{20}$$

mientras que

$$A_\infty = S_A \dot{+} A_\varphi\,. \tag{21}$$

Demostración. De la proposición (8) y (19) se sigue la primera parte de la afirmación. Ahora, es sencillo verificar de la definición (10) que las extensiones (20) y (21) son simétricas. Además, para $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathcal{D}(A_\tau) = \mathcal{D}(A)$ y

$$S_{A_\tau} = A_\tau{\restriction}_{\mathcal{D}(A_\tau)\ominus\varphi} = A{\restriction}_{\mathcal{D}(A)\ominus\varphi} = S_A\,.$$

De esto y de (19) se cumple que $\eta_\zeta(A_\tau) = \eta_\zeta(S_A) - 1 = 0$, es decir, A_τ es autoadjunta. Por otra parte, como $S_A \subset A$, se cumple de los lemas 9 y 10 que S_A y A_φ son lineamente independientes y $A_\infty^* = S_A^* \cap A_\varphi^*$. Así, si $\binom{f}{\zeta f} \in A_\infty^* \subset A_\varphi^*, S_A^*$, con $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, entonces $\langle f, \varphi\rangle = \langle \zeta f, 0\rangle = 0$ y de 10.(b), $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}$, con $\binom{f}{g} \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\zeta\,\langle f, f\rangle = \langle f, g + \alpha\varphi\rangle = \langle f, g\rangle \in \mathbb{R}\,,$$

lo que implica $f = 0$ y $\eta_\zeta(A_\infty) = 0$, i.e, A_∞ es autoadjunta. Falta mostrar que cualquier extensión autoadjunta tiene la estructura (20) o (21). Si $\hat{A}$ es extensión autoadjunta de S_A entonces $\hat{A} \subset S_A^*$. Así, para $\binom{f}{h} \in \hat{A}$ se cumple de 10.(b) que

$$\binom{f}{h} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}, \quad \text{con} \quad \binom{f}{g} \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\,. \tag{22}$$

Si $f \perp \varphi$ entonces $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S_A$ y $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A_\infty$. Por lo tanto, $\hat{A} \subset A_\infty$ e iguales, debido a que son autoadjuntas. Para el caso $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$, hacemos $\tau = \alpha / \langle \varphi, f \rangle$ en (22), por lo que $h = g + \tau \langle \varphi, f \rangle \varphi$ y como $\hat{A}, A$ son autoadjuntas, $\langle f, h \rangle, \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$ y

$$\langle f, h \rangle = \langle f, g \rangle + \tau \langle \varphi, f \rangle \langle f, \varphi \rangle = \langle f, g \rangle + \tau |\langle \varphi, f \rangle|^2 ,$$

de donde se sigue $\tau \in \mathbb{R}$ y $\hat{A} \subset A_\tau$. Por lo tanto, $\hat{A} = A_\tau$ ya que son autoadjuntas. □

Observación 6. En [8, props. 1.3 y 1.4] se menciona que una transformación lineal simétrica S con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ e índice $\eta_\zeta(S) = 1$, tiene una extensión autoadjunta A con $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, que del corolario 7 se cumple que A es una transformación lineal.

Corolario 14. *Si S es una transformación lineal con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ y $\eta_\zeta(S) = 1$, entonces existe una transformación lineal autoadjunta A tal que*

$$S^* = A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}} . \tag{23}$$

Además, $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = \dim \mathcal{M}(S^*) = 1$, *que haciendo* $\mathcal{D}(S)^\perp = \operatorname{span}\{\varphi\}$ *se llega a*

$$S = A\restriction_{\mathcal{H} \ominus \varphi} . \tag{24}$$

Por lo tanto, $S_A = S$ y todas sus extensiones autoadjuntas vienen dadas por (20)-(21) del teorema 13, las cuales son todas transformaciones lineales a excepción de A_∞.

Demostración. De la observación 6 se tiene la existencia de una transformación lineal autoadjunta A tal que $S \subset A$ y $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Además, es directo ver que A y $(S^*)_{\mathrm{m}}$ son linealmente independientes y como $A \subset S^*$, entonces $A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}} \subset S^*$. Por otra parte, como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A \subset S^*$, lo que implica $\begin{pmatrix} 0 \\ g - h \end{pmatrix} \in (S^*)_{\mathrm{m}}$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g - h \end{pmatrix} \in A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}}$, es decir, $S^* \subset A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}}$, de donde se sigue (23). Ahora bien, debido al índice de S se tiene que $\dim \mathrm{N}_\zeta(S^*) = 1$ y de (13), $2 = \dim[S^*/S] > \dim[A/S] > 0$ de donde se tiene $\dim[A/S] = 1$ y de (23),

$$1 = \dim[S^*/A] = \dim (S^*)_{\mathrm{m}} = \dim \mathcal{M}(S^*) .$$

Note de (7) que $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = 1$. Por lo tanto, (15), 10.(a) y (23) implican (24). □

La condición de que S sea una transformación lineal en el corolario 14, no se puede relajar para que tenga codimensión del dominio igual a uno. En efecto, pues para la relación autoadjunta (21), el mismo teorema 13 nos marca que S_{A_∞} tiene índice $\eta_\zeta(S_{A_\infty}) = 1$, pero la codimensión de su dominio es mayor o igual que dos.

5. Ejemplo

En esta sección abordamos el problema de encontrar las extensiones autoadjuntas de la transformación lineal (2) que se inició en la sección 1. Recordamos que $(\mathbb{C}_n[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es el espacio de Hilbert de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en la variable x y que el operador de multiplicación por la variable independiente es la transformación lineal simétrica

$$\begin{aligned} J \colon \operatorname{span}\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1} &\to \mathbb{C}_n[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x) , \end{aligned} \tag{25}$$

donde $\{e_j(x)\}_{j=0}^n$ es la base ortonormal para $\mathbb{C}_n[x]$ construida mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^n$, cuyos elementos satisfacen

$$e_j(x) = \alpha_{jj} x^j + \text{orden menor} , \quad \alpha_{jj} > 0, \text{ para } j = 0, \ldots, n . \tag{26}$$

Proposición 15 (Relación de recurrencia). *Existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que*

$$Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x) , \quad j = 0, \ldots, n-1 . \quad (b_{-1} = 0) \tag{27}$$

Demostración. Como $Je_j(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ es un polinomio de grado $j+1$, entonces se cumple que $Je_j(x) = \sum_{r=0}^{j+1} c_{jr} e_r(x)$, con $c_{jr} \in \mathbb{C}$. Así, para $s = 0, \dots, j-2$,

$$c_{js} = \langle e_s(x), Je_j(x)\rangle = \langle Je_s(x), e_j(x)\rangle = \sum_{k=0}^{s+1} \overline{c}_{sk} \langle e_k(x), e_j(x)\rangle = 0\,,$$

lo que implica $Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + d_j e_{j-1}(x)$, donde $b_j = c_{j(j+1)}$, $a_j = c_{jj}$ y $d_j = c_{j(j-1)}$. Además, $a_j = \langle e_j(x), Je_j(x)\rangle \in \mathbb{R}$ mientras que de (26),

$$\alpha_{jj} x^{j+1} + \text{orden menor} = xe_j(x) = Je_j(x) = b_j \alpha_{(j+1)(j+1)} x^{j+1} + \text{orden menor}\,,$$

lo cual implica $b_j > 0$. Más aún,

$$d_j = \langle e_{j-1}(x), Je_j(x)\rangle = \langle Je_{j-1}(x), e_j(x)\rangle = b_{j-1}\,,$$

como se quería. □

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia (27), definamos la transformación lineal $J_0 \colon \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ que actúa como

$$\begin{aligned} &J_0 e_0(x) = b_0 e_1(x) + a_0 e_0(x)\,,\\ &J_0 e_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x)\,, \quad j = 1, \dots, n-1\,,\\ &J_0 e_n(x) = b_{n-1} e_{n-1}(x)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Es directo calcular que J_0 es simétrica y por ende autoadjunta, debido al corolario 7.

Observe que $J_0 \restriction_{\mathbb{C}_n[x] \ominus e_n(x)} = J$ y si identificamos a los operadores J y J_0 con su gráfica (ver ejemplo 1), entonces el lema 10, teorema 12 y corolario 11 implican que el operador de multiplicación (25) tiene índice $\eta_\zeta(J) = 1$ y adjunta

$$J^* = J_0 \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\},$$

cuyas partes operador y multivaluada son $(J^*)_{\mathrm{m}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\}$ y

$$(J^*)_{\mathrm{o}} = \left\{ \begin{pmatrix} p(x) \\ J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x) \end{pmatrix} : p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\}. \tag{29}$$

Ciertamente, pues se tiene de (28) que $\langle e_n(x), J_0 p(x)\rangle = \langle J_0 e_n(x), p(x)\rangle = b_{n-1} p_{n-1}$, por lo que el lado derecho de (18) implica (29).

Además, se sigue del teorema 13 que todas las extensiones autoadjuntas de J están en correspondencia unívoca con $\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y estás vienen dadas por

$$J_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} p(x) \\ J_0 p(x) + \tau p_n e_n(x) \end{pmatrix} : p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}\,, \tag{30}$$

las cuales son transformaciones lineales, mientras que

$$J_\infty = J \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\},$$

es una relación que no es transformación lineal.

Observación 7. El dominio de las transformaciones lineales (29) y (30) es $\mathbb{C}_n[x]$ y estás actúan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (J^*)_{\mathrm{o}} p(x) &= J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x)\,;\\ J_\tau p(x) &= J_0 p(x) + \tau p_n e_n(x)\,, \quad (\tau \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{31}$$

lo que implica que son perturbaciones unidimensionales de J_0. Además, las representaciones matriciales de (31) son

$$(32)\quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \tau \end{pmatrix},$$

respectivamente. Es claro que la matriz derecha de (32) (que representa a J_τ) extiende la representación matricial de J mostrada en (3).

AGRADECIMIENTOS. Trabajo parcialmente apoyado por los proyectos CONACYT-México CBF2023-2024-1842 y UAM-DAI 2024: "Enfoque Analítico-Combinatorio y su Equivalencia de Estados Gaussianos". El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por su atenta lectura, comentarios y recomendaciones sobre el manuscrito.

Referencias

[1] Richard Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23. MR 0123188 (23 #A517)
[2] Rajendra Bhatia, *Matrix analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 169, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1477662
[3] ———, *Positive definite matrices*, paperback ed., Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR 3443454
[4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)
[5] Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada, and Josué I. Rios-Cangas, *Elementos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **14** (2023), no. 1, 143–222.
[6] Earl A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134. MR 0477855
[7] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacific J. Math. **54** (1974), 71–100. MR 0361889 (50 #14331)
[8] Seppo Hassi and Henk de Snoo, *One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), no. 1, 123–164. MR 1430397 (97m:47025)
[9] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Corrected reprint of the 1991 original. MR 1288752
[10] ———, *Matrix analysis*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013. MR 2978290
[11] Josué I. Rios-Cangas, *Operadores Simétricos Multivaluados y el Problema de Momentos de Hamburger Truncado*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **12** (2021), no. 1, 33–45.
[12] Josué I. Rios-Cangas and Luis O. Silva, *Dissipative extension theory for linear relations*, Expo. Math. **38** (2020), no. 1, 60–90. MR 4082306
[13] John von Neumann, *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950. MR 0034514

Josué I. Rios Cangas
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-7758-7362`
e-mail: `jottsmok@xanum.uam.mx`

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 45-60.
Recibido 12-01-2024. Aceptado 02-06-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/rohepebu



LA CURVA DE FARGUES–FONTAINE: UNA MOTIVACIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE GALOIS p-ÁDICAS

JORGE ALBERTO ROBLES HERNANDEZ
J.R. PÉREZ-BUENDÍA

Resumen. Este artículo proporciona una revisión comprensiva sobre la curva de Fargues-Fontaine, una pieza central en la teoría de Hodge p-ádica, y su papel crucial en la clasificación de las representaciones de Galois p-ádicas. Nos enfocamos en sintetizar los desarrollos fundamentales en torno a esta curva, subrayando cómo conecta conceptos avanzados de geometría aritmética con la teoría práctica de representaciones. Analizamos en detalle los anillos de periodos de Fontaine $(B_{cris}, B_{st}, B_{dR})$, abordando sus propiedades algebraicas y aritméticas esenciales, y cómo estos anillos contribuyen a la construcción y definición de la curva. Además, exploramos la teoría de las representaciones de Galois p-ádicas admisibles y discutimos cómo, una vez definida la curva, esta se relaciona con la teoría de Harder-Narasimhan. Este trabajo no solo destaca la importancia de la curva de Fargues-Fontaine en el contexto contemporáneo, sino que también pone de relieve su papel en la formación académica y en investigaciones futuras en el ámbito de la geometría aritmética en México y Latinoamérica.

1. Introducción

La geometría aritmética ha experimentado un notable auge en los últimos años, en gran parte gracias al empleo de métodos p-ádicos. En este contexto, la curva de Fargues–Fontaine se destaca como una entidad de profundo interés. En este artículo, abordamos una introducción a esta fascinante curva, que se puede entender como un análogo en geometría aritmética p-ádica de la esfera de Riemann, lo que abre un abanico de nuevas perspectivas y temas de investigación.

La curva de Fargues–Fontaine, descubierta en 2009 por los matemáticos franceses Laurent Fargues y Jean-Marc Fontaine, surgió de un intercambio de correos electrónicos y una serie de conferencias en Trieste, Italia. Pierre Colmez documenta este emocionante proceso en [14]. El descubrimiento se inició con una discusión sobre un artículo de Berger [13], que afirmaba que el anillo de períodos B_e (definido más adelante) era un anillo de Bézout. Fontaine, escéptico ante esta afirmación, profundizó en la investigación y llegó a la sorprendente conclusión de que era un anillo de ideales principales. Esta revelación marcó el inicio de una serie de preguntas formuladas por Fontaine a Colmez y Fargues, cuyas respuestas dieron lugar a una inesperada conexión con la teoría de filtraciones de Harder-Narasimhan en el contexto p-ádico. Esta relación fundamental condujo al descubrimiento de la curva de Fargues–Fontaine, revelando una conexión crucial con la teoría de Harder-Narasimhan y las representaciones de Galois p-ádicas.

El propósito de este artículo es proporcionar una base para futuros estudios en este emocionante campo matemático. Entre las investigaciones relevantes se incluyen aquellas sobre superficies K3 p-ádicas, realizadas por diversos grupos de investigación en México [9] y [10], así como la tesis doctoral del segundo autor [8]. Como parte de nuestro compromiso con la educación en esta área y nuestro interés en fortalecer el

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11F85, 11S15, 11S20, 11F80.
Palabras clave. Curva de Fargues-Fontaine, Geometría Aritmética, Representaciones de Galois p-ádicas, Anillos de Periodos, Teoría de Hodge p-ádica.

grupo de trabajo en Geometría Aritmética en México y Latinoamérica, hemos impartido cursos de posgrado y escuelas CIMPA [1], así como supervisado investigaciones de tesis, incluyendo la actual del primer autor de este artículo. Más información sobre estos cursos se encuentra en la página web del segundo autor [11].

La intención de este artículo es la de servir como una revisión introductoria y sentar las bases para futuros estudios. Nos centramos en una revisión de la construcción de la curva de Fargues–Fontaine y su conexión con las representaciones de Galois y la teoría de Harder-Narasimhan, un paso fundamental en la comprensión de este fascinante objeto matemático.

La estructura del artículo es la siguiente: En la sección 2, presentamos la notación y la información preliminar que se utilizará a lo largo del texto. En la sección 3, ofrecemos una introducción a la idea de Fontaine sobre la clasificación de representaciones de Galois p-ádicas. La sección 4 se dedica a la definición de los anillos de períodos y destaca sus propiedades algebraicas y aritméticas clave. En la sección 5, profundizamos en el papel de los anillos de períodos en la clasificación de las representaciones de Galois p-ádicas. La sección 6 aborda la construcción de la curva de Fargues-Fontaine, utilizando analogías con las ideas de construcción de la esfera de Riemann. En la sección 7, describimos la conexión entre las fibras vectoriales de la curva de Fargues-Fontaine y las representaciones de Galois p-ádicas a través del teorema de Harder-Narasimhan. Finalmente, el Epílogo propone una reflexión sintética sobre la arquitectura de los anillos de períodos y su función como puentes entre la aritmética, la geometría y el análisis p-ádico. Asimismo, se esbozan posibles direcciones de investigación futura, como el estudio de sistemas dinámicos racionales sobre la curva de Fargues-Fontaine.

2. Notación y Preliminares

Sea p un primo fijo. El campo de los números p-ádicos (denotado como $\mathbb{Q}_p$) se puede definir como sigue: Para $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, sea $v_p(a)$ la máxima potencia de p que divide al entero a. Extendiendo esto a $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definimos $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$. Así podemos definir una norma en $\mathbb{Q}$ como

$$|\tfrac{a}{b}|_p = \tfrac{1}{p^{v_p(\frac{a}{b})}}, \quad |0|_p = 0.$$

Dicha norma induce una distancia en $\mathbb{Q}$ la cual no es completa (no toda sucesión de Cauchy converge). Al completar $\mathbb{Q}$ con respecto a esta distancia se obtiene el campo $\mathbb{Q}_p$, también llamado el campo de los números racionales p-ádicos.

Denotamos por K a una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros, m_K su único ideal maximal y $k := \mathcal{O}_K/m_K$ su campo residual. Denotamos por $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ a la máxima extensión no ramificada [7] de $\mathbb{Q}_p$ dentro de K. Fijamos una cerradura algebraica $\overline{K}$ de K y sea $G_K = Gal(\overline{K}/K)$ su grupo de Galois absoluto. Notar que $\overline{K}$ es también una cerradura algebraica de $\mathbb{Q}_p$. Sea K_0^{nr} la extensión maximal no ramificada de K_0 en $\overline{K}$. Análogamente definimos a $K^{nr} \subseteq \overline{K}$. Como K_0 es no ramificado sobre $\mathbb{Q}_p$, K_0^{nr} es la extensión máxima no ramificada de $\mathbb{Q}_p$ en $\overline{K}$ y por lo tanto también es independiente de K.

Denotemos por $\mathbb{C}_p$ a la completación $p-$ádica de $\overline{K}$ y por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ a su anillo de enteros. Fijamos $\pi \in m_K$ al parámetro uniformizador de K, es decir, un generador del ideal principal m_K.

Se dirá que un campo K de característica p es perfecto si el morfismo de Frobenius es un isomorfismo.

3. La idea de Fontaine.

Desde finales de la década de 1970, J.M. Fontaine desarrolló un programa destinado a clasificar y describir las $\mathbb{Q}_p$-representaciones del grupo de Galois absoluto, G_K, de una extensión finita de los racionales p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, i.e., los $\mathbb{Q}_p$-espacios vectoriales de dimensión finita dotados de una acción $\mathbb{Q}_p-$lineal continua de G_K [19].

La estrategia de Fontaine parte de la siguiente observación: si tenemos un anillo topológico B, dotado de una acción continua de G_K y estructuras adicionales estables bajo la acción de G_K, podemos asociar a cualquier representación V de G_K un invariante $D_B(V) := (B \otimes V)^{G_K}$ de $B \otimes V$.

Entonces $D_B(V)$ es un B^{G_K}–módulo equipado con estructuras adicionales heredadas de B, y que es a menudo más fácil de describir que la representación V de la que partimos. El anillo B permite descomponer la subcategoría de B-representaciones admisibles (aquellas para los cuales $B \otimes V$ es trivial, i.e., isomorfa a $B^{\dim V}$, como G_K-representación). Tales anillos topológicos B son los llamados anillos de periodos de Fontaine. A continuación presentamos la construcción de dichos anillos así como de algunas de sus propiedades.

4. Teoría de Hodge p-ádica

La teoría de Hodge p-ádica, como lo describe [22], puede verse desde dos puntos de vista: el aritmético y el geométrico.

Desde el punto de vista aritmético, es el estudio de las representaciones de Galois p-ádicas, es decir, representaciones continuas $G_K \to Gl_n(\mathbb{Q}_p)$ donde K es extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Específicamente, esta teoría busca construir un diccionario que relacione buenas categorías de representaciones de G_K con categorías de objetos algebraicos semilineales. Un ejemplo de esto es el estudio de los módulos de Tate de una curva elíptica sobre K (que son representaciones de G_K) con buena reducción junto con los llamados isocristales (es decir, $\mathbb{Q}_p$-espacios vectoriales de dimensión finita equipados con un automorfismo de Frobenius semilineal).

Desde el punto de vista geométrico, la teoría de Hodge p-ádica es el estudio de la geometría de una variedad (suave) X sobre un campo p-ádico K. En particular estamos interesados en varias teorías de cohomología relacionadas a X como la cohomología étale $(H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, la cohomología de De Rham $(H^n_{dR}(X, K))$ y la cohomología cristalina $(H^n_{cris}(X, K))$. Uno de los resultados mas relevantes de esta teoría es derivado del caso clásico en $\mathbb{C}$ sobre la descomposición de Hodge de una variedad suave Y:

$$H^n(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(Y, \Omega^j_Y).$$

Tate observó que existía una descomposición análoga para la cohomología étale de una variedad abeliana sobre K con buena reducción, lo que lo llevo a conjeturar (y tiempo después Faltings lo demostraría) la descomposición de Hodge-Tate [2] :

$$H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega^j_{X/K}) \otimes_K \mathbb{C}_K(-j),$$

donde X es una variedad suave sobre K y es un isomorfismo de representaciones de Galois p-ádicas $Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

En este sentido, Fontaine realiza una serie de conjeturas, ahora teoremas, conocidos como teoremas de comparación en donde relaciona a las distintas cohomologías de la variedad, siendo necesario extender los coeficientes a los llamados anillos de periodos de Fontaine.

Teorema 1. [2] *Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ y X una variedad proyectiva lisa definida sobre K. Existen isomorfismos naturales:*

- $H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \cong H^i_{cris}(X) \otimes_{K_0} B_{cris}$.
- $H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st} \cong H^i_{HK}(X) \otimes_{K_0} B_{st}$.
- $H^n_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \cong H^i_{dR}(X) \otimes_K B_{dR}$.

que conmutan con las acciones de G_K, Frobenius, N (monodromía) y respectivas filtraciones. Aquí H^i_{HK} denota la cohomología de Hyodo-Kato.

En esta sección nos centraremos en estudiar los anillos de periodos, en particular, mostraremos sus construcciones y las propiedades aritméticas y algebraicas que nos

servirán para la construcción de la curva de Fargues-Fontaine. En el presente texto no se estudiará la relación con las cohomologías como en el teorema 1. Para el lector interesado en este aspecto puede consultar [19].

4.1. Anillos de Periodos. En geometría algebraica, la palabra periodo se suele referir a un número complejo que puede ser expresado como integral de una función algebraica sobre un dominio algebraico [18]. Uno de ellos es $2i\pi = \int_\gamma \frac{dt}{t}$, donde γ es el círculo unitario en el plano complejo. La teoría de Hodge p-ádica nos permite diseñar un análogo p-ádico de los periodos, trabajo que realizó Fontaine creando anillos específicos [5, 3, 6, 4], los cuales además están estrechamente relacionados con distintos tipos de cohomologías. Estos anillos forman parte fundamental en la construcción de la curva de Fargues-Fontaine y las representaciones de Galois p-ádicas.

En esta sección se dará una introducción a los anillos de periodos como en [23], en particular estudiaremos a los anillos B_{cris}, B_{st} y B_{dR}, sus respectivas construcciones y algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas.

4.1.1. El anillo B^+_{inf}. Denotemos como ϕ el morfismo de Frobenius $x \mapsto x^p$ actuando en el cociente $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ y notemos que ϕ es un homomorfismo de anillos. Sea R el límite del sistema proyectivo de anillos:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\ \phi\ } \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\ \phi\ } \cdots \xleftarrow{\ \phi\ } \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \cdots,$$

Específicamente, un elemento de R es una sucesión $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ de elementos en $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$, que satisfacen la propiedad de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n,\ \ \forall n \geq 0$. R es un anillo perfecto de característica p.

El anillo R está equipado con una valuación v_b que se definirá a continuación: notemos que si $x \in \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\backslash\{0\}$, la valuación p–ádica de $\widehat{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ no depende del levantamiento $\widehat{x}$ de x. La valuación $v_p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \to \mathbb{Q}$ induce una función bien definida en el cociente $v_p : \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, donde $v_p(0) = +\infty$. Así, para $\zeta = (\zeta_n)_{n\geq 0}$ en R definimos

$$v_b(\zeta) := \lim_{n\to\infty} p^n v_p(\zeta_n).$$

La condición de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ Implica que la sucesión $(p^n v_p(\zeta_n))_{n\geq 0}$ es eventualmente constante y el límite está bien definido.

A continuación se hará uso de una estructura algebraica conocida como el anillo de vectores de Witt y cuya idea es la de construir extensiones no ramificadas.

Definición 2. Definimos como $A_{inf} = W(R)$ donde $W(-)$ es el funtor de vectores de Witt y $B^+_{inf} = A_{inf}\left[\frac{1}{p}\right] = W(R)\left[\frac{1}{p}\right]$, la localización de A_{inf} en p. [1]

Para $x \in R$, definimos el representante de Teichmüller en A_{inf} como $[x] = (x, 0, \cdots, 0, \cdots)$. Dado que R es de valuación discreta, todo elemento de A_{inf} puede ser escrito de manera única como

$$\sum_{i\geq 0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R.$$

De manera similar, todo elemento de B^+_{inf} se puede escribir de manera única de la forma

$$\sum_{i\geq i_0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R,$$

donde i_0 puede ser negativo y depende de x.

Además, B^+_{inf} cuenta con estructuras adicionales:

[1] Para una breve motivación sobre el rol de A_{inf} y B^+_{inf}, véase la Sección 8.

- B_{inf}^+ tiene una acción de Frobenius φ dado por:

$$\varphi\Big(\sum_{i=i_0}^{\infty}[\zeta_i]p^i\Big)=\sum_{i=i_0}^{\infty}[\zeta_i^p]p^i,\qquad \zeta_i\in R,\ \ i_0\in\mathbb{Z}.$$

- B_{inf}^+ está equipado con una acción de G_K dado por:

$$g\Big(\sum_{i=i_0}^{\infty}[\zeta_i]p^i\Big)=\sum_{i=i_0}^{\infty}[g\zeta_i]p^i,\qquad \zeta_i\in R,\ \ i_0\in\mathbb{Z},\ \ \forall g\in G_K.$$

Fijamos ϵ_1 una raíz primitiva p–ésima de la unidad en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Escojamos a ϵ_2 como raíz primitiva p–ésima de ϵ_1. Entonces ϵ_2 es raíz primitiva p^2–ésima de la unidad. Repitiendo este proceso, construimos elementos $\epsilon_3,\epsilon_4,...\in\mathcal{O}_{\overline{K}}$ tales que $\epsilon_{n+1}^p=\epsilon_n,\ \ \forall n\geq 0$. Sea $\overline{\epsilon}_n\in\frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ la clase de ϵ_n. Por la propiedad de compatibilidad, $\underline{\epsilon}=(1,\overline{\epsilon}_1,\overline{\epsilon}_2,...)\in R$. De manera similar, escogemos una sucesión (p_n) en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ de p^n-raíces de p, esto es, $p_1^p=p$ y $p_{n+1}^p=p_n$ para todo $n\geq 1$. Así, definimos en R al elemento $p^b=(0,\overline{p}_1,\overline{p}_2,..)$, donde $\overline{p}_i\in\frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$.

A continuación definiremos una topología p-ádica en B_{inf}^+: Primero en A_{inf} definimos una topología débil, donde si

$$x_n=\sum_{i=0}^{\infty}[\zeta_{i,n}]p^i\in A_{inf}\quad\text{y}\quad x=\sum_{i=0}^{\infty}[\zeta_i]p^i\in A_{inf},$$

se tiene que $x_n\to x$ si $\zeta_{i,n}\to\zeta_i$ para todo índice $i\in\mathbb{N}$. Esta topología en A_{inf} induce en el subconjunto $p^{-\nu}A_{inf}$ de B_{inf}^+ una topología para todo ν y así, en B_{inf}^+ definimos la topología dada por $B_{inf}^+=\bigcup_{\nu\geq 0}p^{-\nu}A_{inf}$.

Definición 3. Para $\zeta=(c_0,c_1,...)\in R$, definimos $\zeta^\sharp=\lim_{n\to\infty}\widehat{c_n}^{\,p^n}$, donde $\widehat{c_n}$ es un levantamiento de c_n en $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

La función $\sharp:R\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p},\ \ \zeta\mapsto\zeta^\sharp$ es inyectiva y multiplicativa. Por las propiedades de los vectores de Witt, esta función se extiende a un homomorfismo inyectivo de $\widehat{K}_0^{ur}-$álgebras $\theta:B_{inf}^+\to\mathbb{C}_p$ que conmuta con la acción de G_K. Está dado por

$$\sum_{i=i_0}^{\infty}[\zeta_i]p^i\longmapsto\sum_{i=i_0}^{\infty}\zeta_i^\sharp p^i,\ \ i_0\in\mathbb{Z},\ \ \zeta_i\in R.$$

La siguiente proposición nos dice que el kernel de θ es principal y nos muestra explícitamente a un generador del mismo.

Proposición 4 ([23], Lema:3.1.5). *Sea $z\in A_{inf}$ elemento tal que $\theta(z)=0$ y $v_b(z\ (\text{mód } p))=1$. Entonces z genera $A_{inf}\cap\ker\theta$ como ideal de A_{inf}. En particular, el elemento*

$$\omega=\frac{[\underline{\epsilon}]-1}{[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]-1}=[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]+[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^2+\cdots+[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^{p-1},$$

satisface las condiciones.

4.1.2. El anillo B_{cris}. Para definir el anillo B_{cris} necesitamos tener la noción de elementos de la forma $\frac{x^n}{n!}$ y para ello daremos un breve preámbulo a las llamadas potencias divididas. Se considerará $0!=1$.

Definición 5. Sea A un anillo (conmutativo con unidad), I un ideal A. Una colección de aplicaciones $\gamma_n:I\to I,\ \ n\geq 0$ y $\gamma_0:I\to A$ definido como $\gamma_0(x)=1$, es llamado una estructura de potencias divididas en I si para todos $n\geq 0, m>0, x,y\in I$ y $a\in A$ se tiene:

1) $\gamma_1(x)=x$
2) $\gamma_n(x)\gamma_m(x)=\dfrac{(n+m)!}{n!m!}\gamma_{n+m}(x)$.

3) $\gamma_n(ax) = a^n\gamma_n(x)$.
4) $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n}\gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y)$.
5) $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \dfrac{(nm)!}{n!(m!)^n}\gamma_{nm}(x)$.

Notemos que $\frac{(n+m)!}{n!m!} = \binom{n+m}{n} \in \mathbb{Z}$ y además, $\frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \in \mathbb{Z}$ ya que cuenta el número de maneras de dividir un grupo de nm objetos en n grupos de m elementos.

LEMA 6. *Sea A un anillo, I un ideal de A. Si γ es una estructura de potencias divididas en I, entonces $n!\gamma_n(x) = x^n$ para todo $n \geq 1$ y $x \in I$.*

Este lema se puede demostrar por inducción. Así, en el anillo A tendríamos la noción de dividir entre $n!$, cuestión que no siempre es posible si $char(A) > 0$.

Volviendo a los anillos de periodos, dado $x \in A_{inf} = W(R)$ denotamos como $A_{inf}\langle x\rangle$ la sub A_{inf}–álgebra de B^+_{inf} generada por los elementos $\frac{x^n}{n!}$ [23]

Definición 7. Definimos A_{cris} como la completación p–ádica de $A_{inf}\langle z\rangle$, donde z es un generador de $A_{inf} \cap \ker\theta$. Denotamos por $B^+_{cris} = A_{cris}\left[\frac{1}{p}\right]$ a la localización en p de A_{cris}.[2]

Observación 1. La construcción de A_{cris} a partir de $A_{inf}\langle z\rangle$ mediante potencias divididas (Definición 5) y completación p-ádica merece un comentario. Una pregunta natural es por qué se recurre a las potencias divididas y por qué no se trabaja directamente con A_{inf} o se invierte p desde un inicio.

Si bien A_{inf} es de característica cero, p no es una unidad en este anillo (la invertibilidad de p se introduce al pasar a $B^+_{inf} = A_{inf}[\frac{1}{p}]$, ver Definición 2). La estructura de potencias divididas $\gamma_n(x)$ proporciona un análogo formal de $x^n/n!$ sin asumir que $n!$ sea invertible (Lema 6). Esto es crucial porque permite la existencia de elementos como $t = \log([\underline{\epsilon}])$ presentada en ecuación (1) (cuya serie involucra divisiones por enteros), dentro de un anillo p-ádicamente completo y asegura que el endomorfismo de Frobenius φ se extienda de manera controlada desde A_{inf}. Esta extensión es vital para las propiedades de A_{cris} y su rol en la teoría.

Preservar A_{cris} como un anillo donde p no es invertible es esencial para mantener una fina estructura p-ádica y la conexión con la cohomología cristalina, fundamental en los teoremas de comparación (Teorema 1). Invertir p prematuramente, para trabajar en B^+_{inf}, trivializaría aspectos de esta estructura p-ádica antes de que A_{cris} pueda cumplir su función como un *puente* en la Teoría de Hodge p-ádica. Para una discusión más profunda sobre estos anillos, se puede consultar [19] o [23].

Como ω es un generador de $A_{inf} \cap \ker\theta$, se tiene que $A_{cris} = \widehat{A}_{inf}\langle\omega\rangle$, donde $\widehat{\ }$ denota la completación p–ádica. Otro generador de $A_{inf} \cap \ker\theta$ también es el elemento $[p^b] - p$.

El siguiente lema nos da una condición sobre cuándo cualesquiera dos elementos en A_{inf} producen la misma sub A_{inf}-álgebra generada por las potencias divididas.

LEMA 8. *Si $x, y \in A_{inf}$, $x \equiv y \pmod{pA_{inf}}$ entonces $A_{inf}\langle x\rangle = A_{inf}\langle y\rangle$.*

Usando el lema, se tendría que $A_{cris} = \widehat{A}_{inf}\langle[p^b]\rangle$.

Como A_{cris} está definida como completación p–ádica es natural equipar A_{cris} y B^+_{cris} con la topología p–ádica. Con esta topología, la inclusión $A_{inf} \hookrightarrow A_{cris}$ es continua al igual que la inclusión $B^+_{inf} \hookrightarrow B^+_{cris}$.

Frobenius se extiende canónicamente a un endomorfismo $A_{cris} \to A_{cris}$, ya que $A_{inf}\langle[p^b]\rangle$ es estable bajo Frobenius. En efecto,

$$\varphi\left(\frac{[p^b]^n}{n!}\right) = [p^b]^{np-n}\varphi\left(\frac{[p^b]^n}{n!}\right).$$

[2]Para una breve motivación sobre el rol de A_{cris} y B^+_{cris}, véase la Sección 8.

Invirtiendo p se obtiene Frobenius para B^+_{cris}. Análogamente, G_K extiende la acción a B^+_{cris}.

A_{cris} contiene un periodo para el caracter ciclotómico, i.e., un elemento en el cual Galois actúa por multiplicación por χ, el caracter ciclotómico. Este elemento es

$$t = log([\underline{\epsilon}]) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{([\underline{\epsilon}]-1)^i}{i}. \tag{1}$$

Frobenius actúa como $[\underline{\epsilon}] \mapsto [\underline{\epsilon}]^p$ y G_K actúa como $g[\underline{\epsilon}] = [\underline{\epsilon}]^{\chi(g)}$, $g \in G_K$. Tomando logaritmos, $\varphi(t) = pt$ y $gt = \chi(g)t$, $\forall g \in G_K$. Así, t es un periodo del caracter ciclotómico.

4.1.3. El anillo B_{dR}.

Definición 9. Definimos B^+_{dR} como la completación de B^+_{inf} respecto a la topología $(\ker\theta)$–ádica, es decir

$$B^+_{dR} = \varprojlim_m \frac{B^+_{inf}}{(\ker\theta)^m}.$$

Como B^+_{dR} está definido como una completación, la topología natural en este anillo es la topología $(\ker\theta)-$ádica. También podemos extender la función θ a B^+_{dR} con la composición $B^+_{dR} \to B^+_{inf}/\ker\theta \to \mathbb{C}_p$ y a esta extensión la denotaremos como θ_{dR}. Así, B^+_{dR} tiene una filtración dada por $Fil^m B^+_{dR} = (\ker\theta_{dR})^m$.

Una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de elementos en B^+_{dR} converge a $x \in B^+_{dR}$ si y sólo si para todo m, la sucesión $\{x_n \pmod{Fil^m B^+_{dR}}\}$ es eventualmente constante.

Definición 10. Definimos el anillo $B_{dR} = B^+_{dR}[\frac{1}{t}]$.[3]

Como B^+_{dR} es un anillo de valuación discreta con uniformizador t, se tiene que B_{dR} es el campo de fracciones de B^+_{dR}, es decir, este anillo es de hecho un campo.

La filtración de De Rham se extiende a B_{dR} : $Fil^m B_{dR} = t^m B^+_{dR}$, $m \in \mathbb{Z}$. Para más información se recomienda consultar al lector [3], [6], [23].

5. Representaciones de Galois p-ádicas

Una vez que hemos construído los anillos de periodos, regresamos a la idea de Fontaine para clasificar las representaciones de Galois p-ádicas. En esta sección se hablará primero de la B-admisibilidad de una representación para luego dar paso a un ejemplo concreto: cómo el anillo de periodos B_{dR} nos dará más información sobre la representación. La bibliografía que se seguirá en esta sección es [19].

5.1. Representaciones admisibles. Sea F un campo y G un grupo. Sea B una F–álgebra, dominio equipado con una G–acción (como F–álgebra) y asuma que la sub F–álgebra $E = B^G$ es un campo.

No se imponen estructuras topológicas en B, F o G. El objetivo es usar a B para construir un funtor de representaciones F-lineales de G de dimensión finita a E–espacios vectoriales de dimensión finita equipados con estructuras adicionales que dependen de B.

Sea $C = Frac(B)$ y G actúa en C de manera natural, i.e., $g(\frac{a}{b}) = g(a)g(b^{-1})$.

Definición 11. Decimos que B es (F,G)–regular si $C^G = B^G (= E)$ y si para todo $b \in B\backslash\{0\}$ cuyo espacio generado F–lineal Fb es G–estable se tiene que b es unidad en B.

Notemos que si B es un campo, entonces es (F,G)–regular.

[3]Para una breve motivación sobre el rol de B^+_{dR} y B_{dR}, véase la Sección 8.

Definición 12. Si B es un dominio (F,G)–regular y E denota el campo $C^G = B^G$, entonces para cualquier objeto $V \in Rep_F(G)$ de G representaciones F–lineales de dimensión finita definimos

$$D_B(V) := (B \otimes_F V)^G,$$

es decir, $D_B(V)$ es un E–espacio vectorial equipado con un mapeo canónico.

$$\alpha_V : B \otimes_E D_B(V) \to B \otimes_E (B \otimes_F V) = (B \otimes_E B) \otimes_F V \to B \otimes_F V.$$

Definición 13. Si se tiene la igualdad $\dim_E D_B(V) = \dim_F(V)$ se dirá que V es una representación B–admisible.

El siguiente teorema nos indica que el E-espacio vectorial $D_B(V)$ es de hecho de dimensión finita y que al restringirnos a las representaciones B-admisibles, se tiene un funtor exacto y fiel.

Teorema 14. *Fijamos V como antes.*

i) *El mapeo α_v es siempre inyectivo y $\dim_E D_B(V) \leq \dim_F V$. La igualdad se da y si sólo si α_V es un isomorfismo.*
ii) *Sea $Rep_F^B(G) \subseteq Rep_F(G)$ la subcategoría de representaciones B–admisibles. El funtor contravariante $D_B : Rep_F^B(G) \to Vec_E$ es exacto y fiel.*

En particular, considerando a K un campo p–ádico, i.e., extensión finita de $\mathbb{Q}_p$, $F = \mathbb{Q}_p$, $G = Gal(\overline{K}/K)$ y V representación B-admisible, tenemos que:

- Si $B = B_{dR}$, se dice que la representación es de De Rham.
- Si $B = B_{cris}$, se dice que la representación es cristalina.
- Si $B = B_{st}$, se dice que la representación es semiestable.

5.2. Representaciones de De Rham. Analizaremos un poco más a detalle las representaciones de De Rham. Como B_{dR} es $(\mathbb{Q}_p, G_K)$–regular con $B_{dR}^{G_K} = K$, la formalización general de representaciones admisibles provee de una buena clase de representaciones p-ádicas, los que son B_{dR}-admisibles.

Definición 15. Definimos el funtor covariante $D_{dR} : Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to Vec_K$ a la categoría de K–espacios vectoriales de dimensión finita como $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. En el caso que $dim_{B_{dR}}(V) = dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ diremos que V es una representación de De Rham.

El espacio $D_{dR}(V)$ tiene estructuras K-lineales adicionales (que vienen de la estructura adicional de la K-álgebra B_{dR}), específicamente una filtración K-lineal que surge de la filtración K–lineal en el campo de fracciones B_{dR} del anillo de valuación discreto completo B_{dR}^+ sobre K.

Concretamente, para $V \in Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, el K-espacio vectorial $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \in Vec_K$ tiene estructura natural de objeto en Fil_K : Como B_{dR} tiene una filtración K–lineal, G_K estable dado por $Fil^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^+$, obtenemos una filtración K–lineal, G_K–estable $\{Fil^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\}$ en $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ y este induce una filtración en $D_{dR}(V)$ de elementos G_K–invariantes, explícitamente

$$Fil^i(D_{dR}(V)) = (t^i B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

6. Construcción de la Curva de Fargues-Fontaine.

La curva de Fargues–Fontaine es un objeto de la teoría de números descubierta en 2009 por Laurent Fargues y Jean Marc–Fontaine, donde en su geometría codifica mucha información sobre la aritmética de los números p–ádicos. Se ha convertido rápidamente en un tema de investigación en la teoría de Hodge p-ádica y el programa de Langlands.

En esta sección motivamos la definición de la curva usando una analogía con la esfera de Riemann. Luego, construimos la curva desde dos puntos de vista distintos,

uno desde el punto de vista del álgebra conmutativa y otro desde los espacios de Tilts y Untilts [17, 21].

6.1. La esfera de Riemann. Para motivar la definición de la curva, analizaremos una curva más familiar, la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, a la cual le podemos asociar anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$.

- Primero, el anillo de funciones meromorfas sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sin polos fuera del punto al infinito es el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$, donde z denota el parámetro local habitual en el origen.
- Mirando los desarrollos de Laurent en el punto al infinito de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ encontramos el anillo $\mathbb{C}((\frac{1}{z}))$, donde $\frac{1}{z}$ es un parámetro local para el punto al infinito.

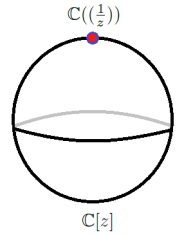


FIGURA 1. Esfera de Riemann.

Recíprocamente, podemos reconstruir la esfera de Riemann a partir de los anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$ [17]. Más precisamente, cada punto x de la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ puede asociarse unívocamente con un subespacio de dimensión uno l_x (una línea) dentro del espacio de funciones de grado ≤ 1, que es $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}z$. Si consideramos la línea afín $\mathbb{C}$ (identificada con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ menos un punto), un punto $x = z_0 \in \mathbb{C}$ se asocia con la línea l_{z_0} de funciones $f(z) = a(z - z_0)$ que se anulan en z_0. Para el punto al infinito, $x = \infty$, la línea l_∞ correspondería al espacio de funciones constantes $f(z) = a$. Toda esta correspondencia puede expresarse de manera más unificada utilizando coordenadas homogéneas. Si un punto $x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ se representa por $[X_0 : X_1]$, y el espacio de funciones de grado ≤ 1 se ve como el espacio de formas lineales $\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1 = \{aZ_0 + bZ_1 \mid a, b \in \mathbb{C}\}$, entonces l_x es el subespacio de dichas formas que se anulan en $[X_0 : X_1]$ (es decir, $aX_0 + bX_1 = 0$). Esta condición define una línea de soluciones para (a, b). Así, tenemos la correspondencia general:

$$x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \quad \leftrightsquigarrow \quad l_x \subseteq \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1.$$

Esta identificación entre puntos y líneas de funciones es la que se busca replicar para la curva de Fargues-Fontaine.

Más aún, si

$$S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{C}[z] \mid \deg f \leq k\},$$

entonces $Proj(S) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.[4]

Partiendo de esta analogía, la curva de Fargues-Fontaine se construye utilizando los anillos $B_e \subseteq B_{dR}$ (donde $B_e := B_{cris}^{\varphi=1}$ denota los puntos fijos bajo la acción de Frobenius en B_{cris}) en el contexto p-ádico.

A esta curva la denotaremos como X^{FF}. Concretamente, Fargues y Fontaine demostraron que [14]:

[4]Estrictamente, la construcción $Proj$ se aplica a anillos graduados donde S_0 es un campo y S es generado por S_1 como S_0-álgebra, y S_k son las componentes homogéneas de grado k. La forma estándar es $S = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]$, donde $S_k = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_k$. El anillo S definido en el texto está relacionado con el anillo de secciones globales $S' = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(k))$, donde $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(k))$ es isomorfo a S_k. Se tiene $Proj(S') \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Para una referencia general sobre $Proj$ y estos resultados, ver por ejemplo [24, Capítulo II, Secciones 2 y 7].

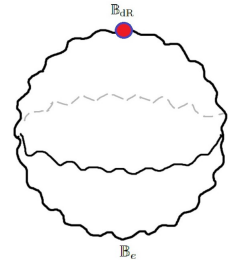


FIGURA 2. Representación artística de la curva de Fargues–Fontaine [17].

TEOREMA 16 (FF). *Existe un esquema regular, noetheriano, conexo, separado de dimensión uno, X^{FF}, sobre $\mathbb{Q}_p$; tal que tiene un punto al infinito y, el anillo de funciones meromorfas sin polos fuera del infinito es el anillo B_e.*

En este caso, si $S = \bigoplus_{k\geq 0}\{f \in B_e \mid \deg f \leq k\}$, entonces la curva de Fargues-Fontaine se define como $X^{F\overline{F}} = Proj(S)$.

En esta construcción algebraica vía $Proj(S)$ [14, Sección 10.1], cada punto x de la curva X^{FF} corresponde, por definición, a un cierto ideal primo homogéneo relevante del anillo graduado S. Este ideal, a su vez, permite identificar un subespacio de dimensión uno, l_x, dentro del espacio de funciones de grado 1 en B_e (es decir, la componente S_1 del anillo graduado). Así, de manera análoga al caso de la esfera de Riemann, se establece una biyección fundamental entre los puntos de la curva y estas *líneas* de funciones, como se afirma en el Teorema 16:

$$x \in X^{FF} \quad \leftrightsquigarrow \quad l_x = \{f \in B_e \mid \deg f \leq 1\}.$$

Esta correspondencia nos permite interpretar B_e como un anillo de funciones sobre el objeto geométrico X^{FF}.

6.2. Otro punto de vista: Tilts y Untilts. A continuación presentamos otra forma de construir la curva de Fargues-Fontaine mediante lo llamados tilts y untilts. Esta sección está basada en la sección 2.1 de [16].

Sea C un campo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{Q}_p$ y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}_p$. (Un ejemplo es $\mathbb{C}_p$, los complejos p-ádicos).

Definición 17. El tilt $F = C^\flat$ de C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{F}_p$ y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial $|\cdot|_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Como conjunto,

$$C^\flat = \{(a_0, a_1, ...) \mid a_i \in C \text{ y } a_i^p = a_{i-1}\}$$

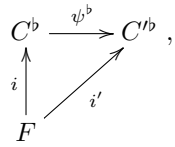
La multiplicación se define término a término y la suma como $(a_0, a_1, ...)+(b_0, b_1, ...) = (c_0, c_1, ...)$, donde

$$c_i := \lim_{i\leq n\to\infty} (a_n + b_n)^{p^{n-i}}.$$

Recíprocamente, sea F con las hipótesis de la definición de tilt.

Definición 18. Un untilt de F es un par (C, i), donde C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{Q}_p$ y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}_p$ e $i : F \to C^\flat$ es un isomorfismo de campos valuados.

Decimos que dos untilts $(C,i),(C',i')$ son equivalentes si existe un isomorfismo $C \cong C'$ tal que el isomorfismo inducido entre sus tilts es compatible con i y i', es decir, si existe $\psi : C \to C'$ isomorfismo tal que el diagrama conmuta:



donde $\psi^\flat(a_0,a_1,...) = (\psi(a_0),\psi(a_1),...)$.

Definición 19. Sea $|Y_F|$ el conjunto de clases de equivalencia de untilts de F.

Dado un untilt (C,i) de F podemos construir nuevos untilts $(C, i\circ\varphi^m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, donde φ es el automorfismo de Frobenius.

Definición 20. Decimos que dos untilts (C,i), (C',i') son Frobenius equivalentes si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que (C,i) y $(C', i'\circ\varphi^m)$ son equivalentes.

El conjunto de clases de equivalencia de untilts Frobenius equivalentes está dado por el cociente

$$|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}},$$

donde el grupo cíclico infinito $\varphi^{\mathbb{Z}}$ actúa en $|Y_F|$ via

$$\varphi^m \cdot (C,i) = (C, i\circ\varphi^m).$$

El siguiente resultado cuya demostración puede ser consultado en [16] nos da la relación entre este conjunto de clase de equivalencia y las curva de Fargues-Fontaine.

Teorema 21. *Existe una curva X_F^{FF} cuyos puntos están en biyección con $|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}$.*

7. La curva y las representaciones de Galois p-ádicas.

En esta última sección se muestra la relación de la curva de Fargues-Fontaine, específicamente sus fibrados vectoriales, con las representaciones de Galois p-ádicas, haciendo uso del teorema de Harder-Narasimhan. En los fibrados vectoriales se tiene lo siguiente:

Definición 22. Sea X una superficie de Riemann. Para cualquier fibrado vectorial E de X asociamos dos invariantes:

- Su rango, $rk(E) \in \mathbb{N}$.
- Su grado, $\deg(E) \in \mathbb{Z}$, definido como el grado de su haz (lineal) determinante. El grado de un fibrado lineal L se define identificando a L con un divisor de Weil $\sum_{x\in X} n_x[x]$ y definimos $\deg(L) = \sum_{x\in X} n_x$.

De los dos invariantes anteriores se define un tercero, su pendiente

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{rk(E)} \in \mathbb{Q}.$$

Se dice que E es semiestable si $\mu(E') \le \mu(E)$ para todo E' subfibrado vectorial de E.

Enunciaremos ahora el teorema principal de este sección cuya demostración puede ser consultada en [16].

Teorema 23 (Harder-Narasimhan (H-N)). *Sea E un fibrado vectorial de una superficie de Riemann X. Entonces E tiene una única filtración de subfibrados*

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_m = E,$$

tales que:

- *El fibrado cociente $\dfrac{E_i}{E_{i-1}}$ es semiestable para todo $i = 1,...,m$.*

- $\mu(\frac{E_1}{E_0}) > \cdots > \mu(\frac{E_m}{E_{m-1}})$.

En general hay otras categorías en las cuales existe un análogo al teorema de H-N. Mencionaremos algunas de estas.

- Fibrados vectoriales de una curva X.
  Sea X una superficie de Riemann. Sea $Vect(X)$ la categoría de fibrados en X. Equipado con las nociones definidas anteriormente de rango y grado, dicha categoría satisface el teorema H-N.
- Los pares $\mathbb{P}^1$-algebraicos completos. Antes de definir estos objetos necesitaremos la definición de una función casi euclidiana.

Definición 24. Una función casi euclidiana de un dominio entero B es una función $\nu : B \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nu(f) = -\infty \iff f = 0$.
2. Para $f, g \in B - \{0\}$ se tiene que $\nu(f) \leq \nu(fg)$.
3. Si $\nu(f) = 0$, entonces f es unidad.
4. Si $f, g \in B$ con $\nu(g) \geq 1$, entonces existen $q, r \in B$ tales que $f = gq + r$ y $\nu(r) \leq \nu(g)$.

Definición 25. Un par $\mathbb{P}^1$-algebraico es un par (B, ν) que consiste de un anillo de ideales principales B y una valuación $\nu : Frac(B) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que $-\nu$ es una función casi euclidiana en B. Decimos que el par es completo si

$$\nu(f) + \sum_{\mathfrak{p} \subseteq B} ord_{\mathfrak{p}}(f) = 0,$$

para todo $f \in B$, donde $\mathfrak{p}$ corre sobre todos los ideales primos distintos del cero de B y $ord_{\mathfrak{p}}$ denota la valuación $\mathfrak{p}$–ádica asociada en B.

Sea (B, ν) un par $\mathbb{P}^1$–algebraico completo. Un fibrado vectorial en (B, ν) se define como un par (M, M_∞), donde M es un B–módulo libre de rango finito y M_∞ es un $\mathcal{O}_\nu$–retículo dentro del espacio vectorial de dimensión finita $M \otimes_B k_\nu$, donde k_ν es la completación de $k = Frac(B)$ respecto a ν y $\mathcal{O}_\nu$ es el anillo de enteros.

- El rango de (M, M_∞) es el rango del módulo M.
- El grado se calcula como la valuación ν del determinante de la matriz de cambio de base entre una base de M sobre B_e y una base de M_∞ sobre $\mathcal{O}_\nu$.[5]

Así, la categoría de fibrados vectoriales de un par $\mathbb{P}^1$-algebraico (B, ν) cumple el teorema H-N.
En particular, para el par $\mathbb{P}^1$-algebraico completo (B_e, ν_{dR}), donde ν_{dR} denota la valuación en B_{dR}, los (B, ν)–pares solo son llamados B-pares. Aquí un fibrado vectorial es un par (M, M_{dR}) tal que

- M es un B_e–módulo libre de rango finito.
- M_{dR} es un B_{dR}^+–retículo dentro de $M \otimes_{B_e} B_{dR}$.

La siguiente proposición relaciona las dos categorías antes mencionadas. Su demostración puede ser consultada en [16].

Proposición 26. *La categoría de (B_e, ν_{dR})–pares se identifica con la categoría $Vect(X^{FF})$ de fibrados vectoriales de la curva de Fargues–Fontaine.*

- Espacios vectoriales con filtraciones.
  Dada una extensión de campos L/F, sea $VectFil_{L/F}$ la categoría de pares

[5]Esta definición concreta se alinea con la definición general del grado de un fibrado vectorial como el grado de su fibrado determinante, que aparece en textos como [24, Ap. A] o [19, §2.2]. En efecto, si M tiene rango r, entonces $\det M := \bigwedge^r M$ es un B_e-módulo libre de rango 1, y $\det M_\infty \subseteq \det M \otimes_{B_e} B_{dR}$ es un retículo sobre B_{dR}^+. La valuación $\nu(\det A)$, donde A es la matriz del cambio de base entre bases de M y M_∞, coincide con la posición relativa del retículo $\det M_\infty$, y por tanto con el grado del fibrado determinante.

$(V, Fil^\bullet V_L)$, donde V es un F–espacio vectorial de dimensión finita y $Fil^\bullet$ es una filtración en $V_L = V \otimes_F L$ separada y exhaustiva. Se definen el rango y grado del par como:

- $rk(V, Fil^\bullet V_L) = \dim_F V$.
- $\deg(V, Fil^\bullet V_L) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} i \dim_L(gr^i V_L)$

Así, esta categoría cumple con el teorema H-N.

- Isocristales.

Sea K campo perfecto de característica p y $K_0 = Frac(W(K))$. Un isocristal sobre K es un par (D, φ_D), donde D es un K_0–espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi_D : D \to D$ es un isomorfismo φ–semilineal (esto es, $\varphi_D(ad) = \varphi(a)\varphi_D(d)$ para todo $a \in K_0$ y $d \in D$).

- $rk(D, \varphi_D) = \dim_{K_0} D$.
- $\deg(D, \varphi_D) = -\deg^+ \det(D, \varphi_D)$, donde $\deg^+$ de un isocristal de rango uno (L, φ_L) se define escogiendo un elemento básico $e \in L$, luego $\varphi_L(e) = ae$ para algún $a \in K_0$ y $\deg^+(L, \varphi_L) := \nu_p(a)$, ya que K_0 es campo de valuación discreta.

Así, esa categoría cumple con el teorema de H-N. A esta categoría se le suele denotar como $\varphi - Mod_{K_0}$.

Sea $\lambda = \dfrac{d}{h} \in \mathbb{Q}$, donde $(d, h) = 1$ y $h > 0$. Podemos definir un isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda) \in \varphi - Mod_{K_0}$ como

- $D_\lambda = K_0^h$, con elementos básicos $e_1, ..., e_h$.
- $\varphi_\lambda : D_\lambda \to D_\lambda$ como el único endomorfismo semilineal que satisface:

$$\varphi_\lambda(e_i) = \begin{cases} e_{i+1}, & si \quad i = 1, ..., h-1, \\ \\ p^{-d}e_1, & si \qquad i = h. \end{cases}$$

El isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ tiene rango h, grado d y pendiente λ.

Lema 27. *Sea $(D, \varphi_D) \in \varphi - Mod_{\mathbb{Q}_p}$ isocristal sobre $\mathbb{F}_p$. Entonces el par*

$$((B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)^{\varphi=1}, B^+_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)$$

es un fibrado vectorial (B_e, ν_{dR}) con rango y grado dado por el rango y grado del isocristal.

Este lema asocia a un isocristal fibrado un fibrado vectorial en X^{FF}, denotado por $\xi(D, \varphi_D)$. En particular, en el caso del isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}$, escribimos $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda) := \xi(D_\lambda, \varphi_\lambda)$. Por el lema, $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)$ tiene rango h, grado d y pendiente λ si $\lambda = \dfrac{d}{h}$ con $(d, h) = 1$ y $h > 0$.

Teorema 28 (De clasificación de fibrados vectoriales en X^{FF}). *Sea E un fibrado vectorial en X^{FF}. Entonces existe una única sucesión de racionales $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ tales que E es isomorfo a*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} \xi(D_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i}).$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [14].

Corolario 29.

- *El funtor $\xi(-) : \varphi - Mod_{K_0} \to Vect(X^{FF})$ es esencialmente sobreyectivo.*
- *Sea E un fibrado vectorial de X^{FF} y $\lambda \in \mathbb{Q}$. Entonces E es semiestable de pendiente λ si y sólo si E es isomorfo a $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)^m$ para algún $m \geq 1$.*
- *La categoría de fibrados vectoriales de X^{FF} semiestables y de pendiente cero equivalente a la categoría de $\mathbb{Q}_p$–espacios vectoriales de dimensión finita vía $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{X^{FF}}$.*

- $\varphi - ModFil_{K/K_0}$.
  Esta es la categoría de los tripletes $(D, \varphi_D, Fil^\bullet D_K)$ donde
  - D es un K_0–espacio vectorial de dimensión finita.
  - $\varphi_D : D \to D$, isomorfismo φ-lineal.
  - $Fil^\bullet$ es una filtración en $D_K := D \otimes_{K_0} K$ separada y exhaustiva.

  Es decir, $(D, \varphi) \in \varphi - Mod_{K_0}$ y $(D, Fil^\bullet D_K) \in VectFil_{K_0/K}$. Definimos:
  - $rk(D, \varphi_D, Fil^\bullet D_K) := \dim_{K_0} D$.
  - $\deg(D, \varphi_D, Fil^\bullet D_K) := \deg(D, \varphi_D) + \deg(D, Fil^\bullet D_K)$.

  De esta forma, esta categoría cumple con el teorema de H-N.

Como $B_{cris} \subseteq B_{dR}$, si V es representación cristalina entonces V es de De Rham y $D_{B_{dR}}(V) = D_{B_{cris}}(V) \otimes_{K_0} K$. Así el funtor

$$D_{cris} : Rep_{cris}(G_K) \to \varphi - ModFil_{K/K_0}$$

es completamente fiel.

Fontaine conjeturó que todo isocristal filtrado estaba en la imagen esencial de $Rep_{cris}(G_K)$ si y sólo si era débilmente admisible [14, Capítulo 8: classification des fibrés vectoriels: le cas F algébriquement clos] , que en este caso, es equivalente a pedir que sea semiestable y de pendiente cero. Esto demuestra que

$$D_{cris} : Rep_{cris}(G_K) \to \varphi - ModFil^{w.a.}_{K/K_0},$$

donde *w.a.* denota weakly admissible (débilmente admisible) es una equivalencia de categorías. También es posible demostrar que la categoría de representaciones semiestables se puede describir como isocristales filtrados débilmente admisibles con operador de monodromía [14].

Finalmente, hemos llegado a uno de los objetivos de la teoría de Hodge p-ádica, describir clases de representaciones de Galois p-ádicas en términos de pura álgebra lineal.

8. Epílogo

El estudio de la curva de Fargues-Fontaine es actualmente un tema de investigación muy activo dentro del área de la geometría aritmética. Trabajos como los de Peter Scholze sobre perfectoides [20] o de Fargues respecto al programa de Langlands [15] son muestra del actual avance en este tópico.

A lo largo de este artículo, hemos presentado la construcción de los anillos de periodos de Fontaine, culminando en la curva de Fargues-Fontaine. Puede resultar útil reflexionar sobre la *arquitectura* de esta construcción, como bien lo detalla Colmez [21]. La necesidad de múltiples anillos $(A_{inf}, B^+_{inf}, A_{cris}, B^+_{dR}, B_{dR})$ surge de la delicada tarea de tender puentes entre mundos aparentemente dispares: la aritmética de $\mathbb{Q}_p$, las representaciones de Galois G_K, y la geometría p-ádica, cuyas estructuras formales guardan ciertos paralelismos con la geometría compleja.

Cada anillo juega un papel específico:

- $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ y R: Proporcionan el *material base* p-ádico y su versión perfecta R (el "tilt"), esencial para manejar Frobenius.
- $A_{inf} = W(R)$: Levanta R a característica cero, introduciendo la estructura de Witt y permitiendo la aparición de p. (Ver Definición 2).
- B^+_{inf}: Permite la inversión (formal) de p, acercándose a un campo $\mathbb{Q}_p$-vectorial.
- A_{cris}: Introduce la estructura de potencias divididas y la completitud p-ádica, esencial para alojar periodos como t y conectar con la cohomología cristalina (ver Observación 1). Es el *puente* principal. (Ver Definición 7).
- B^+_{cris}: La versión de A_{cris} con p invertido.
- B^+_{dR} y B_{dR}: Incorporan la topología $(\ker\theta)$-ádica y el periodo t, creando el campo p-ádico análogo a $\mathbb{C}$ que permite la comparación con la cohomología de De Rham y define la filtración de Hodge-Tate. (Ver Definición 10).

Esta secuencia de anillos, cada uno con sus acciones de Galois y Frobenius, constituye el ingenioso andamiaje que permite a Fontaine (y Fargues-Fontaine) asociar a las representaciones p-ádicas distintos objetos de álgebra lineal con estructuras adicionales (acción de Frobenius, filtraciones, conexiones), según el contexto. En particular, permiten traducir la información aritmética en términos geométrico-lineales, como módulos con filtración (en el caso de B_{dR}) o con Frobenius (en el caso de B_{cris}).

Otro punto de vista que particularmente estamos estudiando son los sistemas dinámicos de funciones racionales sobre la curva: estudiar puntos periódicos o los conjuntos de Fatou y Julia podrían llevarnos a descubrir aún más información acerca de este objeto matemático tan importante.

Finalmente, conviene recordar que este sistema de anillos no fue diseñado para resolver un único problema, sino para tejer puentes entre estructuras profundamente distintas. Como señala Colmez [21], la teoría de periodos de Fontaine constituye una auténtica arquitectura matemática: no se trata solo de construir un anillo universal, sino de organizar múltiples niveles de compatibilidad entre geometría, aritmética y análisis. Cada anillo juega un papel estructural fundamento, puente, ventana o terraza en este edificio conceptual. Comprenderlo implica recorrer sus niveles, descifrar sus relaciones, y reconocer en ellos el lenguaje profundo de la geometría aritmética contemporánea.

AGRADECIMIENTOS. El primer autor expresa su gratitud a SECIHTI por la beca obtenida para estudiar el doctorado en el CIMAT y con el cual fue posible el desarrollo del presente artículo. El segundo autor agradece al proyecto de Frontera SECIHTI "Modelos matemáticos y computacionales no convencionales para el estudio y análisis de problemas relevantes en Biología" FORDECYT-PRONACES UNAM 217367.

Referencias

[1] CIMPA. *Research school on Hodge theory and p-adic Hodge theory,* (2021).
[2] Gerd Faltings. *p-adic Hodge theory.* J. Amer. Math. Soc, 1(1):255-299, (1988).
[3] Jean-Marc Fontaine. *p-adic periods and p-adic étale cohomology.* In Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1985, pages 179-207. Amer. Math. Soc., (1987).
[4] Jean-Marc Fontaine. *Le corps des périodes p-adiques.* Astérisque, 223:59-111, (1994).
[5] Jean-Marc Fontaine. *Représentations p-adiques semi-stables.* Astérisque, 223:113-184, (1994).
[6] Jean Marc Fontaine and Luc Illusie. *p-adic periods: A survey.* Université de Paris-sud, Département de mathématiques, (1990).
[7] Jean-Pierre Serre. *Local Fields.* Graduate Texts in Mathematics;67. Springer Verlag New York Inc, (1979).
[8] J. R. Pérez-Buendía. *A crystalline criterion for good reduction on semi-stable k3-surfaces over a p-adic field.* PhD thesis, Concordia University (2014).
[9] J. R. Pérez-Buendía. A kulikov-type classification theorem for a one parameter family of k3-surfaces over ap-adic field and a good reduction criterion. *Annales mathématiques du Québec*, 43:411–434, 2019.
[10] G. Hernandez-Mada. A monodromy criterion for the good reduction of k3 surfaces. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 145, 2021.
[11] Página web J.R. Pérez-Buendía. Afiliación: SECIHTI CIMAT–Mérida. Web: `http://www.cimat.mx/ rogelio.perez`. Sección de Cursos: `http://www.cimat.mx/ rogelio.perez/Cursos`.
[12] Jesús Rogelio. Pérez-Buendía. *Curse: p-adic Galois representations. https://youtu.be/-KoXxop6X1Y?feature=shared,* CIMPA Research School on Hodge Theory and p-adic Hodge Theory. Online, CIMAT-Gto, México, (2021)
[13] Laurent Berger. *Construction de (phi, gamma)-modules: représentations p-adiques et b-paires.* Algebra and Number Theory, 2(1):91-120, (2008).
[14] Laurent Fargues and Jean Marc Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique.* Société mathématique de France, (2018).
[15] Laurent Fargues and Peter Scholze. *Geometrization of the local Langlands correspondence.* arXiv preprint arXiv:2102.13459, (2021).
[16] Matthew Morrow. *The Fargues-Fontaine curve and diamonds.* Séminaire BOURBAKI, (1150), (2018).

[17] Matthew Morrow. *Raconte moi. . . la courbe de Fargues-Fontaine.* Gazette des Mathematiciens, (163):36-41, (2020).
[18] Maxim Kontsevich and Don Zagier. *Periods.* Springer, (2001).
[19] Olivier Brinon and Brian Conrad. *Cmi summer school notes on p-adic Hodge theory.* (2009).
[20] Peter Scholze. *Perfectoid spaces and their applications.* In Proceedings of the ICM, volume 2014, (2014).
[21] Pierre Colmez. *Le programme de fontaine.* L'Enseignement Mathématique, 65(3/4):487-531, (2019).
[22] Serin Hong. *Notes on p-adic hodge theory.* (2020).
[23] Xavier Caruso. *An introduction to p-adic period rings.* (2019).
[24] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

Jorge A. Robles Hernández
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: `jorge.robles@cimat.mx`

J. Rogelio Pérez-Buendía
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: `rogelio.perez@cimat.mx`

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 61-75.
Recibido 27-02-2025. Aceptado 13-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/reyburcar



UN PANORAMA DE LOS AUTOMOVILISTAS Y SUS HÁBITOS AL VOLANTE EN SALTILLO, COAHUILA

PEDRO REYES-PÉREZ, JAIME BURGOS-GARCÍA Y CAROLINA RAMOS-DURÁN

Resumen. Este trabajo presenta un estudio inicial sobre los hábitos y características de los conductores en Saltillo, Coahuila. Se recopiló información de diversas fuentes para comparar esta ciudad con otras similares en México, considerando la densidad vehicular y la cantidad de accidentes. Se aplicó una encuesta a conductores del área metropolitana de Saltillo, con preguntas sobre edad, género, accidentes, entre otros factores. Los datos obtenidos respaldan de manera cuantitativa algunos hallazgos previos de estudios cualitativos difundidos por medios locales, los cuales a su vez constituyen un primer paso hacia una mejor comprensión del comportamiento vial en contextos urbanos con características comparables.

1. Introducción

Muchos accidentes viales están directamente relacionados con factores humanos, como la destreza de manejo, entendida como el desempeño del conductor y su reacción a estímulos en las vialidades. El estilo de manejo influye en la causa de un accidente y está condicionado por factores como actitudes, educación y emociones. Así, la destreza y el estilo de manejo interactúan, influyendo en el riesgo de colisiones y posibles errores al conducir. Según Reason [12], la distinción entre errores y violaciones de leyes de tránsito radica en sus diferentes orígenes psicológicos: los errores provienen de dificultades en el procesamiento cognitivo, mientras que las violaciones reflejan componentes motivacionales y emocionales. Específicamente, los errores se definen como el *fracaso de las acciones planificadas para lograr las consecuencias previstas*, mientras que las violaciones son *desviaciones deliberadas de aquellas prácticas necesarias para mantener el funcionamiento seguro de un sistema potencialmente peligroso.*

Dado que el factor humano es inevitable en la ocurrencia de accidentes vehiculares, es esencial considerar tanto aspectos fisiológicos (tiempos de reacción, percepción de errores, umbrales de percepción) como psicológicos (sensibilidad a estímulos, emociones, experiencia, educación vial). Para evaluar los aspectos psicológicos, se utilizan encuestas y cuestionarios que permiten analizar las actitudes de los conductores. El "cuestionario del comportamiento al volante" (DBQ, por sus siglas en inglés) es una herramienta ampliamente utilizada a nivel mundial para investigar factores relacionados con accidentes. En países hispanohablantes, la versión adaptada, denominada "cuestionario en español del comportamiento al volante" (SDBQ), ha sido aplicada en Argentina, España, Colombia y Ecuador [17], [6]. No obstante, en México no se han documentado estudios específicos usando el DBQ, aunque existen algunos trabajos relacionados [22], [18], [7]. Recabar información en México sobre factores de riesgo vial sería útil tanto para autoridades como para aseguradoras, permitiendo planificar estrategias como reformas viales y campañas educativas, especialmente en ciudades en crecimiento como Saltillo donde se ha centrado el estudio de este trabajo.

Otro factor que incide en los accidentes es el tráfico vehicular. Su estudio microscópico permite analizar el comportamiento de los conductores mediante el seguimiento de

2010 *Mathematics Subject Classification.* 62B10, 62D05, 62Q05.
Palabras clave. Accidentes viales, Movilidad, Estadística Descriptiva, Tamaño de muestra, Saltillo.

vehículos con cámaras de video, radares o inteligencia artificial. Ejemplos de esta metodología son los estudios del Departamento de Transporte de Estados Unidos en el programa NGSIM, que recopila trayectorias vehiculares en vías como la *US 101* y el Lankershim Boulevard en Los Ángeles [19]. En consecuencia, el conocimiento de la densidad de vehículos en una población es importante para analizar, por ejemplo, el supuesto de que a mayor cantidad de vehículos mayor cantidad de accidentes. Dicha cuestión se aborda también en este trabajo y los datos muestran que no necesariamente existe una proporción directa entre el tamaño de parque vehicular y el número de accidentes.

Inspirados en lo expuesto anteriormente, en el año 2023 se planeó originalmente recabar información de los conductores de Saltillo, así como del parque vehicular, con la ayuda de alguna instancia gubernamental. Sin embargo, en ese momento no se pudo obtener el apoyo solicitado. En consecuencia, se creó un cuestionario corto y se difundió por distintos medios para obtener información sobre las características demográficas, sociales y de algunos hábitos de manejo de los conductores en Saltillo. Los detalles acerca del cuestionario y de la metodología utilizada para su aplicación se encuentran en la sección (4) donde también se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas. Los datos muestran que, por ejemplo, un porcentaje significativo de los encuestados no siempre respetan las señales de tránsito ni los límites de velocidad, también se observó que los hombres son los que menos respetan estas normas, y que las mujeres protagonizan menos accidentes que los hombres. Los datos también confirman algunos estudios de otros autores acerca de la tendencia al alza en los tiempos de traslado de las personas. En la sección (2) se presenta un panorama general del parque vehicular y el número de accidentes nacionales reportados en los últimos años con la finalidad de poner en perspectiva al estado de Coahuila en el contexto nacional. Un resultado revelador muestra que el estado de Nuevo León presenta una gran cantidad de accidentes ya que, en promedio, registró casi tres veces más percances que el área metropolitana del Valle de México entre los años 2017 y 2023. En la sección (3) se presentan datos específicos para el área metropolitana de Saltillo que han sido recabados de distintas fuentes tanto nacionales como locales y que muestran una importante tendencia al alza de los accidentes viales. Finalmente, en la sección (5), se hacen conclusiones sobre la investigación realizada, y además se ofrecen perspectivas de trabajo futuro.

2. Parque vehicular y número de accidentes a nivel nacional

En la introducción se mencionó que la cantidad de vehiculos en circulación es un factor que influye en la ocurrencia de accidentes tanto a nivel local como nacional. Para obtener y analizar esta información se consultaron las bases de datos en la página del INEGI y fueron procesados con el lenguaje de programación *R*, [14].

2.1. Automóviles en circulación a nivel nacional. De acuerdo con el INEGI [26], los vehículos de motor se clasifican como: automóvil, camiones y camionetas ambos tanto de pasajeros como de carga, y motocicletas. Al hacer referencia del total de vehículos, se está considerando a todos los mencionados. En la figura 1, se observa el crecimiento del parque vehicular a partir del año de 1980 hasta 2023; la gráfica azul representa el total de vehículos en circulación, la cual pasó de $5,758,330$ a $58,199,293$, esto indica que en 43 años el incremento fue de $52,440,963$ de unidades; la gráfica roja indica el crecimiento únicamente de automóviles, el cual pasó de $3,950,042$ a $38,039,898$, esto es un incremento de $34,089,856$; la gráfica negra representa a camiones y camionetas tanto de pasajeros como de carga y motocicletas, los registros de todos estos vehículos pasaron de $5,758,330$ a $20,159,395$, presentando un incremento de 14,401,065 unidades.

En el cuadro 1, se presenta el número de vehículos en circulación en los últimos años de la Ciudad de México, Estado de México, Nuevo León, Coahuila, San Luis Potosí y

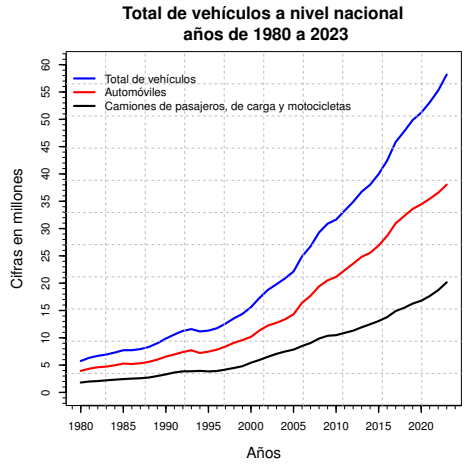


FIGURA 1. Parque vehicular nacional.

Chihuahua. Las tres primeras entidades federativas se eligieron debido a su cantidad de habitantes y por su tamaño de parque vehicular; las tres siguientes entidades se eligieron por su cantidad de poblacion que es equiparable entre sí.

Entidad federativa	Años					Población 2020
	2019	2020	2021	2022	2023	
México	8,170,767	8,571,466	8,996,664	9,421,189	9,988,109	16,992,418
CDMX	6,084,903	6,145,553	6,235,773	6,368,520	6,471,738	9,209,944
Nuevo León	2,385,644	2,476,062	2,568,278	2,686,334	2,232,607	5,784,442
Coahuila	970,099	1,005,474	1,039,056	1,127,781	1,257,493	3,146,771
San Luis Potosí	1,243,194	1,280,233	1,328,813	1,357,909	1,476,277	2,822,255
Chihuahua	1,672,105	1,725,183	1,782,627	1,931,820	1,879,130	3,741,869

CUADRO 1. Parque vehicular en el periodo del 2019 al 2023, y población.

2.2. Accidentes. En este trabajo es de interés analizar la cantidad de accidentes ocurridos en México, para esto se utilizan los datos del INEGI. La información se obtuvo a nivel de entidad y municipal desde 1997 hasta 2023 [8], y en [9] se consultaron los registros por entidad federativa de los años 2019 a 2023. A partir de estas bases de datos se generaron las gráficas de la figura 2, que muestran el número de accidentes por entidad entre los años 2017 y 2023. Cabe destacar que Nuevo León resalta por tener la mayor cantidad de accidentes en cada uno de estos años con un promedio de $75,294$ superando significativamente a las demás entidades de toda la República Mexicana, inclusive al Estado de México y la Ciudad de México, las cuales en conjunto tienen en promedio de $26,016$ accidentes. Lo anterior quiere decir que Nuevo León registró casi tres veces más percances que el área metropolitana del Valle de México. También se puede observar que en este periodo de tiempo, los primeros diez lugares fueron ocupados casi por las mismas entidades, estas son: Nuevo León, Chihuahua, Sonora, Jalisco, Guanajuato, Michoacán y Estado de México. Continuando con el análisis de la figura 2, es interesante notar que Coahuila se encontró entre los diez primeros lugares en accidentes vehiculares en los años de 2017 a 2021, y presentó una ligera disminución en los años 2022 y 2023. En promedio, Coahuila de los años de 2017 a 2023 se encuentra en el décimo lugar con $12,272$ accidentes.

Por otra parte, Chihuahua tiene una población equiparable con Coahuila, vea la columna derecha de el cuadro 1, pero con mayor cantidad de parque vehicular el cual

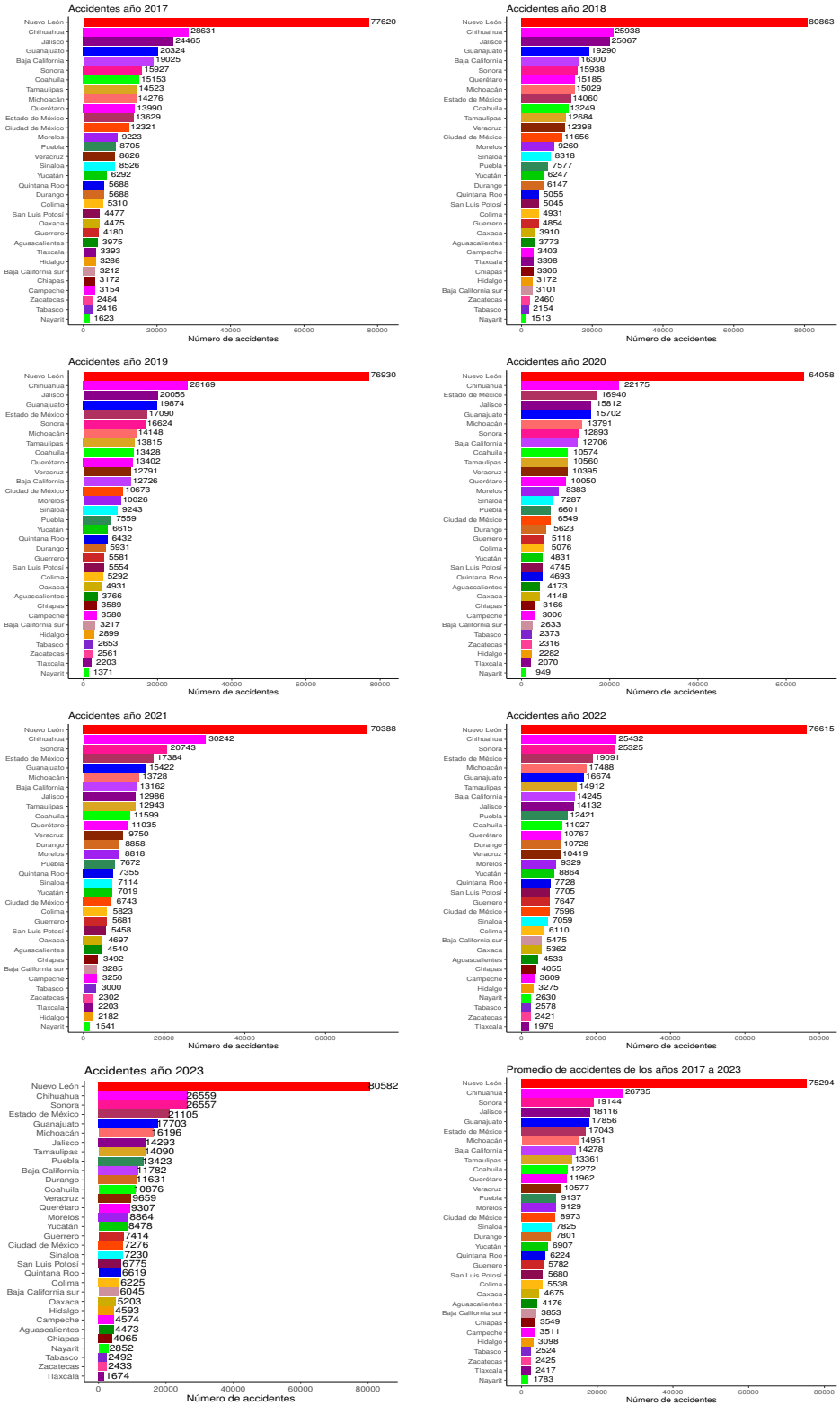


FIGURA 2. Accidentes por entidad federativa en el periodo 2017-2023. Datos obtenidos de [9].

es de aproximadamente $1,879,130$, mientras que Coahuila tiene $1,257,493$ unidades. Se observa que Chihuahua presenta una cantidad de accidentes mucho mayor ocupando siempre el segundo puesto con $26,735$ percances en promedio. Un caso contrario es San Luis Potosí, donde la población es equiparable con Coahuila y presenta un parque vehicular de aproximadamente $1,476,277$, pero que reporta un número menor de accidentes con un promedio $5,680$. Vea el cuadro 1 y la gráfica del año 2023 de la figura 2.

Este breve análisis muestra que Coahuila tiene un número importante de accidentes de tránsito ubicándose en la décima posición y para el caso particular de Saltillo, dicho número ha ido a la alza y de manera lamentable también el número de decesos. Lo cual veremos en la próxima sección.

3. Parque vehicular y número de accidentes en Saltillo

Según los datos de la Secretaría de Economía [24], en 2020 la población en el área metropolitana de Saltillo fue de 1,031,779 habitantes (aproximadamente 50 % hombres y 50 % mujeres), comparando esta cantidad con la registrada en el año 2010, se observa un crecimiento de 25.3 %. Por otra parte, el Instituto Municipal de Planeación (IMPLAN de Saltillo) reporta que en la ciudad circulan diariamente alrededor de $500,000$ vehículos [23]. Más aún, en la nota del periódico Vanguardia [20] se afirma que, "*en la zona conurbada de Saltillo existen más autos que viviendas, lo cual explica el problema de congestionamiento que padecemos a casi cualquier hora del día y la nula promoción del traslado peatonal*". Cabe mencionar que el problema del tráfico y la movilidad en la ciudad de Saltillo ha sido estudiado anteriormente a tal punto que en la misma nota periodística [20] se menciona que, "*Los rezagos en materia de movilidad urbana en la zona metropolitana de Saltillo se han diagnosticado hasta la saciedad*". Y solo recientemente se han puesto en marcha acciones prácticas para tratar de mejorar las condiciones de movilidad en la ciudad, como es el estudio del tráfico en los puntos con mayor congestionamiento usando un simulador de tráfico cuyos datos se obtienen con cámaras y drones [23].

Respecto a los accidentes en Saltillo, en la referencia [13] se puede encontrar una investigación de los accidentes viales durante el periodo del 2018 al 2023. En este trabajo se menciona que distintas fuentes, como el Área de Control de Accidentes de Policía Preventiva y Tránsito Municipal de Saltillo reportaron, para el año 2023, un total de 892 siniestros viales como: choques entre vehículos, choques contra objeto fijo, volcaduras y atropellamientos; los cuales dejaron un saldo de 467 personas heridas, de estas se reportaron 427 conductores u ocupantes de un vehículo, 38 peatones y 2 ciclistas. Más aún, las cifras de decesos relacionados con accidentes viales han ido a la alza como se puede observar en el cuadro 2.

Año	Automovilistas	Peatones	Ciclistas	Total
2023	26	30	0	56
2022	20	31	1	52
2021	18	25	2	45
2020	11	23	3	37
2019	16	25	1	42
2018	10	22	1	33

Cuadro 2. Número de decesos relacionado con accidentes viales en Saltillo en el periodo comprendido entre los años 2018 al 2023. Datos extraídos de [13].

4. Estructura de la encuesta y datos recabados

Con el fin de obtener información preliminar respecto de algunas características y hábitos de los conductores en el área metropolitana de Saltillo, se realizó una breve encuesta de 18 preguntas la cual puede encontrarse en [25]. Ésta se difundió principalmente entre la comunidad de la Universidad Autónoma de Coahuila así como a través de redes sociales. Para tener una muestra confiable, se realizó el cálculo del tamaño de muestra para una población finita, con un 96 % de confianza de acuerdo con la expresión (1). Esta fórmula puede encontrarse en diferentes textos, por ejemplo, [2] y [11], por mencionar algunos.

$$n = \frac{N\left(Z_\alpha\right)^2}{p}(1-p)E^2(N-1) + \left(Z_\alpha\right)^2 p(1-p). \tag{1}$$

Donde.

- $N = 879958$.
- $\alpha = 0.04$.
- $\left(Z_\alpha\right)^2$, es el cuantil de la distribución normal estándar.
- $p = 0.5$, es probabilidad de éxito del evento.
- $E = 4\,\%$, es el error de estimación máximo permitido.

El valor de N es el tamaño de la población adulta en Saltillo Coahuila y se obtuvo del INEGI, lo cual puede ver en [2]. Con las especificaciones dadas, el tamaño de muestra necesario es $n \geq 576$. Sin embargo, en la encuesta aplicada se obtuvieron 722 respuestas, de éstas se quitaron los que no sabían manejar y dos preguntas en las cuales no hubo respuestas. Así que el total de encuestas contestadas correctamente fue de 676. Considerando esto, el número de respuestas es mayor que el tamaño de muestra calculado. Aunque el número de la encuestas contestadas cumple con las condiciones del tamaño de muestra dado en (1), ésta tiene sesgo debido a que no fue difundida aleatoriamente sino que se aplicó principalmente entre la comunidad universitaria y en redes sociales.

4.1. Datos sociodemográficos de la encuesta. Del total de las 676 respuestas obtenidas, el 53.7 % corresponden a mujeres y 46.3 % a hombres. De estas 676 personas, el 83.3 % son originarios de Coahuila, el 3.3 % es de la Ciudad de México, el 2.4 % de Nuevo León, el 1.1 % de Tamaulipas, y el 7.7 % de otras entidades. Del porcentaje de personas originarias de Coahuila se observó que la gran mayoría de los conductores provienen de la región Sureste con el 86 %, mientras que únicamente el 14 % proviene de las regiones: Centro, Carbonífera, Laguna, Norte y Desierto. La información descrita se puede ver en el cuadro 3.

En la sección (1) se mencionó que ciertos factores humanos relacionados con la edad como, la experiencia, umbrales de percepción, y el manejo de las emociones resultan ser factores en los accidentes. En consecuencia, es de interés saber la edad en la que han aprendido a manejar los conductores. En el cuadro 4 se observa que el 17.3 % empezó a conducir entre los 13 a 15 años, el 74 % entre los 16 a los 21 años y el 8 % a partir de los 22 años. En este punto, vale la pena recordar que la encuesta fue contestada en su mayoría por universitarios y gente con acceso a las redes sociales, por tal motivo los resultados pueden presentar un sesgo.

Un factor importante es la forma en que los conductores aprendieron a manejar. De los 676 encuestados, 455 no tomaron curso de manejo lo cual equivale al 67.3 %; así que únicamente el 32.7 % tomó curso en alguna escuela de manejo. Otro factor de interés fue saber cuántos conductores hay en cada hogar, independientemente del número de integrantes de cada familia. Se tiene que en la gran mayoría de los hogares hay dos conductores esto es el 46.2 %, el 22.3 % tiene tres conductores y en el 15 % se tienen cuatro o más. Por supuesto, este factor está relacionado con el número de vehículos que hay en cada hogar. Con respecto a las residencias, los datos muestran que sólo en 17 de ellas no cuentan con vehículo propio, en 186 hay un vehículo; en

Dato	Cantidad	Porcentaje
Conductores femeninos	363	53.7
Conductores masculinos	313	46.3
Residentes en Saltillo	631	93.3
No residentes en Saltillo	45	6.7
Nacidos en:		
Coahuila	563	83.3
Ciudad de México	22	3.3
Nuevo León	17	2.4
Tamaulipas	12	1.7
Estado de México	9	1.3
Otra entidad	53	7.7
Coahuila, región de nacimiento		
Sureste	484	71.6
Centro	29	4.3
Carbonífera	22	3.3
Laguna	13	1.9
Norte	11	1.6
Conductores en casa		
Uno	107	15.8
Dos	312	46.2
Tres	151	22.3
Cuatro o más	106	15.7

CUADRO 3. Datos sociales y demográficos de la encuesta.

Edades	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
7-9	0	0.0	1	0.1	1	0.1
10-12	1	0.1	2	0.3	3	0.4
13-15	43	6.4	74	10.9	117	17.3
16-18	115	17.0	153	22.6	268	39.6
19-21	155	22.9	75	11.1	230	34.0
22-24	14	2.1	1	0.1	15	2.2
25-27	21	3.1	4	0.6	25	3.7
28-30	11	1.6	1	0.1	12	1.8
34-36	3	0.4	1	0.1	4	0.6
40-42	0	0.0	1	0.1	1	0.1

CUADRO 4. Rangos de edades en que aprenden a manejar.

286 hay dos vehículos, en 136 hay tres vehículos; y en 59 hay 4 o más vehículos. Estos datos se pueden ver en los cuadros 5 y 6.

Cabe señalar que una gran cantidad de los encuestados tramitó su primera licencia tan pronto como cumplió la mayoría de edad, representando el 74.9 % de la muestra, es decir, tres de cada cuatro personas, esta información se muestra en el cuadro 7. En la figura 3 observamos que el 73.6 % de las personas aprendieron a manejar alrededor de los 18 años lo que muestra que casi la totalidad de las personas que aprendieron a manejar en este rango de edad, y prácticamente el mismo porcentaje de personas tramitan su licencia de conducir entre los 18 y 21 años, lo cual se puede comprobar viendo el cuadro 7. Por otra parte, también es de destacar que 5.5 % de los encuestados nunca han tramitado su licencia.

En el cuadro 8 se muestran algunos datos respecto a los hábitos de manejo de los encuestados como son: los procentajes de hombres y mujeres que respetan las señales

Variable	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
Tomó curso de manejo						
Sí	148	21.9	73	10.8	221	32.7
No	215	31.8	240	35.5	455	67.3
Total	363	53.7	313	45.3	676	100
Propietario de vehículo						
Sí	316	46.7	271	40.1	587	86.8
No	47	7.0	42	6.2	89	13.2
Total	363	53.7	313	46.3	676	100.0

CUADRO 5. Tomó curso de manejo y si el vehículo es propio.

No. de vehículos en casa	0	1	2	3	4	5	6	10
Residencias	17	186	286	136	38	15	5	1

CUADRO 6. Número de vehículos que hay en cada residencia.

Edades	Mujeres	%	Hombres	%	Totales	%
16-17	22	3.3	47	7.0	69	10.2
18-19	142	21.0	160	23.7	302	44.7
20-21	122	18.0	82	12.1	204	30.2
22-23	6	0.9	0	0.0	6	0.9
24-25	16	2.4	1	0.1	17	2.5
26-27	16	2.4	2	0.3	18	2.7
28-29	5	0.7	2	0.3	7	1.0
30-31	5	0.7	2	0.3	7	1.0
32-33	1	0.1	1	0.1	2	0.3
33-34	1	0.1	0	0.0	1	0.1
35-36	3	0.4	2	0.3	5	0.7
39-40	0	0.0	1	0.1	1	0.1
Sin licencia	24	3.6	13	1.9	37	5.5
Total	363	53.6	313	46.2	676	99.9

CUADRO 7. Edad en la que tramitaron su primera licencia para conducir.

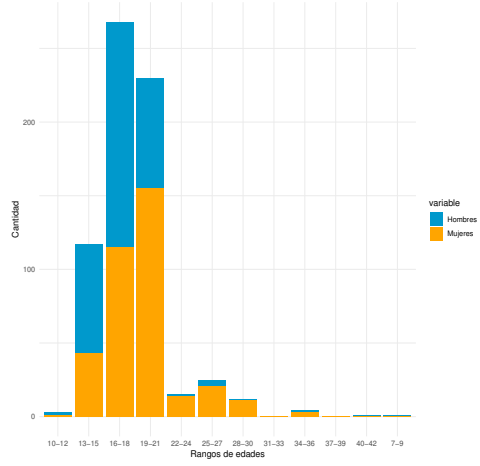


FIGURA 3. Rangos de edad en la que empezaron a conducir.

Preguntas	Frecuencia	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
Â¿Con qué frecuencia respeta las señales de tránsito?	Siempre	245	36.2	184	27.2	429	63.5
	Casi siempre	116	17.2	121	17.9	237	35.1
	Algunas veces	1	0.1	3	0.4	4	0.6
	Sólo si hay patrullas	1	0.1	5	0.7	6	0.9
Â¿Respeta los límites de velocidad?	Siempre	281	41.6	188	27.8	469	69.4
	Cuando hay patrullas	9	1.3	19	2.8	28	4.1
	Cuando hay tráfico	73	10.8	106	15.7	179	26.50
Â¿Con qué frecuencia usa las luces direccionales?	Siempre	294	43.5	234	34.6	528	78.1
	Casi siempre	67	9.9	66	9.8	133	19.7
	Regularmente	2	0.3	11	1.6	13	1.9
	Poco	0	0.0	1	0.1	1	0.1
	Nunca	0	0.0	1	0.1	1	0.1
Â¿Usa el celular mientras conduce?	No infraccionado	356	52.7	302	44.7	658	97.3
	Infraccionado	7	1.0	11	1.6	18	2.7
Â¿Cuántos accidentes ha protagonizados?	Ninguno	207	30.6	171	25.3	378	55.9
	Uno	97	14.3	77	11.4	174	25.7
	Dos	47	7.0	54	8.0	101	14.9
	Tres o más	12	1.8	11	1.6	23	3.4
Tiempo promedio extra de llegada cuando hay tráfico	5 a 10 minutos					83	12.3
	15 a 20 minutos					281	40.7
	más de 25 minutos					320	47.0

CUADRO 8. Datos de hábitos de los conductores.

de tránsito, los límites de velocidad y el uso de luces direccionales, etc. En dicho cuadro se observan procentajes significativos de personas que no siempre respetan las señales de tránsito y los límites de velocidad, siendo los hombres los que menos respetan estas normas incluso el uso de luces direccionales. En este mismo cuadro 8, se observa que las mujeres son las que menos se accidentan, ya que el 69.4 % de mujeres han protagonizado accidentes, mientras que el 74.7 % de hombres han estado involucrados en accidentes automovilísticos.

Respecto al uso del celular mientras se conduce, lamentablemente un hábito muy común entre los conductores y en consecuencia, una fuente importante de accidentes, se observa que casi la totalidad de los encuestados no han sido infraccionados por esta falta. Esto no indica necesariamente que los conductores no utilicen su celular al volante sino que también puede deberse a la falta de instrumentos que permitan detectar este hábito y sancionarlo.

Otro dato importante recabado en la encuesta fue el tiempo de traslado entre distintos puntos del área metropolitana. Si bien es cierto que este registro depende de la ubicación geográfica del domicilio y del destino, es de resaltar que alrededor de la mitad de las personas encuestadas contestaron que consideran que en promedio demoran más de 25 minutos extra al tiempo que harían en promedio en un día sin tráfico, no importando si van a sus trabajos, escuelas o de compras. Si tenemos en cuenta que un viaje entre puntos antipodales de la ciudad, por ejemplo de sur a norte, puede tomar (según datos de Google maps) alrededor de 30 minutos sin tráfico, entonces estaríamos hablando de tiempos de traslado de alrededor de una hora o más sólo para cruzar la ciudad en automóvil. En consecuencia, este dato revela que el factor del tráfico en la ciudad está generando una pérdida considerable de horas por persona a la semana y afectando la calidad de vida de los habitantes.

Con respecto al género, de los 676 conductores, 363 son mujeres y de éstas 148 tomaron el curso de manejo, lo cual representa el 21 % del total. Por otra parte, de los 313 hombres sólo 73 tomaron dicho curso, esto es únicamente el 10 % del total. En conclusión, de los 676 conductores, 221 tomaron curso de manejo lo cual es el 32.7 % y de éstos el 20 % son mujeres. Si se considera que en una escuela de manejo enseñan

las reglas básicas para conducir, entonces el 67 % de los conductores carecen de estos conocimientos.

4.2. Respuestas cruzadas de hábitos de conductores. En esta sección se analiza si las respuestas a cada pregunta del cuestionario están asociadas entre sí. Con este propósito se construyó el cuadro 9, en el cual se incluye para cada par de preguntas una tabla de doble entrada o tabla de contingencia. Además, se presentan los coeficientes de contingencia, el V de Cramer y el Tau-b de Kendall correspondientes. Cada tabla contiene las frecuencias absolutas, y al final de cada fila y columna se muestran los totales respectivos. Los valores p en cada celda corresponden a las probabilidades conjuntas $P(A_i \cap B_j)$, donde A_i son las respuestas por filas y B_j las de las columnas; además al final de cada fila y columna se encuentra la probabilidad marginal $P(A_i)$ y $P(B_j)$, respectivamente.

En el primer bloque del cuadro 9 se clasifica en qué medida los conductores respetan las señales de tránsito con respecto a si éstos tomaron o no el curso de manejo. Se observa que 221 conductores tomaron curso de manejo, y de éstos 220 casi siempre o siempre respetan las señales de tránsito, esto representa el 33 % de las encuestas. Por el contrario, 455 no tomaron curso de manejo de los cuales 446 casi siempre o siempre no respetan las señales de tránsito esto es el 46 %. En total, 221 conductores tomaron curso de manejo esto es el 33 %; y el 67 % no tomó dicho curso. De acuerdo a lo anterior, se observa que los conductores que tomarón curso de manejo son quiénes más respetan las señales de tránsito.

En el segundo bloque del cuadro 9, se muestran las respuestas acerca del uso de las luces direccionales en función de si se tomó algún curso de manejo. De entre el total de respuestas, 218 afirmaron hacer uso de luces direccionales con frecuencia o siempre; esto representa la proporción de 32 %. Por el contrario, 443 conductores no usan luces direccionales y no tomaron el curso de manejo, esto representa el 56 %. En consecuencia, podemos afirmar que el uso de las luces direccionales se ve influenciado por la asistencia a una escuela de manejo. Con respecto a ser infraccionado por conducir usando el celular y su relación con tomar un curso de manejo, en el cuadro 9 se observa que 5 conductores fueron infraccionados por usar el celular mientras conducían y 216 no fueron infraccionados, todos estos conductores tomaron curso de manejo, lo representa el 1 % y 32 % respectivamente. Por otra parte, 13 conductores fueron infraccionados por usar el celular mientras conducían y 442 no fueron infraccionados, todos estos no tomaron curso de manejo, los datos anteriores son el 2 % y 65 % respectivamente. No obstante, como ya fue mencionado, los conductores que no recibieron alguna infracción no indica necesariamente que no incurrieran en este mal hábito.

La relación entre el número de accidentes protagonizados y los cursos de manejo se muestran en la parte inferior del cuadro 9, se observa que de entre los conductores que si tomaron algún curso de manejo, 56 han tenido un accidente, 28 reportan dos accidentes y 12 han protagonizado más de dos accidentes. Mientras que, del total de conductores que no tomaron algún curso, 118 conductores han tenido un accidente, 73 reportan dos accidentes y 11 han protagonizado más de dos accidentes. En total, se observa que las personas que no cuentan con algún curso de manejo protagonizaron casi el doble de accidentes respecto a las personas que si lo tomaron.

Debido a que las reglas de tránsito deberían ser conocidas y aplicadas por todos los conductores, independientemente del tipo de vehículo que utilicen, es de interés analizar si el respeto de la reglas de tránsito son más seguidas por conductores que tomaron curso de manejo o es irrelevante. Para tal finalidad se realizó el cuadro 10, en donde se observa que 179 conductores respetan los límites de velocidad sólo si hay

	Â¿Tomó curso de manejo?						
1. Â¿Respeta señales de tránsito?	Si	p	No	p	Suma	p	r
Sólo si hay patrullas	1	0.00	5	0.01	6	0.01	
Algunas veces	0	0.00	4	0.01	4	0.01	
Casi siempre	76	0.11	161	0.24	237	0.35	
Siempre	144	0.21	285	0.42	429	0.64	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coeficiente de contingencia, y Cramer							0.065
Coeficiente Tau de Kendall							-0.029
2. Â¿Usa de luces direccionales?							
Nunca	0	0	1	0.00	1	0.00	
Poco	0	0.00	1	0.00	1	0.00	
Regularmente	3	0.00	10	0.01	13	0.02	
Con frecuencia	42	0.06	91	0.14	133	0.20	
Siempre	176	0.26	352	0.52	528	0.78	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coeficiente de contingencia, y Cramer							0.05
Coeficiente Tau de Kendall							-0.025
3. Â¿Le han infracción por usar celular al conducir?							
Sí	5	0.01	13	0.02	18	0.03	
No	216	0.32	442	0.65	658	0.97	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coeficiente de contingencia, y Cramer							0.017
Coeficiente Tau de Kendall							-0.0173
4. Â¿Número de accidentes protagonizados?							
0	125	0.18	253	0.37	378	0.56	
1	56	0.08	118	0.17	174	0.26	
2	28	0.04	73	0.11	101	0.15	
+2	12	0.02	11	0.02	23	0.03	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coeficiente de contingencia, y Cramer							0.087
Coeficiente Tau de Kendall							0.003

CUADRO 9. Relación entre las preguntas.

tráfico, de éstos, 86 han tenido al menos un accidente automovilístico, en porcentaje es el 13 %; 28 respetan límites de velocidad sólo si hay patrullas cerca y 16 de estos han tenido al menos un accidente esto equivale al 2 %; 469 siempre respetan los límites de velocidad y 196 de ellos han protagonizado al menos un accidente esto es el 28 %.

	Â¿Respeta los límites de velocidad?								
No. de accidentes protagonizados	Si hay tráfico	p	Si hay patrullas	p	Siempre	p	Suma	p	r
0	93	0.14	12	0.02	273	0.40	378	0.56	
1	54	0.08	9	0.01	111	0.16	174	0.26	
2	26	0.04	4	0.01	71	0.10	101	0.15	
+2	6	0.01	3	0.00	14	0.02	23	0.03	
Suma	179	0.26	28	0.04	469	0.69	676	1.00	
Coeficiente de contingencia									0.115
Coeficiente de Cramer									0.082
Coeficiente Tau de Kendall									-0.049

CUADRO 10. Accidentes protagonizados y el respeto a los límites de velocidad.

En el cuadro 11, se tienen las proporciones del número de accidentes y el uso de las luces direccionales. Cabe resaltar que el total de conductores que usan las luces frecuentemente son 133 de los cuales 72 han protagonizado al menos un accidente, el porcentaje es de 11 %; 528 conductores siempre usan las luces direccionales y de éstos 312 han protagonizado accidentes, esto corresponde al 44 % .

	Uso de luces direccionales												
No. de accidentes protagonizados	Nunca	p	Poco	p	Frec	p	Regular	p	Siempre	p	Suma	p	r
0	0	0.00	1	0.00	61	0.09	4	0.01	312	0.46	378	0.56	
1	0	0.00	0	0.00	44	0.06	4	0.01	126	0.19	174	0.26	
2	1	0.00	0	0.00	22	0.03	3	0.00	75	0.11	101	0.15	
+2	0	0.00	0	0.00	6	0.01	2	0.00	15	0.02	23	0.03	
Suma	1	0.00	1	0.00	133	0.20	13	0.02	528	0.78	676	1.00	
Coeficiente de contingencia													0.179
Coeficiente de Cramer													0.105
Coeficiente Tau de Kendall													-0.106

CUADRO 11. Accidentes protagonizados y el uso de luces direccionales.

Respecto a la correlación, en los cuadros 9 a 11 se presentan el coeficiente de contingencia, el V de Cramer y el Tau-b de Kendall. En todos los casos, los valores obtenidos son muy cercanos a cero, lo que indica una correlación muy débil entre cada par de preguntas. En particular, en el cuadro 9 se observa que los valores del coeficiente de contingencia y del V de Cramer coinciden, esto puede deberse a la baja magnitud de las correlaciones y al tamaño grande de la muestra. Cabe señalar que la tabla de contingencia muestra únicamente cuántas veces ocurren ciertas combinaciones específicas de valores entre dos variables, pero no proporciona información sobre la fuerza, dirección o significancia estadística de la relación entre ellas. En cambio, las medidas de correlación sí permiten evaluar estos aspectos. Para una discusión más detallada, puede consultarse [1]. En consecuencia, los valores contenidos en una tabla de contingencia no garantizan la existencia de correlación entre las respuestas. El coeficiente V de Cramer puede encontrarse en diversos textos básicos de estadística, como en la referencia [5]. Este coeficiente se define mediante la siguiente expresión:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \times \text{mín}(k-1, r-1)}} \tag{2}$$

donde

- χ^2, es el estadístico chi-cuadrado, el cual se obtiene a partir de la tabla de contingencia.
- n, es el tamaño de la muestra.
- k, es el número de columnas.
- r, es el número de renglones.
- $\text{mín}(k-1, r-1)$, es el mínimo entre el número de renglones menos uno, y el número de columnas menos uno.

Por otra parte, el coeficiente Tau-b de Kendall es una medida de correlación no paramétrica, dado por

$$\tau_b = \frac{n_c - n_d}{\sqrt{(n_c + n_d + T_x) + (n_c + n_d + T_y)}} \tag{3}$$

siendo

- n_c, es el número de pares concordantes.
- n_d, es el número de pares discordantes.
- n, es el número de observaciones.
- T_x, es el número de pares empatados en x, pero no en y.
- T_y, es el número de pares empatados en y, pero no en x.

Este coeficiente se puede encontrar en diversos textos, por ejemplo en [10].

5. Conclusiones y perspectivas

Este trabajo presenta datos sobre el parque vehicular y el número de accidentes a nivel nacional para contextualizar la situación del estado de Coahuila en los últimos años. Al comparar con otras ciudades mexicanas con población y parque vehicular similares, se encontró que Chihuahua posee más vehículos y accidentes que Coahuila, que ocupa el segundo lugar en percances. Por otro lado, San Luis Potosí tiene un parque vehicular mayor que Coahuila, pero registra menos accidentes. Esto sugiere que una mayor densidad vehicular no implica necesariamente un mayor número de accidentes como en el caso de Nuevo León cuyos datos muestran que este estado registró casi tres veces más percances que la Ciudad de México y el Estado de México en conjunto. Además, se observó que Coahuila se ubica, en promedio, entre los diez estados con más accidentes vehiculares entre 2017 y 2023.

En el caso específico del área metropolitana de Saltillo, los datos coinciden con estudios previos sobre el aumento en los tiempos de traslado y en el número de accidentes viales. Asimismo, se identificó que un porcentaje significativo de los encuestados no respeta siempre las señales de tránsito ni los límites de velocidad. Se observó que las mujeres son las que menos se accidentan en comparación con los hombres. Por otra parte, los datos del cuadro 6 muestran que aproximadamente el 42.31 % y el 20.12 % de los hogares tienen 2 y 3 vehículos; si comparamos estos datos con los de la parte inferior del cuadro 3, notamos que hay un número similar de residencias que tienen 2 o 3 conductores. En consecuencia, se infiere que en los hogares, cada persona que sabe conducir utiliza un vehículo, lo que refleja una preferencia por el automóvil sobre el transporte público. Esto se evidencia en el rápido crecimiento del parque vehicular y confirma cuantitativamente lo señalado en notas periodísticas que indican que hay más autos que viviendas en la ciudad [20], [23].

Por lo tanto, este primer estudio sugiere que Saltillo es una ciudad donde se "privilegia" el uso del automóvil y que muchos habitantes carecen de buenos hábitos de manejo, lo que podría llevar a niveles preocupantes de accidentes viales, como en Nuevo León. Para validar estas afirmaciones y generalizarlas, es necesario un muestreo probabilístico aleatorio. Por ello, como un primer trabajo a futuro se propone adaptar y validar los cuestionarios DBQ y SDBQ para el área metropolitana de Saltillo, en colaboración con el Instituto Municipal de Movilidad Urbana Sostenible, con el fin de recopilar datos útiles para la sociedad, el gobierno y/o el sector privado sobre la propensión a accidentes.

Otro objetivo de trabajo a futuro es utilizar algunos datos de este trabajo para formar una muestra representativa de conductores en el área metropolitana de Saltillo y realizar experimentos controlados en condiciones de tráfico real. Estos experimentos se enfocarán en situaciones de tránsito denso en las salidas de la ciudad, para obtener datos estadísticos sobre los tiempos de reacción de los conductores ante estímulos como incorporaciones de vehículos, frenadas repentinas o avances lentos. Este escenario, donde los vehículos avanzan en un solo carril y los conductores deben reaccionar a ciertos estímulos, puede estudiarse mediante los modelos *car following*. Dichos modelos, descritos en [16], son sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo donde el tiempo de reacción del conductor es un parámetro clave. La dinámica del pelotón vehicular depende significativamente de los retardos temporales, cuya determinación es fundamental para estudiar escenarios específicos. Estos escenarios se han investigado a lo largo de las últimas décadas utilizando mediciones directas con instrumentación en condiciones de tráfico controladas, así como análisis de datos obtenidos mediante videocámaras ubicadas en las vialidades. El lector interesado en este tema puede consultar las referencias [21], [3], [15].

AGRADECIMIENTOS. El autor Reyes-Pérez agradece al Dr. Luis Antonio Rincón Solís por sus valiosos comentarios durante la elaboración de este trabajo. El autor Burgos-García expresa su gratitud al Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores por el apoyo recibido, así como al Departamento de Matemáticas de la UAM-I por la hospitalidad brindada durante el desarrollo de esta investigación. La autora Ramos-Durán agradece a las personas que colaboraron en la difusión de la encuesta. Los autores brindan su agradecimiento al revisor anónimo por sus críticas constructivas y sugerencias, las cuales contribuyeron significativamente a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] Agresti, A. (2010). Analysis of Ordinal Categorical Data. Wiley.
[2] Cochran W. G. *Sampling Techniques (3rd ed.)*. New York: John Wiley & Sons. 1977.
[3] Drozdziel, P., et al. Drivers'reaction time research in the conditions in the real traffic. *Open Engineering*. 10(1), 35–47. 2020
[4] El Siglo de Torreón. *Educación vial en México salva millones de vidas*. https://www.elsiglodetorreon.com.mx/noticia/2023/educacion-vial-en-mexico-salva-millones-de-vidas.html, 2023.
[5] Everitt B.S. *The Analysis of Contingency Tables (2nd ed.)*. Chapman and Hall/CRC. 1992
[6] Espinoza-Molina, F.E. Ortega, M. Sandoval Escobar, K.E. Vazquez Salazar, J.S. *An Integrated Approach to the Spanish Driving Behavior Questionnaire (SDBQ) in the City of Cuenca, Ecuador*. Sustainability 16, no, 4885. 2024
[7] Hernández-Hernández A.M., Siqueiros-García J.M., Robles-Belmont E, Gershenson C. *Anger while driving in Mexico City*. PLoS ONE 14(9): e0223048. 2019.
[8] INEGI. Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas https://www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/bd/continuas/transporte/accidentes.asp?s=est&c=13159&proy=atus_accidentes, 2024.
[9] https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/interactivos/?pxq=ATUS_ATUS_1_53fef2cc-0d30-497a-b292-f2d32d882113
[10] Kendall, M. G., & Gibbons, J. D. (1990). Rank Correlation Methods (5th ed.). Oxford University Press.
[11] Kish, L. (1995). Survey Sampling. New York: John Wiley & Sons.
[12] Reason J. *Human Error*. Cambridge University Press. 1990.
[13] Ruedas Rebeldes. *2023, el año con menos multas a conductores y con más muertos en siniestros viales en Saltillo*. https://www.ruedasrebeldes.com/blog/2024/05/20/2023-el-ano-con-menos-multas-a-conductores-y-con-mas-muertos-en-siniestros-viales-en-saltillo/ 2024.
[14] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing*. Vienna, Austria. 2022. https://www.R-project.org/
[15] Siuhi, S. *Parametric study of stimulus-response behavior incorporating vehicle heterogeneity in car-following models*. UNLV Theses, Dissertations, Professional Papers, and Capstones 152. 2009
[16] Treiber, M. Kesting, A. *Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013
[17] Türker, O. Timo, L. Heikki, S. *Driver Behaviour Questionnaire: A follow-up study*. Accident Analysis & Prevention 38(2) 2006.
[18] Useche, S.A. Alonso, F. Faus, M. Cervantes Trejo, A. Castaneda, I. Oviedo-Trespalacios, O. *It?s okay because I?m just driving: an exploration of self-reported mobile phone use among Mexican drivers*. PeerJ 12:e16899. 2024.
[19] U.S. Department of Transportation. *Traffic Analysis Tools Program. Next Generation Simulation*. https://ops.fhwa.dot.gov/trafficanalysistools/ngsim.htm
[20] Vanguardia. *Saltillo; el problema de movilidad urbana ha sido sobre diagnosticado*. 2023. https://vanguardia.com.mx/opinion/saltillo-el-problema-de-movilidad-urbana-ha-sido-sobre-diagnosticado-MN7791097
[21] Zhu, M. Wang, X. Tarko, A. Fang, S. *Modeling car-following behavior on urban expressways in Shanghai: A naturalistic driving study*. Transportation Research Part C 93. 2018
[22] Ylizaliturri-Salcedo, M.A. Tentori, M. Garcia-Macias, J.A. *Detecting Aggressive Driving Behavior with Participatory Sensing. In: García-Chamizo, J., Fortino, G., Ochoa, S. (eds) Ubiquitous Computing and Ambient Intelligence. Sensing, Processing, and Using Environmental Information. UCAmI 2015*. Lecture Notes in Computer Science 9454. Springer, Cham. 2015.
[23] Zócalo. *Atiborran Saltillo 500 mil autos al dia; usan simulador para reducir tráfico*. 2024. https://www.zocalo.com.mx/con-simulador-de-trafico-implan-realizo-estudio-de-vialidades-en-saltillo
[24] http://www.economia.gob.mx/datamexico/es/profile/geo/saltillo#economia-comercio-internacional
[25] https://github.com/numericfcfm/Numerics-for-ode

[26] https://sinegi.page.link/AVox

Pedro Reyes-Pérez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a
Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: prp@xanum.uam.mx

Jaime Burgos García y Carolina Ramos-Durán
Universidad Autónoma de Coahuila,
Unidad Saltillo,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
Prol. David Berlanga S/N. Edificio A. Unidad Camporredondo
Saltillo, C.P. 25020 Coahuila
e-mail: jburgos@uadec.edu.mx
e-mail: dura.c@uadec.edu.mx

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 77-87.
Recibido 29-08-2024. Aceptado 06-08-25.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/alagza



POLINOMIOS Y EL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

ALEJANDRO AGUILAR ZAVOZNIK

Resumen. Estudiaremos una forma de usar polinomios como funciones de verdad. Mediante éstos, podemos utilizar elementos algebraicos para comparar dos fórmulas bien formadas, así como verificar si un argumento es válido.

En los cursos de lógica, usualmente se utilizan las tablas de verdad para demostrar las propiedades elementales de las proposiciones. Una alternativa es utilizar funciones de verdad para esto, pero la mayoría de los libros de texto apropiados para este nivel no suelen definir este concepto o lo muestran como una curiosidad. En este trabajo estudiaremos una forma de usarlas, ya sea en lugar de o además de las tablas de verdad.

En la primera sección se verá una forma de definir los conceptos básicos del cálculo de proposiciones sin usar tablas de verdad. La presentación mezcla ideas de [1] y [7], pero se modifica la notación. Además de esta modalidad, otra forma de planear un curso es comenzando con tablas de verdad y, posteriormente, introduciendo el concepto de función de verdad como una alternativa con la que conseguimos los mismos resultados.

A partir de la segunda sección se mostrará cómo se pueden utilizar las funciones de verdad para demostrar algunas propiedades básicas del cálculo de proposiciones.

Para que este artículo sea breve, los temas se presentarán asumiendo que el lector tiene conocimientos básicos sobre conjuntos y funciones. Junto con los ya mencionados [1] y [7], los siguientes textos son opciones para estudiar los antecedentes: [2], [3] y [4].

Las personas interesadas en temas más profundos relacionados con las funciones de verdad pueden consultar los libros [5] y [6].

1. Notación y antecedentes

Una *proposición* es una afirmación que toma exactamente uno de dos valores: verdadero (V) o falso (F). Frases como "La mochila de Ana es roja" o "El primer día del año es el 25 de octubre" son dos proposiciones pues podemos decidir si son verdaderas o falsas. Sin embargo, nosotros nos concentraremos en un enfoque abstracto, no nos importará qué es lo que dice, solamente nos preocuparemos por su valor de verdad. Comenzaremos viendo como construir frases, a las que llamaremos *fórmulas bien formadas*, y posteriormente veremos como obtener su valor de verdad.

Para construir fórmulas en el cálculo de proposiciones usaremos dos tipos de símbolos, por un lado, las letras minúsculas (por lo general comenzando con p) a las que llamaremos *proposiciones atómicas* o *letras proposicionales*. Por otro lado, tenemos los *operadores booleanos*, que en nuestro caso usaremos cinco: la *negación* ($\neg$), la *conjunción* ($\wedge$), la *disyunción* ($\vee$), la *implicación* ($\Rightarrow$) y la *equivalencia* ($\Leftrightarrow$). El primero es un *operador unario*, mientras que los otros cuatro son *operadores binarios*.

Definimos de forma recursiva el concepto de fórmula bien formada (fbf)[1] de la siguiente manera:

- Una letra proposicional es una fbf.
- Si α es una fbf, $\neg(\alpha)$ es una fbf.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03B05, 06E30.
Palabras clave. Funciones de verdad, cálculo de proposiciones, polinomios.

[1]Algunas referencias, como [1], utiliza el nómbre fórmula, mientras que otras como [7], las llaman fórmulas bien formadas.

- Si α, β son fbf y $\circ$ es un operador booleano binario, $(\alpha \circ \beta)$ es una fbf.
- Cualquier cosa que no se construya con las reglas anteriores no es una fbf.

Si seguimos lo anterior de forma literal, acabaremos con fórmulas saturadas de paréntesis, por lo que en ocasiones nos conviene omitir algunos. Para esto, utilizaremos el siguiente orden de prelación para los operadores booleanos: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Así, podemos agregar:

- Si α es una fbf, $\neg\alpha$ es una fbf.
- Si α, β son fbf y $\circ$ es un operador booleano binario, $\alpha \circ \beta$ es una fbf.

A continuación veremos, por un lado, algunas fórmulas con los paréntesis mínimos y, por otro, la misma con todos los paréntesis.

$p \wedge \neg q \vee r$	$\Big(\Big(p \wedge (\neg q)\Big) \vee r\Big)$
$p \vee q \wedge r$	$\Big(p \vee (q \wedge r)\Big)$
$(p \vee q) \wedge r$	$\Big((p \vee q) \wedge r\Big)$
$\neg p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$	$\Big((\neg p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)\Big)$
$p \wedge q \Rightarrow (r \Leftrightarrow t)$	$\Big((p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow t)\Big)$

Dada una fbf α, $\mathfrak{P}_\alpha$ es el conjunto de las proposiciones atómicas utilizadas en α. Una *interpretación* de α es una función $\varphi : \mathfrak{P}_\alpha \to \{V, F\}$. Es decir, le asignamos valores de verdad a todas las proposiciones atómicas que utiliza α.

Por ejemplo, si $\alpha = (p \vee q) \wedge r$, la siguiente es una interpretación de α:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= V \\ \varphi(q) &= F \\ \varphi(r) &= V. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto con k proposiciones, definimos

$$\mathfrak{P}_\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathfrak{P}_\alpha.$$

Una interpretación de $\mathcal{A}$ es una función $\varphi : \mathfrak{P}_\mathcal{A} \to \{V, F\}$.

Dada una fbf, α, y una interpretación φ de ésta, el *valor de verdad* de α bajo φ lo denotaremos $v(\varphi, \alpha)$. Para calcular esto, debemos de considerar las siguientes reglas donde α, β son proposiciones y, cuando sea necesario, el conjunto de atómos será $\mathfrak{P}_{\{\alpha,\beta\}}$:

- Si α es una letra proposicional, $v(\varphi, \alpha) = \varphi(\alpha)$.
- $v\Big(\varphi, (\alpha)\Big) = v(\varphi, \alpha)$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$, $v(\varphi, \neg\alpha) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = F$, $v(\varphi, \neg\alpha) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = V$, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = V$, en cualquier otro caso, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = F$, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = F$, si no, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$ y $v(\varphi, \beta) = F$, entonces $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = F$, en cualquier otro caso $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta)$, entonces $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = V$; si $v(\varphi, \alpha) \neq v(\varphi, \beta)$, $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = F$.

La necesidad de estas reglas es una de las desventajas de usar únicamente funciones de verdad, pues es más claro cuando lo anterior se presenta mediante tablas de verdad, las que podemos construir como sigue. Dada una fbf α, colocamos una columna por cada elemento de $\mathfrak{P}_\alpha$ y una para α. Por cada interpretación de α, tendremos un renglón. Por ejemplo, la tabla de verdad de $\neg p$ es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Dado un operador binario, $\circ$, $p \circ q$ tiene cuatro interpretaciones posibles, por lo que tenemos esta cantidad de renglones.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Sean $\alpha = \Big(p \vee (q \Rightarrow \neg r)\Big) \Leftrightarrow (s \wedge t)$ y φ la interpretación:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= F \\ \varphi(q) &= V \\ \varphi(r) &= V \\ \varphi(s) &= F \\ \varphi(t) &= V. \end{aligned}$$

Podemos obtener $v(\varphi, \alpha)$ como sigue, utilizando las reglas que definimos anteriormente:

$$\begin{gathered} v(\varphi, \neg r) = F \\ v(\varphi, q \Rightarrow \neg r) = F \\ v\Big(\varphi, p \vee (q \Rightarrow r)\Big) = F \\ v(\varphi, s \wedge t) = F \end{gathered}$$

y, finalmente, utilizando los dos últimos resultados junto con la regla de la equivalencia

$$v(\varphi, \alpha) = V.$$

En ocasiones, en lugar del símbolo $\Leftrightarrow$ utilizaremos $\equiv$. El primero lo usaremos cuando sea parte de una fórmula bien formada; el segundo, cuando comparemos dos fbf. El primero es parte del *lenguaje* que estamos estudiando, mientras que el segundo es parte del *metalenguaje* (ver la sección 2.3.1 de [1] o la sección 1.3 de [7] para más detalles).

2. Funciones de verdad de proposiciones con un operador booleano

Frecuentemente, los valores "verdadero" y "falso" de una proposición se intercambian por 1 y 0 respectivamente. Para distinguir entre estas dos versiones, usaremos las letras mayúsculas cuando trabajemos con números. Así, la proposición atómica p estará asociada a la *variable binaria* P.

Una de las ventajas de la versión numérica es que podemos usar operaciones algebraicas para resolver problemas del cálculo de proposiciones. En particular, podemos encontrar una función que representa una proposición. A esto se le conoce como *funciones de verdad* y, como ya se mencionó, son una alternativa a las tablas de verdad.

La mayoría de los libros de lógica no mencionan las funciones de verdad o únicamente hacen una breve presentación. Adicionalmente, existen varias opciones para tratarlas, debido a que distintas expresiones algebraicas, restringidas al dominio $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ dan el mismo resultado; en particular, [7] utiliza la función de verdad mín(P, Q) para representar $p \wedge q$ y máx(P, Q) para $p \vee q$. Podemos notar que, si el dominio es $\mathcal{B}$:

$$\text{mín}(x, y) = xy,$$

mientras que

$$\text{máx}(x, y) = x + y - xy.$$

Nosotros estaremos utilizando polinomios, por lo que preferiremos la segunda forma. Más adelante se verá la utilidad de esto. A continuación, vamos a encontrar funciones para cada uno de los operadores binarios que definimos anteriormente.

Si α es una fbf, $\mathrm{FV}(\alpha) = f$ indicará que f es una función de verdad que representa a la fbf α. Agregando ciertas restricciones que mencionaremos posteriormente, $\mathrm{FV}(\alpha)$ es una función cuyo dominio son las fórmulas bien formadas y su codominio son los polinomios con coeficientes enteros; recalcando el hecho de que, por ser función, a cada fbf le corresponde exactamente un polinomio.

Podemos notar que las siguientes funciones cumplen con los resultados mostrados en la sección anterior:

PROPOSICIÓN 1. *Sean p, q proposiciones y P, Q variables asociadas a éstas. Entonces:*

1. $\mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$.
2. $\mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.
3. $\mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ$.
4. $\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$.
5. $\mathrm{FV}(p \Leftrightarrow q) = 1 - P - Q + 2PQ$.

Hay dos formas de presentar lo anterior en un curso. Por un lado, si no se usarán tablas de verdad, se pueden definir estas cinco y luego se verifica que coincide con las propiedades de v que se vieron en la sección anterior. La segunda opción es demostrando las siguientes propiedades usando tablas de verdad: $p \vee q \equiv \neg(p \wedge q)$, $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ y $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Posteriormente, se verifica que las primeras dos funciones son claramente equivalentes a las tablas correspondientes, y usando estas propiedades se pueden deducir las reglas de inferencia de las últimas tres.

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(p \vee q) &= \mathrm{FV}(\neg(\neg p \wedge \neg q)) \\
&= 1 - \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q) \\
&= 1 - \Big(\mathrm{FV}(\neg p)\mathrm{FV}(\neg q)\Big) \\
&= 1 - \Big((1-P)(1-Q)\Big) \\
&= P + Q - PQ
\end{aligned}$$

Notemos que el procedimiento se hace de afuera hacia adentro. Por ejemplo, en el primer renglón comenzamos con la negación que está a la izquierda, aplicamos la función de verdad que le corresponde. Si asignamos $\alpha = \neg p \wedge \neg q$, entonces $p \vee q \equiv \neg\alpha$, por lo que

$$\mathrm{FV}(p \vee q) = \mathrm{FV}(\neg\alpha) = 1 - \mathrm{FV}(\alpha) = 1 - \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q).$$

El resto del procedimiento se hace de esta manera, siempre yendo de afuera hacia adentro.

De forma análoga, con la identidad $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ obtenemos

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ.$$

Es importante notar que el término que se resta es el que está a la izquierda, por lo que $\mathrm{FV}(q \Rightarrow p) = 1 - Q + QP$.

Para la equivalencia, primero debemos de mencionar la siguiente afirmación obvia que estaremos usando a lo largo de todo este trabajo.

LEMA 2. *Si P es una variable cuyos valores están en $\mathcal{B}$ y k un entero positivo, entonces $P = P^k$.*

A partir de lo anterior y de la equivalencia $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(p \Leftrightarrow q) &= \mathrm{FV}\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\Big) \\
&= \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) \cdot \mathrm{FV}(q \Rightarrow p) \\
&= (1 - P + PQ)(1 - Q + QP) \\
&= 1 - Q + QP - P + PQ - P^2Q + PQ - PQ^2 + P^2Q^2 \\
&= 1 - P - Q + 2PQ
\end{aligned}$$

Notemos que, por el lema anterior, podemos cancelar PQ con $-P^2Q$ y tenemos $P^2Q^2 = PQ$.

A continuación se presentan otras operaciones booleanas que se suelen utilizar en algunos lenguajes de programación.

1. Disyunción exclusiva (xor). $p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$. $\mathrm{FV}(p \oplus q) = P + Q - 2PQ$.
2. Incompatibilidad (nand). $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$. $\mathrm{FV}(p \uparrow q) = 1 - PQ$.
3. Negación disjunta (nor). $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$. $\mathrm{FV}(p \downarrow q) = 1 - P - Q + PQ$.

Usando estos resultados podemos hallar la función de cualquier proposición, por ejemplo, vamos a calcular lo siguiente.

$$X = \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r \Rightarrow (s \vee t) \vee \neg u\Big).$$

Tomando en cuenta que lo siguiente se utilizará dos veces, definamos

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) \\ &= \mathrm{FV}(p \vee \neg q) \cdot \mathrm{FV}(r) \\ &= \Big(P + (1-Q) - P(1-Q)\Big) \cdot R \\ &= R - QR + PQR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 - \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) + \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) \cdot \mathrm{FV}\Big((s \vee t) \vee \neg u\Big) \\ &= 1 - Y + Y \cdot \Big(\mathrm{FV}(s \vee t) + \mathrm{FV}(\neg u) - \mathrm{FV}(s \vee t) \cdot \mathrm{FV}(\neg u)\Big) \\ &= 1 - Y + Y\Big((S + T - ST) + (1-U) - (S + T - ST)(1-U)\Big) \\ &= 1 - Y + Y(SU + TU - STU + 1 - U) \\ &= 1 + Y\Big(\cancel{-1} + (SU + TU - STU + \cancel{1} - U)\Big) \\ &= 1 + (R - QR + PQR)(-U + SU + TU - STU) \\ &= 1 - RU + QRU + RSU + RTU - PQRU - QRSU - QRTU \\ &\quad - RSTU + PQRSU + PQRTU + QRSTU - PQRSTU. \end{aligned}$$

Los resultados los estaremos ordenando de tal forma que el número de variables que aparece en cada sumando sea no decreciente y donde las letras en cada uno estén en orden alfabético, como en el ejemplo anterior.

Si bien, el trabajo algebraico que realizamos al resolver estos problemas parece arduo, hay que tomar en cuenta que la tabla de verdad correspondiente tiene sesenta y cuatro renglones y hay que hacer siete columnas para obtener el resultado final.

Para hallar el valor de verdad de la proposición original con la interpretación $\varphi(p) = F$, $\varphi(q) = V$, $\varphi(r) = V$, $\varphi(s) = F$, $\varphi(t) = F$ y $\varphi(u) = V$, podemos calcular X usando $P = 0, Q = 1, R = 1, S = 0, T = 0, U = 1$.

$$X = 1 - 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 1.$$

Es importante notar que en el caso de la implicación, puede resultar útil factorizar previamente la función como sigue:

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ = 1 + P(Q - 1).$$

Esto facilitará el trabajo cuando $\mathrm{FV}(q)$ tenga el sumando 1. Por ejemplo:

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow \neg q) = 1 + P\Big(\mathrm{FV}(\neg q) - 1\Big) = 1 + P\Big((\cancel{1} - Q) - \cancel{1}\Big) = 1 - PQ.$$

3. Unicidad

Al conjunto de variables de una función de verdad f lo denotaremos $\mathfrak{P}_f$. Una *interpretación* de f es una función $\psi : \mathfrak{P}_f \to \mathcal{B}$. Dada una función de verdad f y una interpretación ψ, denotaremos $v(\psi, f)$ como el valor de f donde cada una de las variables $X \in \mathfrak{P}_f$ toma el valor $\psi(X)$. En esta sección vamos a demostrar que dada una función de verdad f, existe un único polinomio $g : \mathcal{B}^{|\mathfrak{P}_f|} \to \mathcal{B}$ con ciertas restricciones, tal que, para cualquier interpretación ψ, $v(\varphi, f) = v(\psi, g)$, donde φ es ψ intercambiando 0,1 por V, F.

Sea $f : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}$ un polinomio. Diremos que f es válido si cumple dos condiciones:

1. La primera ya está indicada en el codominio de f, pero es importante recalcarlo: Para cualquier interpretación ψ_f de f, $v(\psi_f, f) \in \mathcal{B}$.
2. La segunda se justifica usando el lema 2. En cada monomio de f, cualquier variable $X \in \mathfrak{P}_f$ aparece, a lo más, elevada a la potencia 1.

TEOREMA 3. *Sean α, β dos fórmulas bien formadas con $\mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{P}_\beta$ y f_α, f_β dos polinomios tales que $\mathrm{FV}(\alpha) = f_\alpha$ y $\mathrm{FV}(\beta) = f_\beta$; f_α es el mismo polinomio que f_β si y sólo si $\alpha \equiv \beta$.*

Demostración. Es obvio que si los polinomios son el mismo, los valores de verdad de α y de β también lo son, con lo que la ida queda demostrada.

Ahora supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Usaremos inducción sobre $k = |\mathfrak{P}_\alpha| = |\mathfrak{P}_\beta|$.

Si $k = 1$, hay una proposición atómica, digamos p. En total hay cuatro funciones distintas:

$$\begin{array}{ll} f_1(0) = 0 & f_1(1) = 0 \\ f_2(0) = 0 & f_2(1) = 1 \\ f_3(0) = 1 & f_3(1) = 0 \\ f_4(0) = 1 & f_4(1) = 1 \end{array}$$

Vamos a ver que cada una de éstas solamente tiene un polinomio asociado y que cualquier otro polinomio con una variable no es válido.

Por un lado, dado que las potencias no pueden ser mayores que 1, las únicas posibilidades son de la forma $f_\alpha(P) = a_0 + a_1 P$. Para el caso en que $P = 0$, $f_\alpha = a_0$, por lo que $a_0 \in \mathcal{B}$. Ahora, si $P = 1$, $f(P) = a_0 + a_1$. Si $a_0 = 0$, entonces a_1 puede ser 0 ó 1; y si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ó $a_1 = -1$. En cualquier otro caso, el polinomio toma algún valor que no está en $\mathcal{B}$. De esta forma:

$$\begin{array}{rcl} f_1(P) & = & 0 \\ f_2(P) & = & P \\ f_3(P) & = & 1 - P \\ f_4(P) & = & 1. \end{array}$$

Esto demuestra el regreso cuando hay una variable.

Supongamos la propiedad se cumple para $k = \ell$ variables. Vamos a verificar el caso $k = \ell + 1$.

Sean α y β dos fórmulas bien formadas que en total utilizan $\ell + 1$ proposiciones atómicas, digamos, $p_1, p_2, \ldots, p_\ell, p_{\ell+1}$. Supongamos que $g(P_1, \ldots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \mathrm{FV}(\alpha)$ y $h(P_1, \ldots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \mathrm{FV}(\beta)$. Tomando en cuenta que la variable $P_{\ell+1}$ solamente puede aparecer a la potencia 0 ó 1, entonces:

$$\begin{array}{rcl} g(P_1, \ldots, P_{\ell+1}) & = & g_0(P_1, \ldots, P_\ell) + g_1(P_1, \ldots, P_\ell) P_{\ell+1} \\ h(P_1, \ldots, P_{\ell+1}) & = & h_0(P_1, \ldots, P_\ell) + h_1(P_1, \ldots, P_\ell) P_{\ell+1} \end{array}$$

Si $P_{\ell+1} = 0$, entonces

$$\begin{array}{rcl} g(P_1, \ldots, P_\ell, 0) & = & g_0(P_1, \ldots, P_\ell) \text{ y} \\ h(P_1, \ldots, P_\ell, 0) & = & h_0(P_1, \ldots, P_\ell). \end{array}$$

Usando la hipótesis de inducción, g_0 y h_0 son el mismo polinomio. Ahora supongamos que $P_{\ell+1} = 1$, $g = g_0 + g_1$ y $h = h_0 + h_1$. De nuevo, por hipótesis de inducción, g y h coinciden, y como $g_0 = h_0$, entonces g_1 y h_1 son el mismo polinomio. Por lo tanto, el regreso es verdadero en el caso $n = \ell + 1$. □

Lo relevante del resultado anterior es que podemos usar los polinomios para decidir si dos proposiciones son equivalentes, o incluso, si un argumento es válido. A continuación veremos los detalles para esto.

4. Demostración de equivalencias

Primero veremos como utilizar polinomios para demostrar que dos proposiciones son equivalentes. Esto es una aplicación directa del teorema demostrado en la sección anterior.

Proposición 4. *Sean p, q, r proposiciones. Tenemos las siguientes propiedades de los operadores booleanos.*

1. *Involución:* $\neg\neg p \equiv p$.
2. *Conmutatividad:* $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
3. *Conmutatividad:* $p \vee q \equiv q \vee p$.
4. *Asociatividad:* $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
5. *Asociatividad:* $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
6. *Distributividad:* $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
7. *Distributividad:* $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
8. *Ley de De Morgan:* $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
9. *Ley de De Morgan:* $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
10. *Absorción:* $(p \wedge q) \vee q \equiv q$.
11. *Absorción:* $(p \vee q) \wedge q \equiv q$.
12. *Forma disyuntiva de la implicación:* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
13. *Contrapositiva:* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow \neg p$.

Demostración. En cada caso, denotaremos X, Y a las funciones de verdad de cada uno de los dos lados de la equivalencia. Calcularemos X, Y y verificaremos que $X = Y$; con lo que, usando el teorema 3, se demuestra la afirmación. A continuación se muestran algunos casos. El resto se deja como ejercicio para el lector.

2. $X = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$. $Y = \mathrm{FV}(q \wedge p) = QP$.

5. $X = \mathrm{FV}\Big((p \vee q) \vee r\Big)$. $Y = \mathrm{FV}\Big(p \vee (q \vee r)\Big)$.

$$\begin{aligned} X &= (P + Q - PQ) + R - (P + Q - PQ)R \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= P + (Q + R - QR) - P(Q + R - QR) \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR \end{aligned}$$

6. $X = \mathrm{FV}\Big((p \wedge q) \vee r\Big)$. $Y = \mathrm{FV}\Big((p \vee r) \wedge (q \vee r)\Big)$.

$$X = R + PQ - PQR.$$

$$\begin{aligned} Y &= (P + R - PR)(Q + R - QR) \\ &= PQ + \cancel{PR} - \cancel{PQR} + \cancel{RQ} + R^2 - \cancel{QR^2} - PRQ - \cancel{PR^2} + \cancel{PR^2Q} \\ &= R + PQ - PQR. \end{aligned}$$

9. $X = \mathrm{FV}\Big(\neg(p \vee q)\Big)$, $Y = \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q)$.

$$X = 1 - \mathrm{FV}(p \vee q) = 1 - (P + Q - PQ) = 1 - P - Q + PQ.$$

$$Y = \mathrm{FV}(\neg p)\mathrm{FV}(\neg q) = (1 - P)(1 - Q) = 1 - P - Q + PQ.$$

12. $X = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y = \mathrm{FV}(\neg p \vee q)$.

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{FV}(\neg p) + Q - \mathrm{FV}(\neg p)Q \\ &= (1 - P) + Q - (1 - P)Q \\ &= 1 - P + PQ. \end{aligned}$$

□

En algunos casos, como en *2*, la demostración es muy sencilla, es simple consecuencia de la conmutatividad del producto, otras son un poco más complicadas, como *5*. En ocasiones un lado es más sencillo que el otro, como en *6*, mientras que a veces ambos tienen la misma complejidad como en *9*.

5. Consecuencias tautológicas

En esta sección veremos cómo usar funciones de verdad para analizar argumentos. En [3], [4] y [7] se puede profundizar más sobre estos temas.

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto de fórmulas bien formadas y β es una fbf, diremos que β es una consecuencia tautológica de $\mathcal{A}$ si y sólo si, para toda interpretación φ de $\mathcal{A}$ tal que $v(\varphi, \alpha_i) = V$ para $1 \leq i \leq k$, entonces $v(\varphi, \beta) = V$. Esto se denotará $\mathcal{A} \vDash \beta$. Usualmente, lo anterior se suele expresar como sigue:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \hline \therefore \beta \end{array}$$

Es importante notar que esto es equivalente a

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \Rightarrow \beta, \tag{1}$$

cuya función de verdad es

$$X = 1 + \mathrm{FV}(\alpha_1) \cdots \mathrm{FV}(\alpha_k)\Big(\mathrm{FV}(\beta) - 1\Big). \tag{2}$$

Para demostrar que $\mathcal{A} \vDash \beta$, basta con ver que $X = 1$, lo que implica que (1) es verdadera para cualquier interpretación.

Diremos que una fbf, α es una *tautología* si es verdadera para cualquier interpretación ($\varnothing \vDash \alpha$), es una *contradicción* si siempre es falsa ($\varnothing \vDash \neg\alpha$) y es una *contingencia* si no es ninguna de las dos anteriores. Usaremos los símbolos V_0, F_0 para representar una tautología y una contradicción, respectivamente. Claramente, $\mathrm{FV}(V_0) = 1$ y $\mathrm{FV}(F_0) = 0$.

De esta forma, vamos a demostrar que (1) es una tautología para ciertos casos específicos.

Proposición 5. *Las siguientes son consecuencias tautológicas:*

1. *Modus ponens*
$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$
2. *Modus tollens*
$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$
3. *Ley del silogismo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$
4. *Regla de conjunción*
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$
5. *Silogismo disyuntivo*
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$
6. *Regla de contradicción*
$$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$$
7. *Simplificación conjuntiva*
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$
8. *Amplificación disyuntiva*
$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$
9. *Demostración condicional*
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ \hline \therefore r \end{array}$$
10. *Demostración por casos*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ p \vee q \\ \hline \therefore r \end{array}$$
11. *Dilema constructivo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$
12. *Dilema destructivo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$$

Demostración. Probaremos algunos casos, el resto se deja al lector. Calcularemos las funciones de cada premisa, denotándola $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ y la función de la conclusión Z. Al final, se calculará la función del argumento $X = 1 + Y_1Y_2\cdots Y_k(Z-1)$, como se ve en (2). Si $X = 1$, entonces lo que se tiene es una consecuencia tautológica.

1. $Y_1 = \mathrm{FV}(p) = P$. $Y_2 = \mathrm{FV}(q) = Q$. $Z = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$X = 1 + PQ(PQ-1) = 1 + \cancel{P^2Q^2 - PQ} = 1.$$

2. $Y_1 = \mathrm{FV}(\neg q) = 1 - Q$. $Y_2 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Z = \mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1-Q)(1-P+PQ)(\cancel{1} - P + \cancel{1}) \\ &= 1 + (1-Q)(\cancel{-P + P^2} - P^2Q) \\ &= 1 \cancel{- P^2Q + P^2Q^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y = \mathrm{FV}(q \Rightarrow r) = 1 - Q + QR$. $Z = \mathrm{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1-P+PQ)(1-Q+QR)(1-P+PR-1) \\ &= 1 + (1-P+PQ)(-P + PQ - PQR + PR \cancel{- PQR + PQR^2}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. $Y_1 = \mathrm{FV}(p) = P$. $Y_2 = \mathrm{FV}(q) = Q$. $\mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P)(Q)(PQ-1) \\ &= 1 + \cancel{P^2Q^2 - PQ} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ$. $Y_2 = \mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$. $Z = \mathrm{FV}(q) = Q$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P+Q-PQ)(1-P)(Q-1) \\ &= 1 + (\cancel{P} + Q - PQ \cancel{- P^2} \cancel{- PQ + P^2Q})(Q-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

9. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$\begin{aligned} Y_2 &= \mathrm{FV}\Big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big) \\ &= 1 + P\Big(\mathrm{FV}(q \Rightarrow r) - 1\Big) \\ &= 1 + P\Big(1 - Q + QR - 1\Big) \\ &= 1 - PQ + PQR. \end{aligned}$$

$$Z = \mathrm{FV}(r) = R.$$

$$X = 1 + PQ(1 - PQ + PQR)(R-1) = 1.$$

12. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y_2 = \mathrm{FV}(r \Rightarrow s) = 1 - R + RS$.

$$\begin{aligned} Y_3 &= \mathrm{FV}(\neg q \vee \neg s) \\ &= (1-Q) + (1-S) - (1-Q)(1-S) \\ &= 2 \cancel{- Q - S} - 1 \cancel{+ Q + S} - QS \\ &= 1 - QS. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$Z = 1 - PR.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1Y_2Y_3(1-Z) \\ &= 1 + (1-P+PQ)(1-R+RS)(1-QS)(\cancel{1} - PR - \cancel{1}). \end{aligned}$$

Comenzaremos el cálculo de lo anterior con:

$$X_1 = (1-P+PQ)(-PR) = \cancel{-PR + P^2R} - P^2QR = -PQR.$$

$$X_2 = X_1(1-R+RS) = \cancel{-PQR + PQR^2} - PQR^2S = -PQRS.$$

$$X_3 = X_2(1-QS) = -PQRS + PQ^2RS^2 = 0.$$

Así,

$$X = 1 - 0 = 1.$$

□

Como ejemplo, queremos decidir si el siguiente argumentos es una consecuencia tautológica.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \neg q \\ r \wedge s \\ \neg s \vee t \\ \hline \therefore \neg p \wedge t \end{array}$$

Lo anterior se puede verificar usando la proposición 5:

(1)	$p \Rightarrow q$	premisa.
(2)	$r \Rightarrow \neg q$	premisa.
(3)	$r \wedge s$	premisa.
(4)	$\neg s \vee t$	premisa.
(5)	$\neg(\neg q) \Rightarrow \neg r$	contrapositiva de (2).
(6)	$q \Rightarrow \neg r$	por (5) e involución.
(7)	$p \Rightarrow \neg r$	por (1), (6) y la ley del silogismo.
(8)	r	por (3) y simplificación conjuntiva.
(9)	$s \wedge r$	por (3) y la conmutatividad de la conjunción.
(10)	s	por (9) y simplificación conjuntiva.
(11)	t	por (4), (10) y el silogismo disyuntivo, considerando que $\neg(\neg s) \equiv s$.
(12)	$\neg p$	por (7), (8) y el modus tollens.
(13)	$\neg p \wedge t$	por (11), (12) y la regla de conjunción.

Si bien, las funciones de verdad no son capaces de verificar que la demostración anterior no tiene errores, sí permite verificar que tenemos una consecuencia tautológica (lo que también se puede hacer mediante tablas de verdad):

$Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ.$
$Y_2 = \mathrm{FV}(r \Rightarrow \neg q) = 1 - R + R(1 - Q) = 1 - QR.$
$Y_3 = \mathrm{FV}(r \wedge s) = RS.$
$Y_4 = \mathrm{FV}(\neg s \vee t) = (1 - S) + T - (1 - S)T = 1 - S + ST.$
$Z = \mathrm{FV}(\neg p \wedge t) = (1 - P) + T - (1 - P)T = 1 - P + PT.$
$Y_1Y_2 = (1 - P + PQ)(1 - QR) = 1 - P + PQ - QR.$
$Y_1Y_2Y_3 = (1 - P + PQ - QR)(RS) = RS - PRS - QRS + PQRS.$

$$\begin{array}{rcl} Y_1Y_2Y_3Y_4 & = & (RS - PRS - QRS + PQRS)(1 - S + ST) \\ & = & RST - PRST - QRST + PQRST. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X & = & 1 + Y_1Y_2Y_3Y_4(Z - 1) \\ & = & 1 + (RST - PRST - QRST + PQRST)(1 - P + PT - 1) \\ & = & 1. \end{array}$$

Ahora consideremos el argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ r \Leftrightarrow t \\ \hline \therefore t \end{array}$$

$Y_1 = \mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ.$
$Y_2 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR.$
$Y_3 = \mathrm{FV}(r \Leftrightarrow t) = 1 - R - T + 2RT.$
$Z = \mathrm{FV}(t) = T.$
$Y_1Y_2 = (P + Q - PQ)(1 - P + PR) = Q - PQ + PR.$

$$\begin{array}{rcl} Y_1Y_2Y_3 & = & (Q - PQ + PR)(1 - R - T + 2RT) \\ & = & Q - PQ - QR - QT + PQR + PQT + PRT + 2QRT - 2PQRT. \end{array}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1Y_2Y_3(Z-1) \\ &= 1 - Q + PQ + QR + QT - PQR - PQT - QRT + PQRT \end{aligned}$$

En este caso, la función de verdad no es 1, por lo que no tenemos una consecuencia tautológica. Si queremos encontrar una interpretación que muestre lo anterior, podemos resolver la ecuación $X = 0$. Buscamos un 0 usando los primeros sumandos del polinomio $1 - Q = 0$, con lo que $Q = 1$. A partir de ahí, queremos que el resto de los monomios sean 0, lo que conseguimos con $P = R = T = 0$.

En el caso de la proposición

$$(p \vee q) \wedge (r \vee t) \wedge (\neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \vee t),$$

la función de verdad es

$$X = 1 - PR - PT + PQR + PQT + 2PRT - 2PQRT.$$

Si queremos encontrar una interpretación que cumpla las mismas condiciones que el ejemplo anterior, de nuevo, tomamos monomios del principio que hagan que el valor sea 0. En este caso, $1 - PR = 0$ con lo que $P = R = 0$. Notemos que, por la forma en la que propusimos ordenar los sumandos, los siguientes cumplen alguna de dos condiciones:

1. Tienen el mismo número de variables que PR, pero no son las mismas.
2. Tiene más variables que PR.

Así, si el resto de las variables son 0, en este caso $Q = T = 0$, tendremos que $X - (1 - PR) = 0$; ya sea porque alguna variable que no es común vale 0 o, en el segundo caso, porque incluso si usa P y R, habrá alguna adicional igual a 0. Por ejemplo, $PT = 0$, ya que T es una variable que no usaba PR, mientras que $2PRT = 0$ ya que, aunque $PR = 1$, $T = 0$. Si, por el contrario, queremos una interpretación tal que $X = 1$, es obvio que $P = Q = R = T = 0$ sirve.

Con esto concluimos nuestro estudio de las funciones de verdad. Hemos visto cómo el uso de polinomios puede ser empleado para trabajar con proposiciones. Si bien, en algunas ocasiones es necesario realizar varias operaciones para llegar al resultado simplificado, el trabajo para hacer algo equivalente con tablas de verdad también puede ser muy laborioso.

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece los comentarios del árbitro anónimo, los que ayudaron a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] Ben-Ari M, *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer, 3a ed. 2013.
[2] Gerstein L J, *Introduction to Mathematical Structures and Proof*, Springer, 2a ed. 2012.
[3] Grimaldi R P, *Matemáticas discretas y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Addison-Wesley, 3a ed. 1997.
[4] Hein J L, *Discrete structures, logic, and computability*. Jones & Bartlett Learning, 4a ed. 2016.
[5] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Examples and Exercises*, Springer, 2009.
[6] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Binary Models for Computer Science*. Springer, 2a ed. 2019.
[7] Solís Daun J E, Torres Falcón Y, *Lógica Matemática*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1995.

Alejandro Aguilar Zavoznik
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ciencias Básicas.
Av. San Pablo 420, Col. Nueva el Rosario
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02128 Ciudad de México.
e-mail: aaz@azc.uam.mx

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 89-231
Recibido 7-05-2025. Aceptado 31-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/luvato

USO DE LA HERRAMIENTA DE SIMULACIÓN MATLAB PARA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SUS APLICACIONES

LUIS A. VÁSQUEZ TOLEDO

Resumen

En estas notas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, que son necesarias para un primer estudio, matemáticamente riguroso, de la mecánica cuántica. En la última parte incluimos una introducción axiomática a la mecánica cuántica y una breve exposición del modelo del oscilador armónico y de la teoría de estados cuánticos Gaussianos.

Introducción

Las herramientas de simulación, hoy día, juegan un papel indispensable en la vida académica y profesional en diversos aspectos (laboral, personal, familiar, de entretenimiento, de negocios, etc.). Una herramienta muy utilizada en la actualidad en distintas disciplinas es MATLAB. MATLAB es un programa comercial que permite realizar una gran variedad de cálculos matemáticos y técnicos, es un potente lenguaje diseñado para computación técnica. El nombre de MATLAB proviene de MATrix LABoratory, puede ser utilizado en computación matemática, modelado y simulación, análisis y procesamiento de datos, visualización y representación de gráficos, así como para el desarrollo de algoritmos.

MATLAB es ampliamente conocido y utilizado en universidades e institutos para el aprendizaje en cursos básicos y avanzados de matemáticas, ciencias y, especialmente, ingeniería. Recientemente la Universidad Autónoma Metropolitana adquirió la licencia con una suscripción de "Campus-Wide License de MATLAB" para todo el personal y alumnos. Está disponible para las plataformas Unix, Windows, macOS y GNU/Linux.

Una herramienta de simulación es un componente fundamental para el diseño, la implementación y el monitoreo de los sistemas, permiten predecir el comportamiento de diferentes eventos que se pueden presentar en el sistema, por lo que el objetivo primordial del presente manual está dirigido a estudiantes que utilizan MATLAB por primera vez y que no tienen conocimientos previos sobre programación. Este manual se puede utilizar como un libro de texto para estudiantes de los primeros cursos de ingeniería y ciencias básicas, así como para estudiantes avanzados o incluso para seminarios orientados al aprendizaje de MATLAB. El presente manual también pretende ser una referencia en cursos más avanzados de ciencias e ingeniería, donde MATLAB se utilice básicamente como una herramienta para la resolución de problemas.

En la unidad 1 "Fundamentos de MATLAB", el objetivo es aprender los fundamentos de: operaciones básicas, creación de funciones, etc. Al final de la sesión debemos estar en condiciones

de crear también ficheros guión ("script") y funciones sencillas.

En la unidad 2 "Gráficas con MATLAB" se adentra al alumno en el diseño de funciones que sirvan para mostrar gráficamente resultados. Las gráficas en el entorno de computación con MATLAB son una parte natural, es decir, son sencillas. La gráfica de los resultados de los cálculos puede efectuarse con algunos comandos. Esta unidad se escribió con la intención de ayudar al lector a hacer precisamente esto.

La unidad 3 "Aplicaciones en Comunicaciones Analógicas y Comunicaciones Digitales", se enfoca en mostrar aplicaciones que se utilizan en campos importantes en Telecomunicaciones. Algunas de las aplicaciones son: el teorema de muestreo, el proceso de cuantización y codificación, la modulación en amplitud, los códigos de línea, densidad espectral de potencia, etc. En este capítulo se desarrolla la parte teórica y el desarrollo matemática de las posibles aplicaciones.

En la unidad 4 "Series y Transformada de Fourier" se adentra al alumno al manejo de MATLAB para resolver series de Fourier y trasformada de Fourier para la representación de señales periódicas y las no periódicas determinísticas respectivamente. También se muestra la parte teórica y el desarrollo matemático de la serie y transformada de Fourier.

En la unidad 5 "Aplicaciones en Propagación y Desvanecimientos" se analizan y simulan los fenómenos presentes en la propagación de la señal en el espacio libre, como son canales con desvanecimientos lentos, canales con desvanecimientos rápidos, radio enlace, zonas de Fresnel, cálculo de altura de las torres, entre otros. Cabe mencionar que estos análisis pueden servir para los sistemas celulares 5G, ya que una de las propuestas para 5G es el uso de nuevas técnicas de acceso al medio, NOMA (acceso múltiple no ortogonal), en el cual uno de los requerimientos es calcular las ganancias de canal de cada usuario, para el cual es necesario el cálculo de los desvanecimientos como se realiza en esta unidad.

En la unidad 6 "Aplicaciones en Modulación y Telefonía", se tratarán ejemplos sobre modulación QAM y se calcula la probabilidad de bit erróneo, se simulan redes jerárquicas, utilizadas en la telefonía y se calcula la probabilidad de bloqueo.

En la unidad 7 "Aplicaciones en Sistemas Celulares", se enfoca en mostrar la simulación de celdas celulares, usuarios con movimientos en las celdas. Esto puede servir para analizar el comportamiento de los usuarios en una red 5G. También se muestra un ejemplo para NOMA en una red 5G.

Finalmente, MATLAB nos ofrece una herramienta llamada Simulink, la cual es un entorno de simulación multidominio y diseño basado en modelos mediante diagrama de bloques, esto se aborda en la unidad 8 "Introducción a Simulink". En la **Tabla 1** se presentan las UEA's en las que se pueden aplicar los temas desarrollados en este manual.

Tabla 1: Unidades Enseñanza-Aprendizaje Licenciatura.

División	**CBI**	
Clave	**UEA**	**Plan de estudios**
2130039	Cálculo Integral	Licenciatura en Matemáticas
2131084	Temas Selectos de Matemáticas Aplicadas II	
2131106	Matemáticas Discretas	
2131110	Diseño de Experimentos	
2131145	Probabilidad I	
2131167	Simulación	
2150008	Introducción a la Programación	

Índice

1. Fundamentos de MatLab **6**
1.1. Ventana de comandos . . . 6
1.2. Funciones matemáticas en MATLAB . . . 8
1.2.1. Variables de arreglo . . . 8
1.3. Instrucciones de control (sentencias) . . . 13
1.3.1. Sentencia if . . . 13
1.3.2. Sentencia for . . . 13
1.3.3. Sentencia while . . . 14
1.3.4. Sentencia break . . . 14
1.4. Funciones que facilitan los cálculos . . . 15
1.4.1. Máximo y mínimo . . . 15
1.4.2. Sumatoria . . . 16
1.4.3. Ordenar . . . 16
1.4.4. Variables Aleatorias . . . 17
1.5. Creación de archivos M . . . 17
1.6. Crear archivos M de función . . . 18
1.6.1. Función que devuelve una sola variable . . . 19
1.6.2. Función que devuelve múltiples variables . . . 20
1.6.3. Función que utiliza otra función . . . 20
1.7. Cómo utilizar MATLAB con señales de tiempo continuo . . . 21

2. Gráficas con MATLAB **22**
2.1. Gráficas simples . . . 23
2.2. Gráficas con marcas . . . 24
2.3. Colores y tipos de líneas . . . 25
2.4. Eje y retícula . . . 26
2.4.1. Retícula . . . 28
2.5. Gráficas polares . . . 28
2.6. Gráficas logarítmicas y semilogarítmicas . . . 29
2.7. Múltiples curvas . . . 30
2.7.1. Retención . . . 31
2.7.2. Leyenda . . . 34
2.7.3. Figura . . . 35
2.8. Subgráficas . . . 35
2.9. Versión tridimensional de una gráfica . . . 36

3. Aplicaciones en Comunicaciones Analógicas y Digitales **37**
3.1. Conceptos básicos de señales . . . 37
3.1.1. Corrimiento de una señal en el tiempo . . . 39
3.1.2. Inversión de una señal en el tiempo . . . 40
3.1.3. Escalamiento de una señal en el tiempo . . . 42
3.1.4. Función escalón unitario y rampa unitaria . . . 44
3.1.5. El impulso . . . 48
3.1.6. Señales periódicas . . . 51
3.1.7. Señales pares e impares . . . 56
3.2. Teorema de Muestreo . . . 59
3.3. Cuantización . . . 65

3.4. Conversión Analógica a Digital (PCM) . . . 65
3.5. Modulación AM y FM . . . 68
3.6. Densidad Espectral de Potencia . . . 69
3.7. Código AMI . . . 75

4. Serie y Transformada de Fourier **77**
4.1. Serie de Fourier . . . 77
4.1.1. Representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia . 77
4.1.2. Serie trigonométrica de Fourier . . . 81
4.1.3. Serie exponencial compleja . . . 89
4.2. Transformada de Fourier . . . 95
4.3. Transformada inversa de Fourier . . . 98

5. Aplicaciones en propagación y desvanecimientos **98**
5.1. Patrón de Radiación . . . 98
5.2. Desvanecimientos . . . 100
5.3. Diseño de radioenlace . . . 103
5.3.1. Pérdida en el espacio libre . . . 105
5.3.2. Cálculo de zonas de Fresnel . . . 106
5.3.3. Cálculo de la altura de las antenas en un radioenlace . . . 108
5.3.4. Uso de antenas repetidoras . . . 109
5.3.5. Método de diseño . . . 109

6. Aplicaciones en Modulación y Telefonía **116**
6.1. 4QAM . . . 116
6.2. MPSK . . . 120
6.3. Telefonía . . . 120

7. Aplicaciones en Sistemas Celulares **123**
7.1. Celdas celulares . . . 124
7.2. Usuarios en las celdas celulares . . . 125
7.3. Esquema NOMA para 5G . . . 129

8. Introducción a SIMULINK **134**
8.1. Ingresar a SIMULINK . . . 135
8.2. Entorno de trabajo de SIMULINK . . . 135
8.3. Muestreo y Cuantización . . . 136

Referencias **143**

1. Fundamentos de MatLab

"Fundamentos de MatLab" es una sección que será útil al discente como un tutorial para aquellos que van iniciando su aprendizaje en **MATLAB**. Antes de iniciar a leer este material, recomendamos al alumnado instalar el software de **MATLAB** en su ordenador y, posterior a ello, abrir la ventana de comandos. La ventana de comandos es el espacio principal donde se ingresan los comandos, aquí el alumnado escribe instrucciones y puede ver los resultados al concluir las operaciones. La ventana de comandos en **MATLAB** es como la que se muestra en la **Figura 1**.

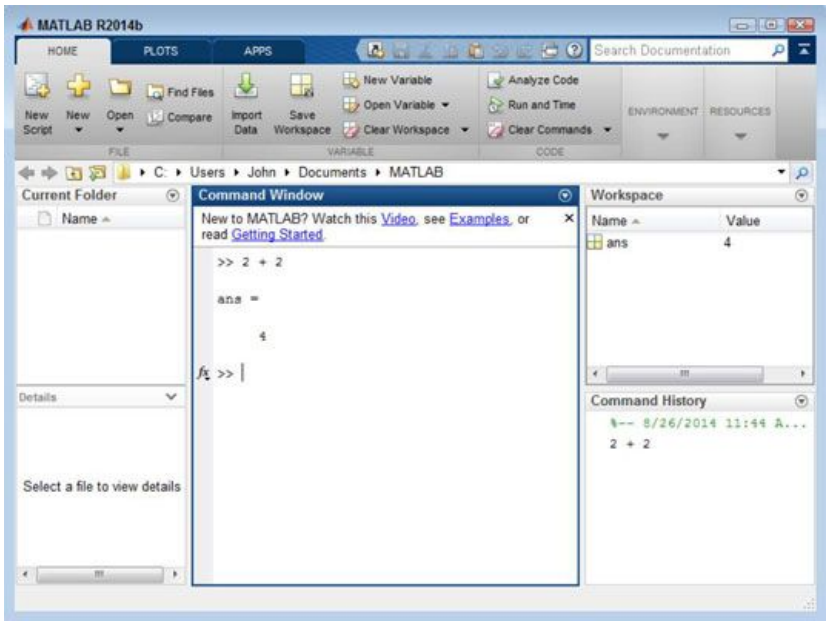


Figura 1: Ventana de comando en **MATLAB**.

1.1. Ventana de comandos

Una vez descargado e instalado el sofrware **MATLAB**, la instrucción para abrir **MATLAB** en un ordenador con sistema operativo *Unix* sería tecleando:

```
>matlab
```

Para abrir el sofrware **MATLAB** en *Macintosh* o *Windows*, haga clic en el icono de **MATLAB**. Una vez iniciado el software **MATLAB** aparece la ventana de comandos (ver **Figura 1**), en la cual aparece el siguiente símbolo>>. Seguido de este símbolo, se teclean los *"comandos"* que se explican en esta sección.

Si se desea salir de **MATLAB**, el procedimiento es similar para *Unix*, *Macintosh* o *Windows*, y se debe teclear la siguiente instrucción:

```
>>quit
```

Una de las instrucciones que se utiliza con mayor frecuencia en **MATLAB**, es la instrucción `help`. Esta instrucción despliega una explicación de los comandos y, en algunos casos, incluso se incluyen ejemplos que ayudan al alumnado a entender de manera sencilla y fácil cada uno de los comandos bajo cuestión. Un ejemplo sería el siguiente:

```
help log
```

Al teclear esta instrucción vemos que *log* significa logaritmo natural, y la función logaritmo base 10 se denotara como log_{10}.

Una de las principales ventajas que nos ofrece **MATLAB** radica en la flexibilidad para la gestión de las variables. Es decir, del hecho que no es necesario declarar los nombres de las variables, ni el tipo de variable, ni tampoco es necesario declarar la dimensión de un arreglo. Todo esto es debido a que los nombres de las variables en **MATLAB** no son diferentes para las variables enteras, reales y complejas, es decir, cualquier variable puede adoptar valores reales, complejos o enteros.

Como ya se mencionó, aunque no es necesario declarar los nombres de las variables, hay que tener mucho cuidado con las variables que se emplean, ya que algunas variables en el entorno de **MATLAB** tienen asignados ciertos valores, nombres de funciones o nombres de comandos.

Una forma rápida y sencilla de verificar si el nombre de una variable es válido en **MATLAB** sería ejecutándolo desde la ventana de comando. Es decir, que un ejmeplo de lo que acabamos de comentar sería introducir la instrucción `x=9`, si ésta es aceptada, generará una respuesta como la que se muestra a continuación:

```
>> x =
9
```

De lo contrario, si se intenta asignar un valor a la palabra `end`, es decir, si se introduce `end = 4`,se producirá un error, dado que `end` es una palabra reservada del lenguaje. Ahora, si se utilizan los comandos *sin* y *cos* como nombres de variables, es decir, que no tengan relación con las funciones trigonométricas cosenoidales, como las que se muestran a la derecha...

```
>> sin = 3
>> cos = sin * 2
```

...las operaciones continuarán ejecutándose, sin embargo, las funciones trigonométricas `sin` y `cos` dejarán de estar disponibles si han sido sobrescritas como nombres de variables, a menos que se utilice el comando `clear` o se reinicie el entorno de **MATLAB**, es decir, adquieren nuevamente la función `sin` y `cos`. Las variables i y j están reservadas para denotar el valor imaginario unitario, $\sqrt{-1}$; por tanto, si un cálculo incluye variables complejas es recomendable evitar el uso de i y j como variables definidas por el usuario con el fin de evitar conflictos o resultados incorrectos.

En la **Tabla 2** se presentan ejemplos de los nombres de variables reservados que tienen significado especial **(Gilat, 2008)**.

Tabla 2: Variables especiales.

Variable	Significado	Valor
eps	Épsilon	$2.2204e^{-16}$
pi	π	3.14159...
i y j	Unidad imaginaria	$\sqrt{-1}$
inf	Infinito	∞
NaN	No es número	
date	Fecha	
flops	Contador de operaciones de punto flotante	
nargin	Número de argumentos de entrada de una función	
nargout	Número de argumentos de salida de una función	

1.2. Funciones matemáticas en MATLAB

MATLAB cuenta con numerosas funciones matemáticas, que resuelven tareas especificas. En la **Tabla 3** se muestran algunas de estas funciones específicas **(Gilat, 2008)**.

Tabla 3: Variables especiales.

Función T.	Comentarios	Función T.	Comentarios
$sin(x)$		$\sqrt{(}x)$	Raíz cuadrada de x
$cos(x)$		$real(x)$	Parte real del valor complejo x
$tan(x)$		$imag(x)$	Parte imaginaria del valor complejo x
$asin(x)$		$conj(x)$	Conjugado complejo x
$acos(x)$		$round(x)$	Redondear al entero más cercano
$atan(x)$	$-\pi/2 \geq atan(x) \geq \pi/2$	$fix(x)$	Redondear al valor real hacia cero
$atan2(y,x)$	$-\pi \geq atan(y,x) \geq \pi$	$floor(x)$	Redondear x hacia $-\infty$
$sinh(x)$		$ceil(x)$	Redondear x hacia $+\infty$
$cosh(x)$		$sign(x)$	$+1$ si $x > 0$; -1 si $x < 0$
$tanh(x)$		$rem(x,y)$	Residuo al dividir: $x - y * fix(x/y)$
$asinh(x)$		$exp(x)$	Base exponencial e
$acosh(x)$		$log(x)$	Logaritmo base e
$abs(x)$	Valor absoluto de x	$log10(x)$	Logaritmo base 10
$angle(x)$	Ángulo de fase de un valor complejo		

1.2.1. Variables de arreglo

En **MATLAB**, se distinguen dos clases principales de variables tipo arreglo:

(a) Unidimensional

(b) Bidimensional

Variable de arreglo unidimensional. Los arreglos unidimensionales pueden adoptar la forma de una fila o una columna, lo que los vincula directamente con los conceptos de vectores fila y columna, respectivamente. En este contexto, un arreglo en forma de fila equivale a un *vector fila*, y uno en forma de columna corresponde a un *vector columna*.

En el entorno **MATLAB**, para definir los elementos de un *vector fila*, se separa cada uno de los elementos ya sea con un simple espacio o con una coma (`,`), y estos elementos se colocan entre corchetes (`[]`), como se indica en el siguiente ejemplo:

$$>> x = [1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9]$$

Que, como ya se mencionó antes, es lo mismo que tener:

$$>> x = [1, 3, 5, 7, 9]$$

Ahora veamos un ejemplo de la variable de arreglo tipo *vector fila*, en este se puede observar que la variable de arreglo tipo *vector fila "x"*, contiene los primeros 5 números impares. Sabiendo esto, se puede definir la la variable de arreglo tipo *vector fila* con un *incremento* o *decremento* fijo como se presenta a continuación:

$$>> x = 1 : 2 : 9$$

Aquí, el primer valor es el *límite inferior* del arreglo, el segundo valor nos indica el *incremento*, que en este ejemplo en específico es un incremento de 2 en 2, y el tercer valor es el *límite superior* del arreglo. Una vez mencionado esto, a continuación se presenta lo que da como resultado en el entorno:

$$x = 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9$$

Una vez que ya tenemos la variable de arreglo tipo *vector fila*, si requerimos conocer y desplegar (imprimir) un elemento en particular de este arreglo, lo que debemos teclear es la instrucción *x (subíndice)*. Aquí, el *"subíndice"* indica el elemento seleccionado del arreglo.

Ejemplo, si insertamos la instrucción $x(2)$, los arreglos se enumeran de 1 a n, estamos solicitando que se despliegue el valor contenido en la posición número dos del arreglo, a lo que el sistema mostrará en pantalla lo siguiente:

$$ans = 3$$

En el entorno **MATLAB**, para definir los elementos de un *vector columna* es muy similar a la de una variable de arreglo tipo *vector fila*, excepto que aquí, para separar cada uno de los elementos del arreglo se emplea el delimitador de punto y coma (`;`). A continuación se presenta un ejemplo de cómo se debe de declarar una variable de arreglo tipo *vector columna*:

$$>> x = [1; 3; 5; 7; 9]$$

Una vez declarado la variable de arreglo tipo *vector columna* se presenta a continuación lo que se produce en el entorno:

$$x = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

Podemos observar que al escribir la instrucción `x=[1;3;5;7;9]`, los elementos del arreglo se despliegan en pantalla como se observa arriba. De lo contrario, si no se desea la impresión de los elementos del arreglo se debe colocar al final de la instrucción el signo de punto y coma (`;`) como se presenta a continuación:

$$>> x = [1; 3; 5; 7; 9];$$

En el entorno de **MATLAB** podemos procesar operaciones básicas entre variables de arreglo como son:

(a) Suma

(b) Resta

(c) Multiplicación

(d) División

Si x y z son arreglos del mismo tipo (*vector fila* o *vector columna*) y, tienen la misma longitud (es decir, la misma cantidad de elementos), entonces x y z se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir empleando los operadores aritméticos de arreglos **(Gilat, 2008)**.

$$\begin{matrix} y = z + x \\ y = z - x \\ y = z. * x \\ y = z./x \end{matrix}$$

Ejemplo 1.1 Ejemplo de suma entre arreglos

$>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];$
$>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];$
$>> z = x + y;$

$>> z$

$z = 6\ 3\ 12\ 18\ 9\ 6$

■

Ejemplo 1.2 Ejemplo de resta entre arreglos

$>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];$
$>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];$
$>> z = x - y;$

$>> z$

$z = 2\ 1\ 4\ 6\ 3\ 2$

■

Ejemplo 1.3 Ejemplo de multiplicación entre arreglos

$>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];$
$>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];$
$>> z = x. * y;$

$>> z$

$z = 2\ 1\ 4\ 6\ 3\ 2$

■

Ejemplo 1.4 Ejemplo de división entre arreglos

$>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];$
$>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];$
$>> z = x./y;$

$>> z$

$z = 2\ 1\ 4\ 6\ 3\ 2$

■

Los operadores $.*$ y $./$ son operadores asignados para realizar la multiplicación y la división de arreglos respectivamente. El operador matemátio que realiza la potenciación de arreglos se ilustra a continuación:

$w = y.\hat{}2;$

Aquí se observa que se coloca un punto (.) antes del operador "^". En este caso, w se convierte en un vector de la misma longitud que y.

En algunas ocasiones, se requiere agregar elementos a los arreglos ya sea al principio o al final. Por ejemplo, consideremos el siguiente arreglo $x = [1, 3]$, al cual, se le desea agregar un elemento de valor 5 al final del arreglo. Para realizar esta acción, se debe escribir la instrucción es la siguiente:

$$>> x = [x, 5]$$

Ahora, si lo que se desea es agregar el elemento al principio del arreglo la instrucción sería la siguiente:

$$>> x = [5, x]$$

Por otro lado, si x es una variable de arreglo tipo *vector columna* basta con cambiar el signo de coma (`,`) por el signo de punto y coma (`;`). Si necesitamos conocer el número de elementos que contiene un arreglo se debe usar el comando `length( )`. Por ejemplo, si la variable de arreglo tipo *vector fila* es $x = [1, 3]$, la instrucción que se debe escribir para conocer el número de elementos que contiene el arreglo es `length(x)`, lo que despliega:

$$ans = 2$$

Variable de arreglo bidimensional. Las variables de arreglo bidimensional, que es lo mismo que una matriz en **MATLAB**, se puede definir con la siguiente instrucción:

$$b = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]$$

La instrucción anterior despliega lo siguiente:

$$b = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Una vez que se declara un arreglo bidimensional se puede acceder a un elemento en particular de este, por ejemplo, si se desea acceder al elemento de valor 4, el cual esta ubicado en la fila 2 y columna 1, entonces la instrucción para acceder a este elemento sería la siguiente:

$$b(2, 1)$$

En el manejo de *arreglos bidimensionales*, es posible referenciar una *fila* o *columna* completa mediante el operador de dos puntos (`:`). Ejemplificando lo anterior, la instrucción $b(1, :)$ denota

la primera *fila* de la matriz b, mientras que $b(:,3)$ hace referencia a su tercera *columna*.

Nota Ambos casos se interpretan como estructuras vectoriales unidimensionales.

1.3. Instrucciones de control (sentencias)

En esta sección se describirán las estructuras para las sentencias `if`, `for`, `while` y `break`. Antes de adentrarnos en las sentencia, a continuación presentaremos los operadores *mayor que*, *menor que*, *igual o mayor que*, *igual o menor que* y *diferente de* respectivamente **(Gilat, 2008)**:

$>$ $<$ $\geq$ $\leq$ $\sim=$

1.3.1. Sentencia if

La sentencia `if` siempre debe de terminar con la palabra reservada `end`, la sintaxis para esta sentencia es la siguiente:

$$\begin{array}{l} if(condición) \\ \quad > Operaciones \\ end \end{array}$$

La estructura condicional `if` puede complementarse también con las sentencias `else` o `elseif`, y estas servirán para evaluar múltiples condiciones. Es importante destacar que el operador `elseif` puede utilizarse sucesivamente y sin limitaciones, permitiendo así una verificación escalonada de tantos casos como sean necesarios. A continuación, se presenta un ejemplo de la estructura de varias sentencias `elseif` y `else`:

$$\begin{array}{l} \quad if(condición\ 1) \\ \quad\quad > Operación1 \\ elseif(condición\ 2) \\ \quad\quad > Operación2 \\ elseif(condición\ 3) \\ \quad\quad > Operación3 \\ \quad\quad\quad ... \\ \quad else \\ \quad\quad > OperaciónN \\ \quad end \end{array}$$

1.3.2. Sentencia for

En la estructura de la sentencia `for` siempre debe terminar con `end`. La sintaxis para una estructura de la sentencia `for` es la siguiente:

$$for\ variable = límite_{inferior} : incremento : límite_{superior}$$
$$> Operaciones$$
$$end$$

Se observa que la variable se inicializa con el valor de *límite inferior*, y la ejecución se detendrá cuando la variable alcance el valor del *límite superior*, esta se incrementará por pasos dependiendo del valor de la variable *incremento*.

1.3.3. Sentencia while

En la estructura de una sentencia `while` esta siempre se debe terminar con la palabra reservada `end`. La sintaxis para una estrcutura de la sentencia `while` es la siguiente:

$$while(condición)$$
$$> Operaciones$$
$$end$$

1.3.4. Sentencia break

La función de una sentencia `break` es la de terminar la ejecución de un ciclo `for` o `while`. Esta sentencia se emplea de la siguiente manera:

$$for\ variable = límite_{inferior} : incremento : límite_{superior}$$
$$if(condición), break, end$$
$$> Operaciones$$
$$end$$

Al ejecutar los comandos, **MATLAB** memoriza las variables utilizadas. Los valores de estos comandos permanecen en la memoria hasta que uno finaliza el programa de **MATLAB** o hasta que se borran las variables, ya sea de manera individual o de manera general. Si empleamos el comando `clear`, lo que sucederá es que borrará todas las variables guardadas, por otro lado, si solo se desea borrar algunas variables en específico, sus nombres se indican después de la palabra `clear`.

A continuación, se muestra el ejemplo para borrar una variable en específico:

$$>> clear\ \ x$$

Cuando utilizamos el comando `clc` lo que sucederá será que borraremos sólo la ventana de comandos, a continuación se presenta la sitaxis para este comando:

```
>> clc
```

1.4. Funciones que facilitan los cálculos

En está sección se describirán algunas funciones que nos ayudan a realizar cálculos y nos ahorran el desarrollo de líneas de código, así como tiempo **(Gilat, 2008)**.

1.4.1. Máximo y mínimo

Uno de los cálculos más utilizados en el entorno de **MATLAB** es encontrar el valor *máximo* o *mínimo* de un arreglo. Por ejemplo, consideremos un arreglo x como el que se muestra a continuación:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
```

Si se requiere hallar el elemento con valor *máximo* de este arreglo, se deberían escribir las instrucciones que se muestran a la derecha.

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> y = x(1);
>> for  k = 1 : length(x)
        if  x(k) > y
            y = x(k);
        else
            y = y;
        end
    end
```

Pero, en **MATLAB** está configurado el comando `max(variable)`. El cual, al ser aplicado a la variable x, lo que se desplegará al ejecutar dicho comando, será el valor *máximo* del arreglo, quedando almacenado en la variable y de la siguiente manera:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> y = max(x);
```

Comparando el resultado aplicando `max(x)` con el código anterior, se observa que utilizando las herramientas que ofrece **MATLAB** nos facilita y nos ahorra líneas de código. Analogamente, para conocer o desplegar el elemento de valor mínimo de un arreglo, podemos utilizar el comando `min`, como se muestra a continuación:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> y = min(x);
```

1.4.2. Sumatoria

Otro de los comandos que podemos encontrar en el entorno de **MATLAB**, es el comando *sum(variable)*, el cual realiza la suma discreta de los elementos de un vector o matriz x. Para los vectores tanto de fila como de columna, `sum` calcula la suma total de los elementos. Si x es una matriz, se calcula la suma discreta de cada columna y como resultado se obtiene un vector tipo fila, el cual estará formado por las sumas de todas las columnas. En resumen, la manera de realizar la suma varía según la estrucutra de los datos.

- Para **vectores** (tanto fila como columna), devuelve un escalar con la suma total de todos sus elementos.
- En el caso de **matrices**, opera a nivel columna, calculando la suma de cada columna y retornando un vector fila compuesto por estas sumas parciales.

A continuación se presentan ejemplos de lo antes descrito:

Ejemplo 1.5 Ejemplo de sumatoria de un vector

$>> sum([2, 1, 5]);$

$>> ans =$

8

■

Ejemplo 1.6 Ejemplo de sumatoria de una matriz

$>> sum([2, 1, 5; 9, 8, 5]);$

$>> ans =$

$11 \quad 9 \quad 10$

■

1.4.3. Ordenar

La función `sort` que se encuentra en el entorno de **MATLAB** ordena los elementos contenidos dentro de un vector de manera ascendente. El argumento puede ser un *vector fila*, un *vector columna* o una *matriz*. Su comportamiento varía según el tipo de entrada como se describe:

- Para vectores (fila o columna): La función ordena todos sus elementos.
- Para matrices: Se realiza el ordenamiento de manera independiente en cada una de las columnas.

A continuación, se presentan ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1.7 Ejemplo de ordenar de un vector

$>> sort([2, 1, 5]);$

$>> ans =$

$1 \quad 2 \quad 5$

■

Ejemplo 1.8 Ejemplo de ordenar de una matriz

$>> sum([9, 1, 5; 2, 8, 4]);$

$>> ans =$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & 5 \end{matrix}$$

■

1.4.4. Variables Aleatorias

Una de las ramas de las ciencias matemáticas más utilizadas en el análisis de sistemas de comunicaciones es la probabilidad, debido a que es necesario caracterizar los fenómenos que ocurren en el sistema. Y más específico, el estudio de la distribución uniforme. En el entorno de **MATLAB**, existe una herramienta para generar variables aleatorias distribuidas uniformemente (`rand`), y esta se logra con el comando $rand(n)$, donde n especifica el tamaño de la matriz de los números aleatorios que se deben generar. Si $n = 1$, se devuelve un solo número aleatorio que está entre 0 y 1. Si lo que se desea es generar una variable aleatoria con distribución normal (Gaussiana), el comando utilizado es `randn`.

1.5. Creación de archivos M

Hasta ahora, el trabajo se ha limitado a la ventana de comandos, ya que esta es apropiada si se ejecutan instrucciones breves, si no hay que teclear mucho código o si se desea hacer el llamado de alguna función. De no ser así, conviene que el usuario escriba un archivo *"M" de subrutina* o un archivo *"M" de función*, ya que permite guardar el archivo y, posteriormente, pueden realizarse correcciones tantas veces se necesite.

Para elaborar un archivo *"M"* en Macintosh o Windows, se deben seguir los siguientes pasos:

(a) Clic en el menú `File` (Archivo) en la parte superior de la ventana de comandos.

(b) En `New`, aparecerá una ventana nueva.

(c) Para guardar el archivo haga clic en `Save AS` del menú `File`.

(d) Guarde el archivo con el siguiente formato, `nombre.m` (ejemplo: `funcion.m`).

(e) El archivo puede ejecutarse desde la ventana de comando escribiendo el nombre del archivo sin la extensión seguido de `Enter` **(Gilat, 2008)**.

Para crear un archivo *"M"* en sistemas Unix inicie **MATLAB** desde el directorio destino donde se almacenarán los archivos. Abra simultáneamente un editor de texto en esa misma ubicación empleando cualquier programa de edición disponible. Modifique el contenido en la ventana del editor y guarde los cambios manteniendo la sesión activa. Asigne al archivo la extensión obligatoria `.m`. Después, nos dirigimos a la ventana de **MATLAB** y ejecutamos el código ingresando el nombre del archivo sin la extensión según lo indicado por **(Gilat, 2008)**.

El símbolo `%` dentro de archivos *"M"* denota comentarios, y todo el texto posterior a este caracter en la línea será ignorado durante la ejecución. Estos comentarios incorporados estratégicamente mejoran la documentación del código al explicar el propósito de cada una de las

variables y estructuras que conforman el archivo.

Ejemplo 1.9 Ejemplo de creación de un archivo *"M"* empleando el comando *rand*

Como ya se comentó en la sección anterior, el comando *rand* genera variables aleatorias con distribución uniforme entre 0 y 1, es decir, genera un número aleatorio ente estos dos números.

Si lanzamos una moneda legal, la probabilidad de que salga cara o salga cruz es la misma, es decir, de 0.5. Desarrolle el código que simule la acción de lanzar una moneda y que calcule la probabilidad de que salga cara.

Para dar solución a este problema, utilizaremos la definición de probabilidad relativa, la cual nos dice que para calcular la probabilidad de un evento, el evento se tiene que repetir un número grande de veces y, además, contabilizar los eventos que salen favorables. Una vez realizado esto, para el cálculo de la probabilidad sólo se toma el promedio, es decir, dividir el número de eventos favorables que se contabilizaron entre eventos totales.

A continuación presentamos el código que determina la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda.

Código 3.1.

Código

```
k=0;
t=10000;
for i=1:t
x=rand(1);
if x <= 0.5
k=k+1;
end
end
P=k/t
```

■

Nota Una de las grandes ventajas de los archivos *"M"* es que dentro de estos se pueden mandar a llamar a otros archivos *"M"*. Ahora a estos archivos se denominan archivos *"M" de función*.

1.6. Crear archivos M de función

Para desarrollar funciones propias en el entorno de **MATLAB**, las cuales pueden ser equivalentes a las subrutinas y funciones de otros lenguajes, se deben crear archivos *"M"* **(Gilat, 2008)**.

Para desarrollar funciones personalizadas en **MATLAB** equivalentes a subrutinas o funciones de otros lenguajes de programación se deben implementar archivos *"M"*. Estos archivos *"independientes"* contienen la definición completa de las funciones y operan como unidades modulares autocontenidas, y como se presenta en **(Gilat, 2008)**, las funciones almacenadas en archivos *"M"* externos cumplen el mismo rol estructural que las subrutinas en otros entornos de programación.

1.6.1. Función que devuelve una sola variable

En los sistemas de comunicaciones se requiere convertir señales contínuas a señales discretas en el tiempo, y este proceso se realizada midiendo la señal en momentos periódicos del tiempo. A este proceso se le conoce como *muestreo* y, en efecto, en el entorno de **MATLAB** podemos encontrar esta función a través del comando *sampling*. Consideremos la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x}$$

Suponiendo que el archivo *"M"* se guarda como *ec_a.m*, su código es el siguiente:

Código

Código 3.2.

```
1 function y=ec_a(x)
2 y=sin(x)./x;
```

Podemos observar del **código 3.2** que el nombre del archivo *"M"* es idéntico al nombre de la *función* (que aparece a la derecha del signo de igual). En el archivo *"M"* se utilizan los operadores aritméticos de arreglos, así el argumento x puede ser un número escalar, un arreglo tipo vector o una matriz. Una vez que se guarda *ec_a.m* como archivo *"M"*, este se puede mandar a llamar desde la ventana de comandos o incluso dentro de otro archivo *"M"*. Explicado lo anterior, si escribimos la siguiente instrucción:

$$>> y = ec_a(20)$$

El entorno de **MATLAB** desplegará lo siguiente:

$$y = \\ 0.0456$$

En otro ejemplo, si ahora trabajamo con una matriz, como la que se presenta a continuación:

$$>> x = [10,\ 20;\ 5,\ 30];\\ >> y = ec_a(x)$$

El resultado también será una matriz como la que se presenta abajo:

$$>> y =;\\ -0.0544 \quad 0.0456\\ -0.1918 \quad -0.0329$$

1.6.2. Función que devuelve múltiples variables

Continuando con el tema de funciones, podemos mencionar que una función puede devolver más de una variable. Por ejemmplo, supongamos una función que tiene que evaluar la media y la desviación estándar de una serie de datos y, para devolver las dos variables, utilizaremos un vector en el miembro izquierdo del enunciado de la función como se puede observar abajo:



Código 3.3.

```
1 function [media, dvstd] = ec_b(x)
2 n=length(x);
3 media = sum(x)/n;
4 dvstd = sqrt(sum(x.^2)/n - media.^2);
```

Para utilizar esta función, el miembro derecho del enunciado de llamada también debe ser un vector. El código anterior debe guardarse como *ec_b.m*. Entonces:

$$>> x = [1\ \ 5\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 5\ \ 8\ \ 9\ \ 2\ \ 4];$$
$$>> [m, d] = ec_b(x)$$

El **Código 3.3** entonces generará y almacenará en las variables *"m"* y *"d"* el valor de estas dos operaciones como se puede observar a continuación:

$$m = \quad 4.7000$$
$$s = \quad 2.3685$$

1.6.3. Función que utiliza otra función

En secciones previas, se había comentado que el argumento de una función puede ser el nombre de otra función. Por ejemplo, supongamos la siguiente ecuación:

$$ec_c = f(a) + 2f(b) + f(c)$$

donde

$f(x)$ es la función que se nombraría en el argumento.

Ejemplo 1.10 Ejemplo de una función que utiliza otra función
El siguiente código ilustra una función ec_c.m que calcula la ecuación anterior:

Código

Código 3.4.

```
function mp = ec_c(nombre_f, a, b, c)
mp = (feval(nombre_f, a)+2*feval(nombre_f, b)+feval(
    nombre_f, c));
```

En el código anterior, nombre_f (una variable de cadena) es el nombre de la función $f(x)$. Si $f(x)$ es la función seno, nombre_f será sin. feval (nombre_f) es un comando de **MATLAB** *que evalúa la función llamada nombre_f para el argumento x. Por ejemplo, $y = feval('sin', x)$ equivale a $y = sin(x)$.*

Si queremos evaluar ec_a para la función definida por ec_c (el ***Código 3.4*** *se guardó como ec_c, se guardó como archivo "M") con $a = 10$, $b = 20$ y $c = 30$, entonces, el comando:*

$$>> A = ec_c('ec_a', 10, 20, 30)$$

Produce

$$0.0040$$

El número de argumentos de entrada y de salida de feval debe coincidir con el formato de la función nombre_f. A partir de este tema todos los códigos se consideran que son creados en archivos "M". ■

1.7. Cómo utilizar MATLAB con señales de tiempo continuo

Una señal de tiempo continuo $x(t)$, dada por una expresión matemática puede definirse y graficarse a través del entorno de **MATLAB**. Para tener una mejor comprensión de los términos, se sugiere que el alumnado se familiarice con los comandos básicos del entorno de **MATLAB** revisando diferentes tutoriales o libro de texto.

Un ejemplo de una señal continua en el entorno de **MATLAB** puede ser representada como $x(t)$:

$$x(t) = e^{-0.1t}\sin(\frac{2}{3}t)$$

Una gráfica de $x(t)$ **vs.** t, para un intervalo de valores de t, puede generarse mediante **MATLAB**. Por ejemplo, para un intervalo r entre 0 y 30 segundos, con incrementos de 0.1 segundos, las instrucciones de **MATLAB** para generar $x(t)$ son:

```
t = 0:0.1:30;
x = exp(-.1*t).*sin(2/3*t);
plot(t,x)
axis([0 30 -1 1])
grid
xlabel('Time (sec)')
ylabel('x(t)')
```

En el código, los valores de tiempo para los que x se grafica, se almacenan como elementos en el

vector t. Cada una de las expresiones `exp(-.1*t)` y `sin(2/3*t)` crea un vector con elementos iguales a los de la expresión evaluada en los valores de tiempo correspondientes. Los vectores resultantes deben multiplicarse, elemento por elemento, para definir el vector x. Como se ve en el comando `x=exp(-.1*t).*sin(2/3*t)`, las operaciones elemento por elemento necesitan un punto antes del operador. Entonces, mediante el comando `plot(t,x)`, x se grafica contra t.

El comando `axis` se utiliza para sobrescribir los valores predeterminados (por lo general, los predeterminados son aceptables, y este comando no se necesita). Es importante destacar que el uso del comando `axis` varía según la versión de **MATLAB** que se utilice. La gráfica resultante de $x(t)$ aparece en la **Figura 2**. Observe que la gráfica que genera **MATLAB** es en forma de caja, y los ejes son etiquetados como se muestra.

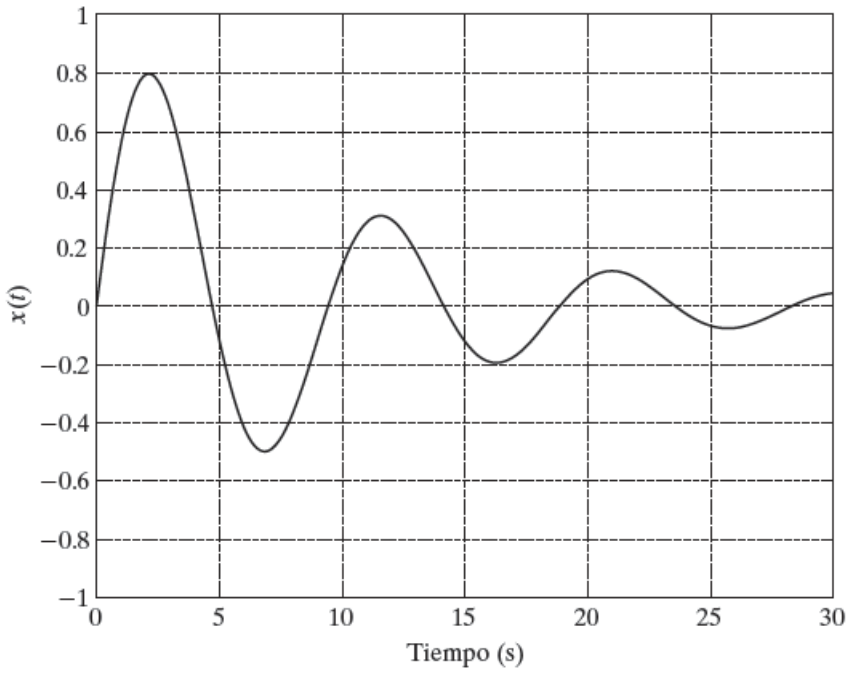


Figura 2: Gráfica en MATLAB para la señal $x(t) = e^{-0.1t}\sin(\frac{2}{3}t)$.

Es importante tomar en cuenta que, cuando generemos gráficas de señales de tiempo continuo con **MATLAB**, el incremento en el escalón de tiempo debe elegirse lo suficientemente pequeño para generar una gráfica suave. Si el incremento se elige demasiado grande (para una señal dada), entonces cuando los valores de la señal se conecten mediante líneas rectas (en la generación por computadora de la gráfica), el resultado será que la gráfica se verá dentada. Para ver este efecto, invitamos al lector a que ejecute de nuevo el programa anterior, utilizando un incremento de tiempo de 1 segundo para graficar $x(t) = e^{-0.1t}\sin(\frac{2}{3}t)$.

2. Gráficas con MATLAB

En el entorno de **MATLAB** las ecuaciones matemáticas se pueden expresar en relación de una, dos, tres o más dimensiones, sin embargo, entender estas ecuaciones sin la ayuda de gráficas resulta muy complicado. Es por esto que el empleo de gráficas en la ingeniería en general es muy importante, y más en aquellas áreas de estudios científicos y de ingeniería, e incluso hoy en día

en las áreas médicas **(Gilat, 2008)**.

En los lenguajes disponibles en las décadas pasadas resulta complicado presentar los resultados con gráficas. Las gráficas en el entorno de computación con **MATLAB** son una parte natural, es decir, son sencillas, y esto conlleva a que los resultados obtenidos de diferentes cálculos, puedan desplegarse con sencillos comandos. Analizar las ecuaciones matemáticas a través de gráficas es una forma atractiva y eficiente de aprender matemáticas. En esta sección se presentarán los temas más relevantes sobre las gráficas en **MATLAB** con la intención de ayudar al alumnado a adquirir los comandos básicos del entorno.

2.1. Gráficas simples

Suponga que se desea graficar lo siguiente:

$$\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), x(t_3), ..., x(t_N), \}$$

En este punto, lo primero que hay que realizar es adecuar tanto t como y en arreglos idénticos, es decir, convertirlos en arreglos de tipo *fila* o de *columna* de la misma longitud. El comando a emplear para desplegar el gráfico es `plot`, la manera de emplearse este comando se puede observar en el **código 4.1**, el cual produce la gráfica de la **Figura 3 (Gilat, 2008)**.

Código

Código 4.1.

```
1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 plot(t,y)
```

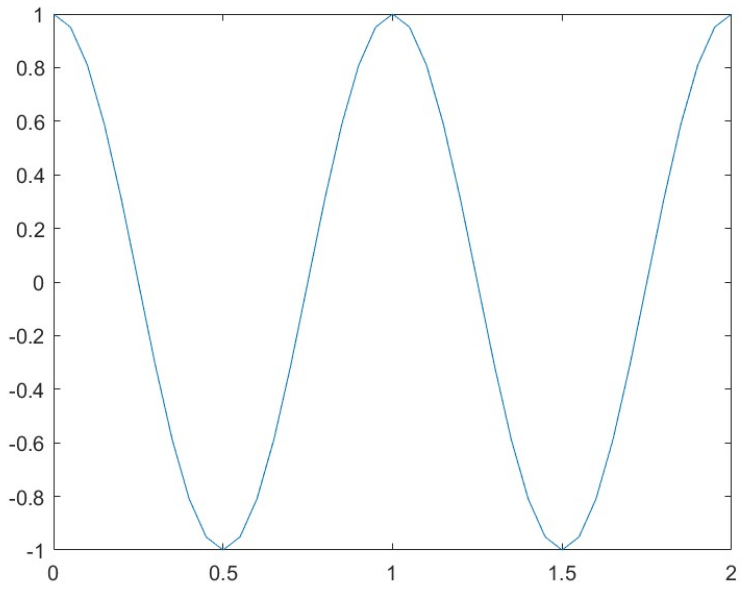


Figura 3: Gráfica usando plot sin asignar etiquetas a los ejes.

Para agregar etiquetas en los ejes se utilizan los comandos `xlabel` y `ylabel`. Para agregar un título en la gráfica se utiliza el comando `title`, esto se muestra a continuación en el siguiente **código 4.2**, el cual produce la gráfica de la **Figura 4**.

Código 4.2.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y)
xlabel('t ')
ylabel('y ')
title('Grafica del coseno')
```

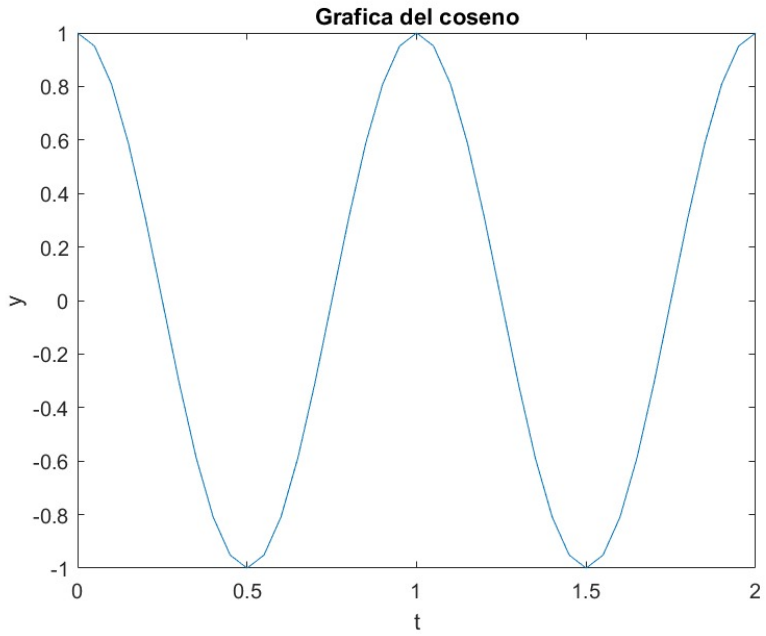


Figura 4: Gráfica de la **Figura 3** con etiquetas en los ejes.

2.2. Gráficas con marcas

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se pueden representar los datos de manera puntual, es decir, colocar marcas en cada uno de los valores sin que estos estén conectados entre sí por líneas. En la **Tabla 4** se presentan algunos de los tipos de marcas o letras que se pueden utilizar. Si se desea graficar con un solo tipo de marca, lo que se debe hacer es colocar el símbolo después de las coordenadas en los argumentos de `plot`. La gráfica producida por el **código 4.3** se muestra en la **Figura 5** **(Gilat, 2008)**.

Código 4.3.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y, '+ ')
xlabel('t ')
ylabel('y ')
title('Grafica del coseno con marcas')
```

Tabla 4: Marcas para gráficas.

Tipo de marca	Símbolo
Punto	·
Más	+
Estrella	*
Círculo	○
Marca x	x

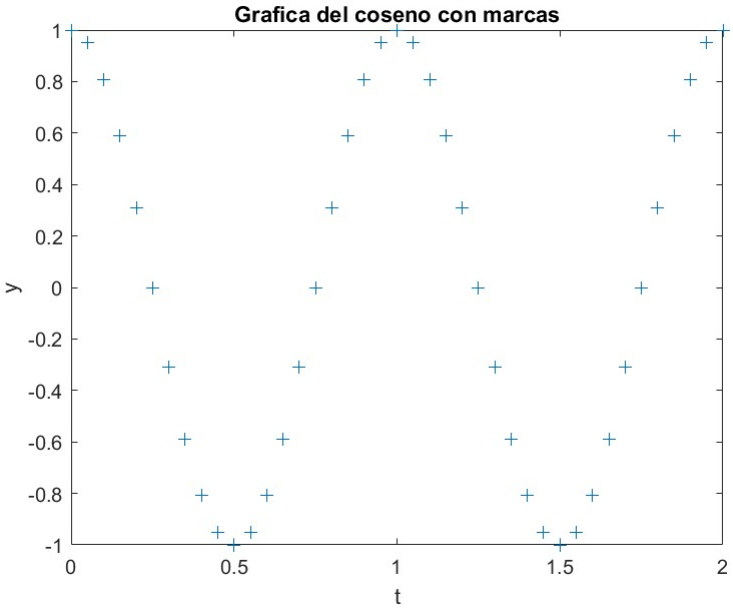


Figura 5: Gráfica con marcas.

2.3. Colores y tipos de líneas

En relación a las líneas con las que se unen los valores en las gráficas de **MATLAB**, en la **Tabla 5** se pueden observar cuatro tipos diferentes de líneas **(Gilat, 2008)**. Se hace notar que el tipo de línea por omisión es el continuo, y si se desea desplegar alguna gráfica con algún tipo de línea en particular, se debe especificar la marca de línea después de las coordenadas como se presenta en el ejemplo siguiente:

```
plot(x,y,'–')
```

En términos de *color* las opciones de pueden observar en la **Tabla 6**. Para asignar un color específico a una gráfica se debe colocar el símbolo del color, así como se realizó para el tema de la *marca*. Si es el mismo proceso que para los tipos de línea, en el argumento del comando `plot`, debemos escribir de la siguiente manera:

Tabla 5: Tipos de líneas.

Tipo de línea	Símbolo
Continua	$-$
Guiones	$--$
Punteada	:
Guiones y puntos	$-.$

```
plot(x,y,'g')
```

Tabla 6: Colores de líneas.

Color de línea	Símbolo
Rojo	r
Amarillo	y
Magenta	m
Turquesa	c
Verde	g
Azul	b
Blanco	b
Negro	k

Tanto el tipo de línea como el color se pueden combinar en una gráfica de **MATLAB**, y en el ejemplo siguiente se puede observa como es la sintaxis de una gráfica con marcas $+$ en color verde:

```
plot(x,y,'+g')
```

Grafica los datos con marcas + en color verde.

2.4. Eje y retícula

El valor mínimo y el valor máximo de los ejes coordenados, las marcas de la escala, así como los valores de las coordenadas en las marcas de escala el entorno de **MATLAB** los asigna de manera automática. Sin embargo, es posible modificar la forma del marco, así como los valores mínimos y valores máximos de las coordenadas con el comando `axis` **(Gilat, 2008)**.

Para modificar la forma del entorno figura, a una forma "cuadrada", se tiene que colocar la siguiente sintaxis:

```
axis('square')
```

Si se desea que los ejes de coordenadas y las marcas de escala se omitan, se debe colocar la siguiente instrucción:

axis('off')

Si ahora colocamos la instrucción `axis('on')`, lo que sucederá, será que se cancela la instrucción previa que fue (`axis('off')`). El valor máximo y el valor mínimo de las coordenadas en una gráfica se pueden especificar con la siguiente instrucción:

axis($[x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}]$)

Las líneas que se salgan de estos límites serán recortados. El comando `axis` se utiliza después de `plot` para poder modificar el área de visualización. Por ejemplo, en el **código 4.4** que realiza la gráfica del coseno (**Figura 6**), si queremos sólo graficar la parte del eje x con un rango de entre [0.75, 1.25] y del eje y con un rango de entre [0 1], se deben escribir las siguientes instrucciones:

Código 4.4.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y, '+ ')
axis([0.75, 1.25, 0, 1])
xlabel('t ')
ylabel('y ')
title('Grafica del coseno utilizando axis')
```

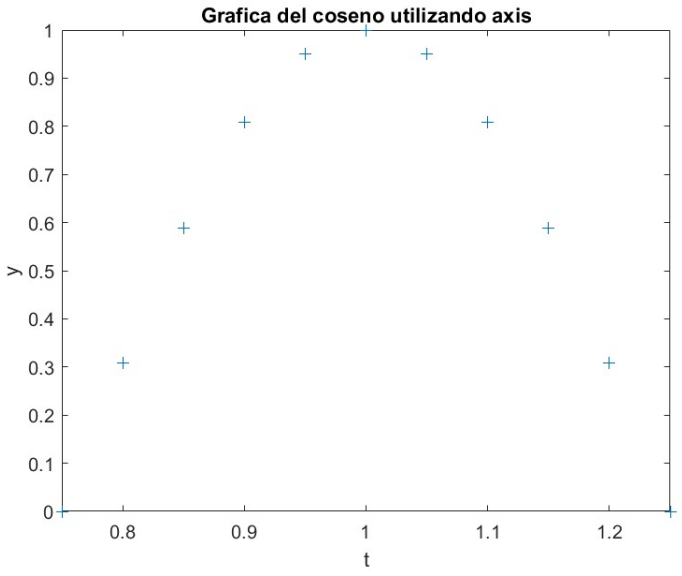


Figura 6: Uso de axis.

2.4.1. Retícula

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se puede agregar una retícula a la gráfica con el comando `grid on`. Por otro lado, la acción que realiza el comando `grid off` es la de eliminar la retícula en la gráfica **(Gilat, 2008)**. Si se utiliza de manera simple el comando `grid`, la acción que se realizará será la de activar y desactivar la retícula alternadamente. El **código 4.5** es un ejemplo del empleo del comando `grid on`, el cual produce la gráfica de la **Figura 7**.

Código

Código 4.5.

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y)
grid on
xlabel('t ')
ylabel('y ')
title('Grafica del coseno con reticula')
```

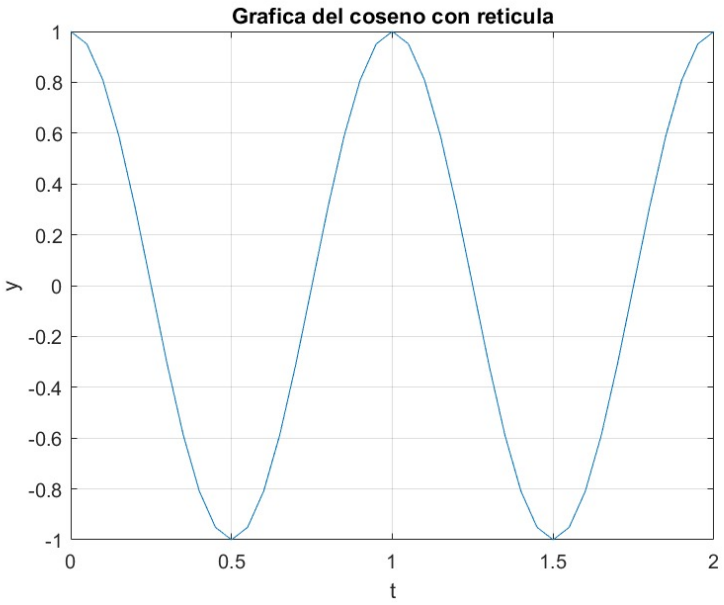


Figura 7: Gráfica usando retícula.

2.5. Gráficas polares

Uno de los diferentes tipos de gráficos en el entorno de **MATLAB** son las gráficas *polares*. Para realizar la gráfica de una función en *coordenadas polares* se emplea el comando `polar` **(Gilat, 2008)**. El **código 4.6** es un ejemplo del empleo del comando `polar`, el cual produce la gráfica de la **Figura 8**.

Código 4.6.

Código

```
t=0:0.05:pi+0.01;
y=sin(3*t).*exp(-0.3*t);
polar(t,y)
title('Grafica polar')
grid
```

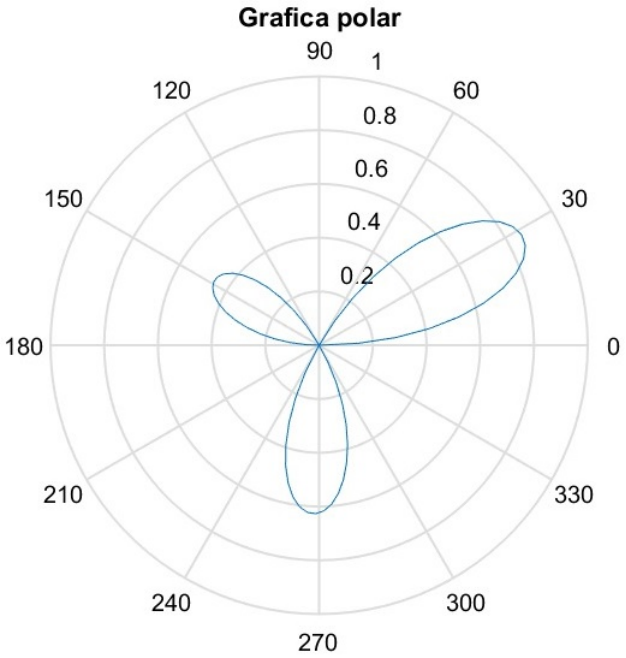


Figura 8: Gráfica usando el comando `polar`.

2.6. Gráficas logarítmicas y semilogarítmicas

En el área de ingeniería, la escala logarítmica es muy útil tanto en cálculos matemáticos como en la generación de gráficas. En el entorno de **MATLAB**, las funciones pueden graficarse en una escala log-log con el comando `loglog` como se muestra en el **código 4.7**. Este código produce la gráfica de la **Figura 9 (Gilat, 2008)**.

Código 4.7.

Código

```
t=0.1:0.1:3;
x=exp(t);
y=exp(t.*sinh(t));
loglog(x,y)
title('Grafica log-log')
xlabel( 'x ')
ylabel( 'y ')
grid
```

En la **Figura 9** se observa que, tanto el eje horizontal como el eje vertical, están en escala logarítmica. Si queremos cambiar esta característica, que sólo uno de los ejes esté en escala logarítmica, por ejemplo el eje y, el comando utilizado es `semilogy`, como se muestra en el siguiente **código 4.8**. El resultado de aplicar esta instrucción se puede observar en la gráfica de la **Figura**

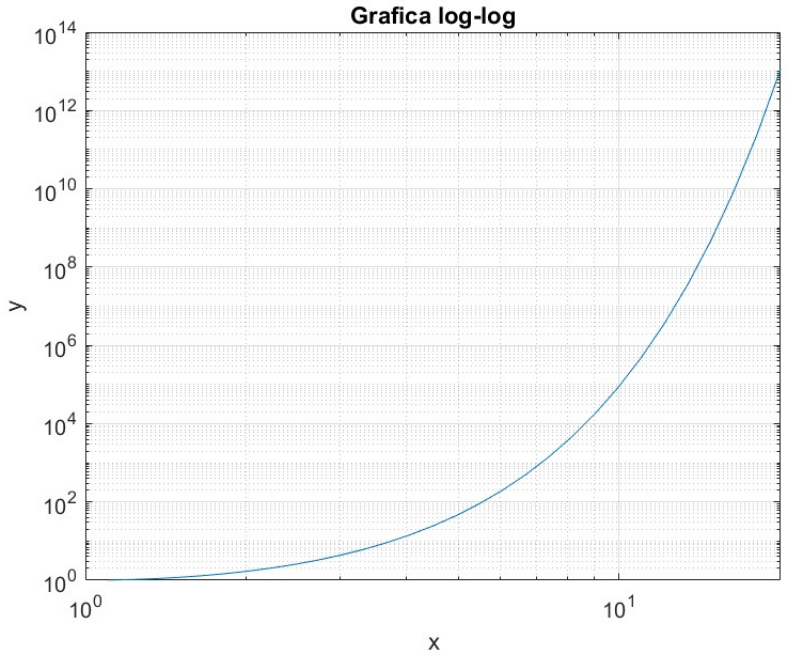


Figura 9: Gráfica en escala logarítmica.

10.

Código 4.8.

```
t=0.1:0.1:3;
y=exp(t.*t);
semilogy(t,y)
title('Grafica semilogy')
xlabel( 't ')
ylabel( 'y ')
grid
```

Código

De forma similar, si lo que se desea es el eje x en escala logarítmica el comando utilizado es `semilogx`.

2.7. Múltiples curvas

En el entorno de **MATLAB** si se desea desplegar dos o más curvas con una sola gráfica empleando el comando `plot`, se debe escribir todos los conjuntos de coordenadas repetidamente con el comando `plot`. En el siguiente **código 4.9**, se presenta es un ejemplo de lo antes explicado, el cual produce la gráfica de la **Figura 11** **(Gilat, 2008)**.

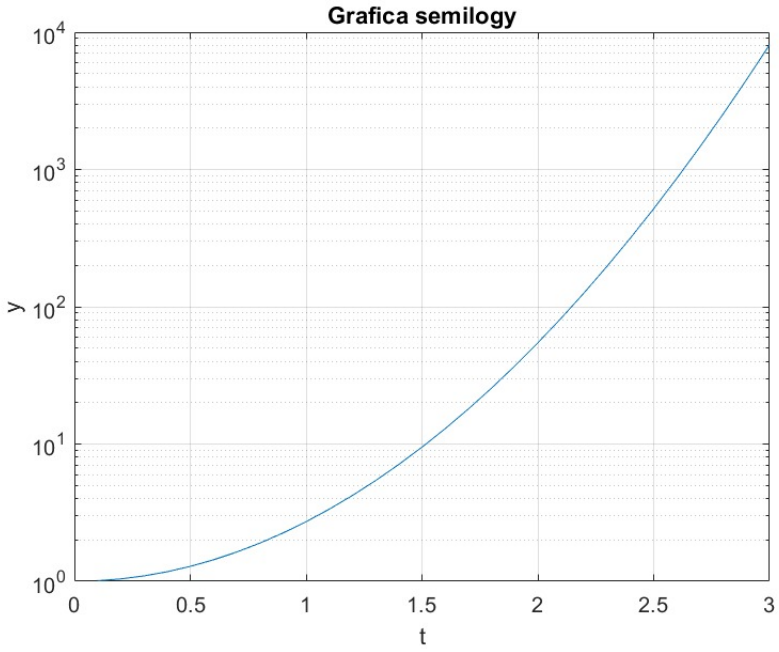


Figura 10: Gráfica en escala semilogarítmica.

Código 4.9.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
z=sin(2*pi*t);
plot(t,y,t,z)
xlabel('t ')
ylabel('y, z ')
title('Grafica del coseno y seno ')
grid
```

El entorno de **MATLAB** elegirá automáticamente diferentes tipos y colores de línea para las diferentes curvas contenidas dentro de una misma gráfica. Aunque, el usuario puede especificar el color de la línea, el tipo de línea e incluso el tipo de marca para representar los datos, y esto es posible indicándolo después de cada par de coordenadas. A continuación presentamos un ejemplo de cómo se debería colocar la sintaxis:

```
plot(x,y,'-',x,z,'*')
plot(x,y,':',x,z,'*g')
plot(x,y,'r',x,z,'y')
```

2.7.1. Retención

Hasta este punto de las notas hemos graficado las curvas en una sola operación con el comando `plot`. Sin embargo, frecuentemente se tiene la necesidad de añadir alguna curva a una gráfica que ya se desplegó. Esta necesidad puede ser solventada con el comando `hold on`. En el siguiente **código 4.10**, se presentan las instrucciones para resolver esta necesidad de añadir una curva,

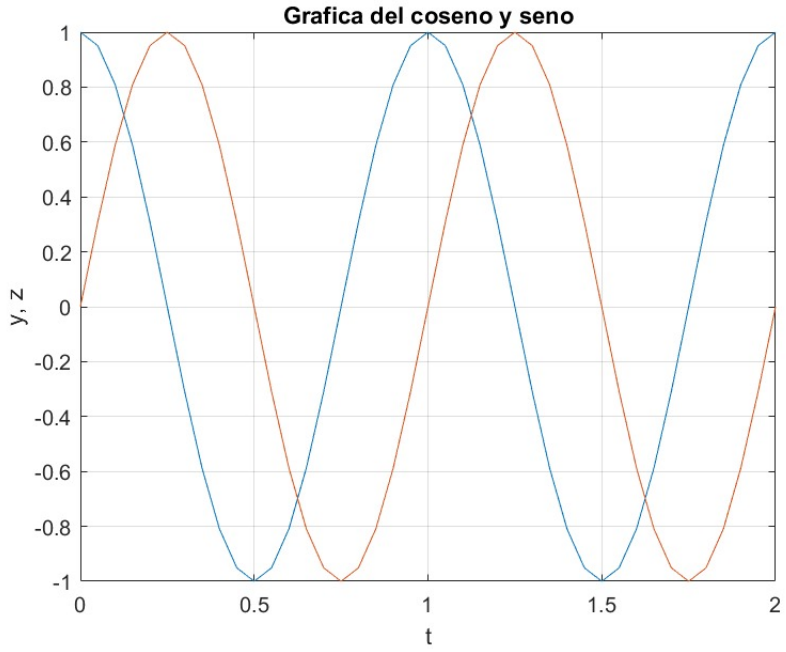


Figura 11: Múltiples curvas.

el código despliega la gráfica de la **Figura 12** **(Gilat, 2008)**.

Código 4.10.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y)
hold on
z=sin(2*pi*t);
plot(t,z, '- - ')
xlabel('t ')
ylabel('y(-), z( '- - ')
title('Grafica del coseno y seno ')
grid
```

Una vez que se ha agregado el comando `hold on`, la gráfica se mantiene en la pantalla e incluso si se ejecuta otro código. Debido a esto, se requiere insertar el comando `hold off` tanto al principio como al final para que las nuevas gráficas agregadas a los ejes borren las gráficas existentes y restablezcan todas las propiedades de los ejes. El siguiente **código 4.11** es un ejemplo del uso del comando `hold on`.

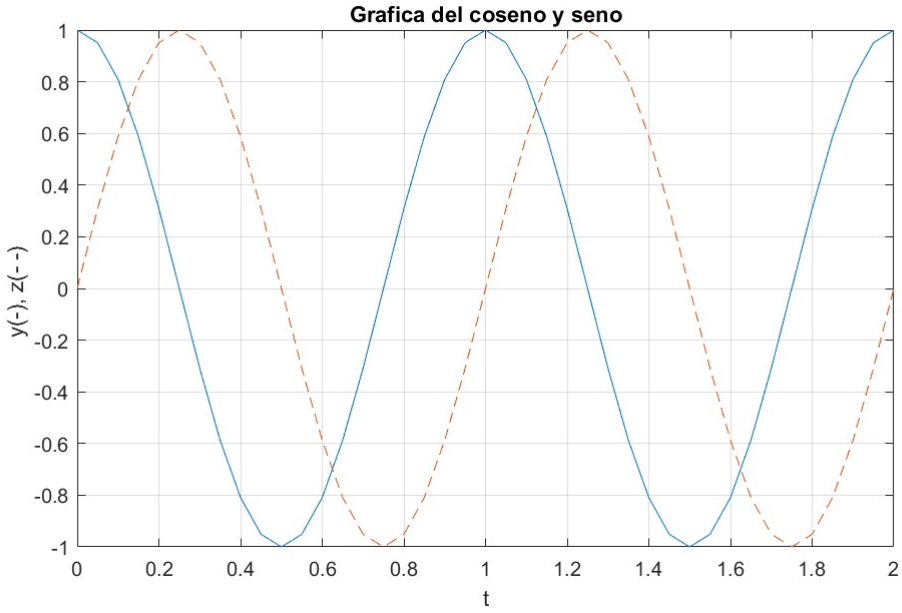


Figura 12: Múltiples curvas.

Código 4.11.

Código

```
clear; clf; hold on
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y) hold on
z=sin(2*pi*t);
plot(t,z, '- - ') hold on
xlabel('t ') ylabel('y(-), z(- -) ')
title('Grafica del coseno y seno ')
grid
```

Cuando graficamos diferentes curvas empleando el comando `hold on`, se recomienda especificar los valores mínimos y máximos de los ejes coordenados con el comando `axis`, ya que si no se realiza esta especificación, los límites se determinarán por default con base en los datos de la primera curva.

El comando `hold on` es un comando que resulta indispensabble cuando se está trabajando una gráfica que tarda mucho en desplegarse. Por este motivo, los comandos para modificar los parámetros de las figuras tales como:

1. Los ejes,
2. El mapa de color
3. Los ángulos de perspectiva
4. El eje de color, entre otros,

se pueden modificar después de haber desplegado una figura, sin embargo, cada vez que se ejecute un comando nuevo se dibujará la figura completa. Para reducir el tiempo, se sugiere emitir todos

los comandos de los parámetros antes de graficar, retener la figuran con el comando `hold on`, y luego el comando de `plot`.

2.7.2. Leyenda

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se pueden agregar leyendas a estas, utilizando el comando `legend`. El siguiente **código 4.12** es un ejemplo de cómo se utiliza el comando `legend`, el cual produce la gráfica de la **Figura 13** **(Gilat, 2008)**.

Código 4.12.

Código

```
t=0:0.05:2;
y=cos(2*pi*t);
plot(t,y)
hold on
z=sin(2*pi*t);
plot(t,z, '- - ')
legend( 'cos ', 'sin ', 2)
xlabel('t ')
ylabel('y(-), z( '- - ')
title('Grafica del coseno y seno ')
grid
```

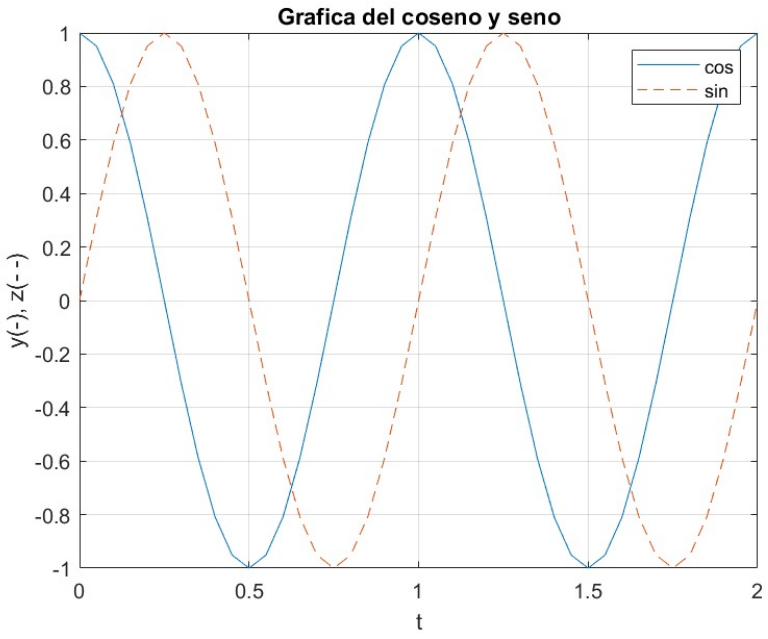


Figura 13: Gráfica con legend.

El primer parámetro es nombre o etiqueta para la primera gráfica, el segundo parámetro corresponde a la segunda gráfica, el tercer parámetro corresponde a la posición de la leyenda.

2.7.3. Figura

Es posible abrir múltiples ventanas de gráficos con `figure`. Si sólo se utiliza una ventana, no hay necesidad de usar este comando, pero si se requiere trabajar en más de una ventana de gráficos se pueden abrir con este comando. Si se requiere volver a activar una ventana de algún gráfico que ya se había desplegado, se puede utiliar el comando `figure(n)`. Este comando reactivará la `n-ésima` ventana, donde n es el número secuencial de figura que aparece en la parte superior de la ventana de gráficos. Las propiedades de las figuras, como su tamaño, ubicación, mapa de color asignado, etc., pueden modificarse.

2.8. Subgráficas

Con el comando `subplot` podemos desplegar diferentes gráficas en una misma ventana de figura, es decir, distribuir en m por n gráficas en una sola ventana de figura. La sintaxis la presentamos a continuación **(Gilat, 2008)**:

```
subplot(m,n,k)
```

Nota Los argumentos m, n y k son números enteros.

En esta sintaxis, tanto m como n, representan un arreglo de m por n gráficas, por lo que k es el número secuencial de la gráfica (cuadrante). El siguiente **código 4.13**, es un ejemplo del empleo del comando `subplot`, el cual produce la gráfica de la **Figura 14**.

Con el comando `subplot` podemos trazar un arreglo vertical de dos gráficas con las siguientes instrucciones:

```
subplot(2,1,1),plot(...
```

```
subplot(2,1,2),plot(...
```

De forma similar, trazamos una fila de dos gráficas con:

```
subplot(1,2,1),plot(...
```

```
subplot(1,2,2),plot(...
```

Código 4.13.

Código

```
clear; clf
t=0:0.05:2;
x=cos(2*pi*t);
y=sin(2*pi*t);
z=(cos(2*pi*t)).^2;
w=(sin(2*pi*t)).^2;
subplot(2,2,1)
plot(t,x)
xlabel('t ')
ylabel('x ')
title('Subgrafica 2,2,1 ')
grid on
subplot(2,2,2)
plot(t,y)
xlabel('t ')
ylabel('y ')
title('Subgrafica 2,2,2 ')
grid on
subplot(2,2,3)
plot(t,z)
xlabel('t ')
ylabel('z ')
title('Subgrafica 2,2,3 ')
grid on
subplot(2,2,4)
plot(t,w)
xlabel('t ')
ylabel('w ')
title('Subgrafica 2,2,4 ')
grid on
```

2.9. Versión tridimensional de una gráfica

El comando `plot3` es un comando para generar gráficas en la versión tridimensional de `plot`. Para el comando `plot3`, todas las reglas y comandos que ya explicamos para `plot` se pueden aplicar también. El siguiente **código 4.14**, es un ejemplo de cómo desplegar una gráfica 3D, el cual produce la gráfica de la **Figura 15** **(Gilat, 2008)**.

Código 4.14.

Código

```
clear, clf
t=0:0.1:20;
r=exp(-0.2*t);
th=pi*t*0.5;
z=t;
x=r.*cos(th);
y=r.*sin(th);
plot3(x,y,z)
hold on
plot3([1,1], [-0.5,0], [0,0])
xlabel( 'X ');
ylabel( 'Y ');
zlabel( 'Z ');
```

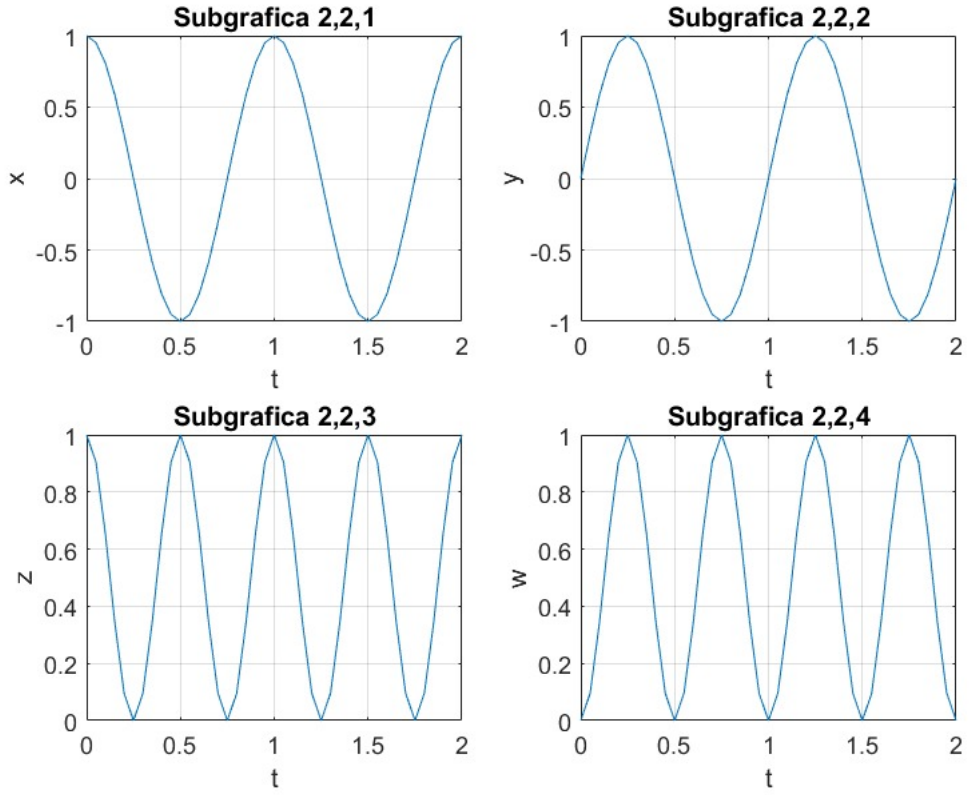


Figura 14: Gráfica usando subplot.

También puede utilizarse el comando `axis` como se presenta a continuación.

axis($[x_{min}; x_{max}; y_{min}; y_{max}; z_{min}; z_{max}]$)

3. Aplicaciones en Comunicaciones

Dos de los campos más importantes para un ingeniero en telecomunicaciones son las comunicaciones analógicas y comunicaciones digitales, ya que son la base y son fundamentales en la formación en su profesión. En esta sección nos enfocaremos en mostrar algunas aplicaciones que se utilizan para dichos campos, como son el muestreo de las señales, la cuantización, la modulación, la representación de las señales digitales mediante códigos de líneas, entre otros.

3.1. Conceptos básicos de señales

Una señal $x(t)$ se considera una función, la cual, se asume que tendrá valores *reales* o *escalares* de la variable independiente (t). Cuando hablamos de un término con valor *real* significa que cualquier valor que tome t (fijo), la señal $x(t)$ resultará en un número real. Cuando a t se le asignan estos valores ($\Re$), se dice que es una *variable de tiempo continuo* y, por lo tanto, la señal $x(t)$ también se considera como una *señal de tiempo continuo*, o en su defecto, una *señal analógica* como se estudia en **(Oppenheim, Willsky, & Nawab, 1998)**. Existen infinidad de señales

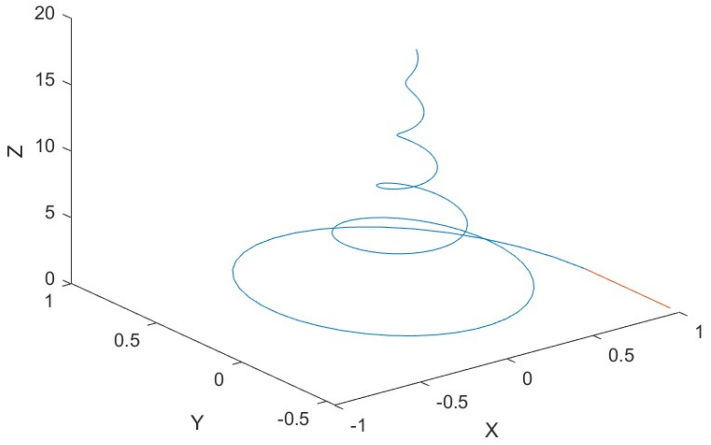


Figura 15: Gráfica en 3D.

analógicas, sin embargo los ejemplos más comunes de este tipo de señales los podemos asociar con señales de voltaje, señales que representan ondas de corriente de un circuito eléctrico, la voz, señales de audio, ondas musicales, representación de la velocidad de un cuerpo en movimiento, cualquier tipo de fuerza mecánica, cualquier señal bioeléctrica (electrocardiogramas (ECG) o electroencefalogramas (EEG)), flujos de líquidos, etc. Por naturaleza, las señales continúas $x(t)$ no siempre son fáciles de representar a través de una función matemática, por lo que es muy complejo intentar darle esta representación. Por ejemplo, si consideramos una señal de voz de duración de 50 ms como la que se observa en la **Figura 16**, aquí se escucha la pronunciación de la palabra *should*, la cual quedá representada por estas variaciones cuando transciende de la *"sh"* a *"u"*.

Esta expresión, al ser complicada de expresar, las variaciones de amplitud al pronunciar la palabra no se especifican en forma matemática, sino que se establecen como un conjunto de muestras tal y como lo menciona **(Kamen & Heck, 2008)**. Analizando nuevamente la **Figura 16**, $x(t)$ que es la señal de la voz, puede representarse a través de un conjunto de muestras como se observa a continuación.

Consideremos a $x(t)$, la cual expresa la señal de voz de la **Figura 16**. Esta señal puede representarse mediante el conjunto de muestras como se presenta a continuación:

$$\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), x(t_3), ..., x(t_N),\}$$

En donde:

$x(t_i)$	valor de la señal cuando es evaluada en un t_i, donde i toma valores de $0, 1, 2, ...$, hasta N.
$N+1$	será el número de puntos muestreados.

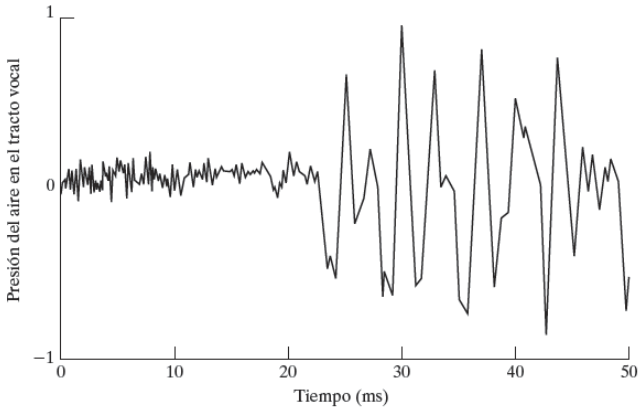


Figura 16: Segmento de un diálogo de la palabra *should*.

Para representar cualquier señal $x(t)$ en un conjunto de muestras como las presentadas arriba, se le realiza a la señal $x(t)$ el proceso de muestreo. Además, de poder con esto obtener la representación matemática de una señal, las señales también pueden analizarse en términos de su *"contenido de frecuencias"* o *"espectro en frecuencia"*. Cuando hablamos de representar a una señal en términos de su espectro en frecuencia podemos utilizar la transformada de Fourier, la cual se abordará en la siguiente sección (**Sección 4**).

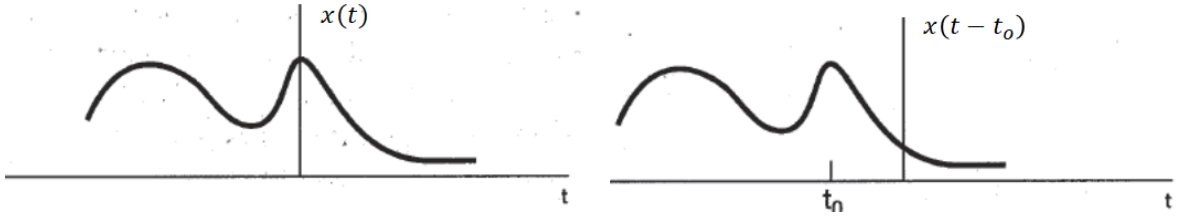
Una señal puede presentar una transformación de su variable independiente como **(Kamen & Heck, 2008)**:

- Corrimiento de tiempo
- Inversión de tiempo
- Escalamiento de tiempo

3.1.1. Corrimiento de una señal en el tiempo

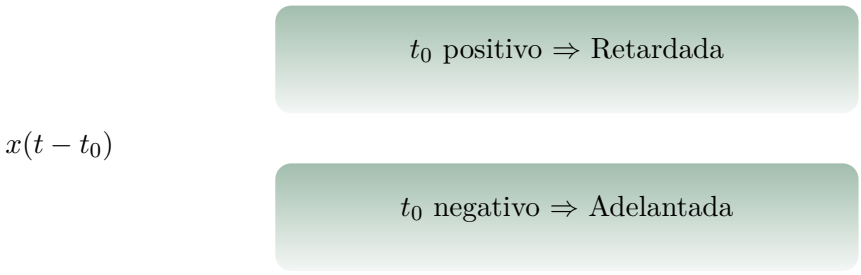
Una señal $x(t)$ puede presentar corrimiento de tiempo si esta señal se desplaza en el eje del tiempo, es decir, representa una versión de $x(t)$ desplazada como se pude observar en la **Figura 17 (Kamen & Heck, 2008)**.

El valor de t_0 puede ser negativo o positivo.



(a) Señal original ($x(t)$) (b) señal desplazada ($x(t_0)$)

Figura 17: Corrimiento en tiempo de una señal.



Ejemplos de corrimiento de una señal en el tiempo pueden ser las señales de radar, sonar, procesamiento de señales sísmicas, etc.

Ejemplo 3.1 Corrimiento de una señal en el tiempo

El siguiente **código 5.1** realiza el corrimiento de una señal en el tiempo como se puede ver en la **Figura 18**.

Código 5.1.

Código

```
%% Desplazamiento
t1=-1:0.1:0;x1=[0*t1];
t2=0:0.01:1;x2=[1+0*t2];
t3=1:0.01:2;x3=[-t3+2];
t4=2:0.01:3;x4=[0*t4];
t=[t1 t2 t3 t4];x=[x1 x2 x3 x4];
plot(t,x,'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName','Senal original');
grid on;
hold on;
%% Desplazamiento-Retraso por 3 unidades
to=3;
plot(t+to,x,'k', 'LineWidth', 2,'DisplayName','Senal retrasada');
%% Desplazamiento-Adelanto por 3 unidades
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
title ('Desplazamiento de una seal', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 16);
plot(t-to,x,'g', 'LineWidth', 2,'DisplayName','Senal adelantada');
```

■

3.1.2. Inversión de una señal en el tiempo

Una señal $x(t)$ puede presentar inversión en el tiempo si esta señal se invierte en $t = 0$, es decir, representa una versión de $x(t)$ invertida ($x(-t)$) como se pude observar en la **Figura 19 (Kamen & Heck, 2008)**.

Ejemplos de la inversión de una señal en el tiempo pueden ser una grabación de audio pero que se reproduce en sentido contrario.

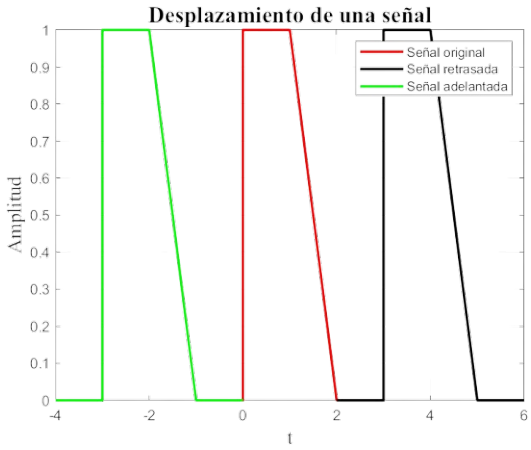
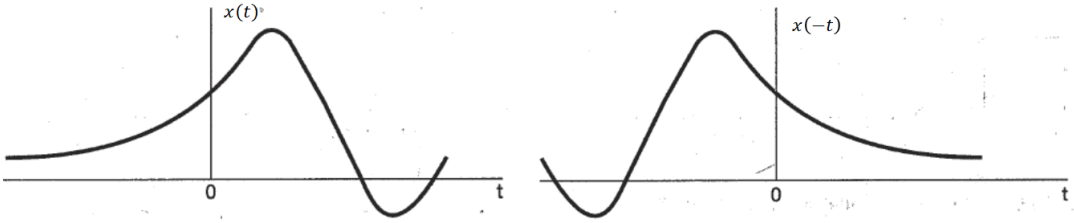


Figura 18: Corrimiento en el tiempo de una señal.



(a) Señal original ($x(t)$) (b) señal invertida ($x(-t)$)

Figura 19: Inversión en tiempo de una señal.

Ejemplo 3.2 Inversión en tiempo de una señal

El siguiente **código 5.2** realiza la inversión en tiempo de una señal como se puede ver en la **Figura 20**.

Código 5.2.

```
%% Inversion
t1=-1:0.01:0;x1=[0*t1];
t2=0:0.01:1;x2=[1+0*t2];
t3=1:0.01:2;x3=[-t3+2];
t4=2:0.01:3;x4=[0*t4];
t=[t1 t2 t3 t4];x=[x1 x2 x3 x4];
plot(t,x,'r','LineWidth',2,'DisplayName','Senal
    original');
grid on;
hold on;
%% Inversion
t_inv=-t;
xlabel('t','FontName','Times','Fontsize',14);
ylabel('Amplitud','FontName','Times','Fontsize',
    14);
title('Inver. de una senal','FontName','Times','
    Fontsize',16);
plot(t_inv,x,'k','LineWidth',2,'DisplayName','
    Senal invertida');
```

Código ■

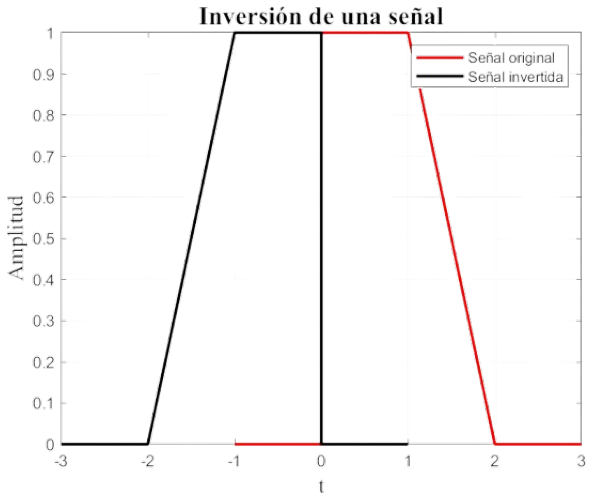


Figura 20: Inversión en el tiempo de una señal.

3.1.3. Escalamiento de una señal en el tiempo

Una señal $x(t)$ puede ser escalada en tiempo si esta señal se modifica por un factor n que afecte la variable independiente (t), es decir, una señal cuyo argumento se vea multiplicado o dividido por este factor n como se pude observar en la **Figura 21 (Kamen & Heck, 2008)**.

Ejemplos del escalamiento en tiempo de una señal puede ser una grabación de audio, es decir, para la señal $x(nt)$ la grabación de audio será n veces más rápida, lo contrario para para la señal $x(t/n)$, donde la grabación de audio será n veces más lenta.

Ejemplo 3.3 Expansión en el tiempo de una señal

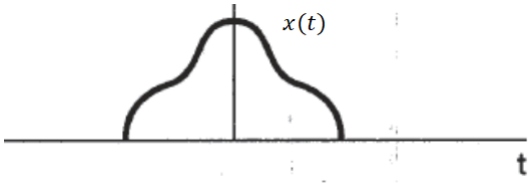
El siguiente **código 5.3** realiza la expansión en tiempo de una señal como se puede ver en la **Figura 22**.

Código 5.3.

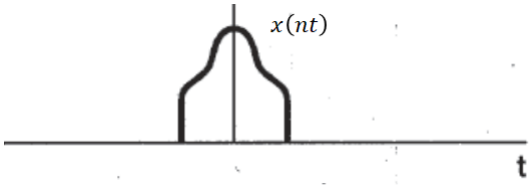
Código

```
t1=-1:0.01:0;x1=[0*t1];
t2=0:0.01:1;x2=[1+0*t2];
t3=1:0.01:2;x3=[-t3+2];
t4=2:0.01:3;x4=[0*t4];
t=[t1 t2 t3 t4];x=[x1 x2 x3 x4];
plot(t,x,'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName','Senal
    original');
grid on;
hold on;
%% Expans. n=2
n=2;
t_compr=n*t;
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
title ('Expans.', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    16);
plot(t_compr,x,'k', 'LineWidth', 2, 'DisplayName','
    Senal expandida');
```

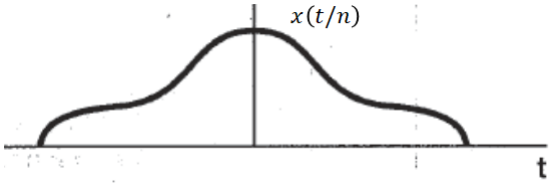
■



(a) Señal original ($x(t)$)



(b) Señal ($x(nt)$)



(c) Señal ($x(t/n)$)

Figura 21: Escalamiento en tiempo de una señal.

Ejemplo 3.4 Compresión en el tiempo de una señal

El siguiente **código 5.4** realiza la compresión en tiempo de una señal como se puede ver en la **Figura 23**.

Código 5.4.

Código

```
t1=-1:0.01:0;x1=[0*t1];
t2=0:0.01:1;x2=[1+0*t2];
t3=1:0.01:2;x3=[-t3+2];
t4=2:0.01:3;x4=[0*t4];
t=[t1 t2 t3 t4];x=[x1 x2 x3 x4];
plot(t,x,'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName','Senal
    original');
grid on;
hold on;
%% Compres n=2
n=2;
t_compr=t/n;
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
title ('Compres. de una senal', 'FontName', 'Times',
    'Fontsize', 16);
plot(t_compr,x,'k', 'LineWidth', 2, 'DisplayName','
    Senal comprimida');
```

■

En la siguiente sección, se presentan algunas señales de tiempo continuo, y las cuales se pueden

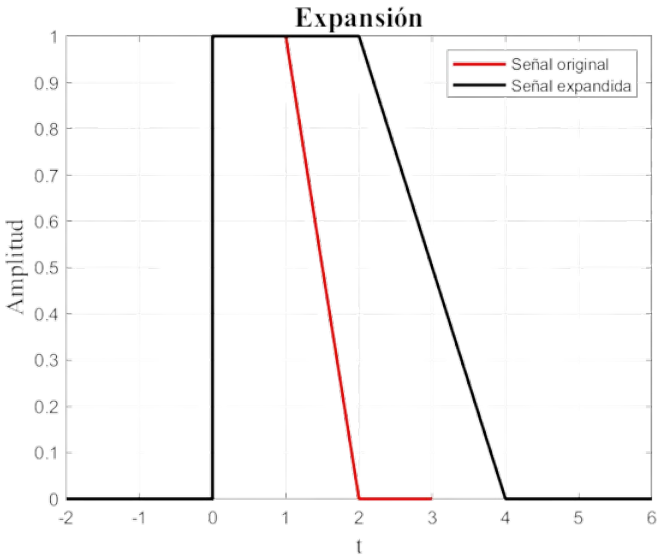
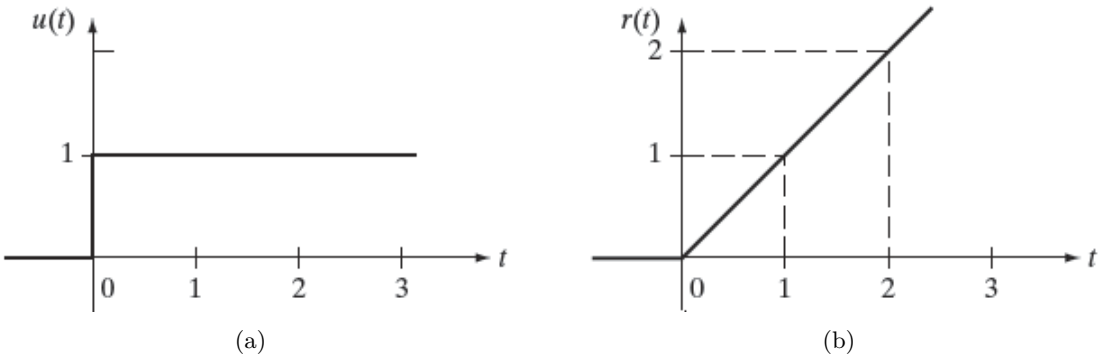


Figura 22: Expansión en el tiempo de una señal.

expresar en forma matemática.

3.1.4. Función escalón unitario y rampa unitaria

Las señales de tiempo continuo básicas e indispensables en los cursos de **MATLAB** son la función escalón unitario y la función rampa unitaria. La función escalón unitario se representa como $u(t)$ y la función rampa unitaria se representa como $r(t)$. La función escalón unitario se puede observar en la **Figura 24(a)** y la función rampa unitaria se puede observar en la **Figura 24(b)** **(Kamen & Heck, 2008)**.



(a) (b)

Figura 24: Funciones: (a) escalón unitario y (b) rampa unitaria.

La representación matemática para una función escalón unitario ($u(t)$) se presenta a continuación:

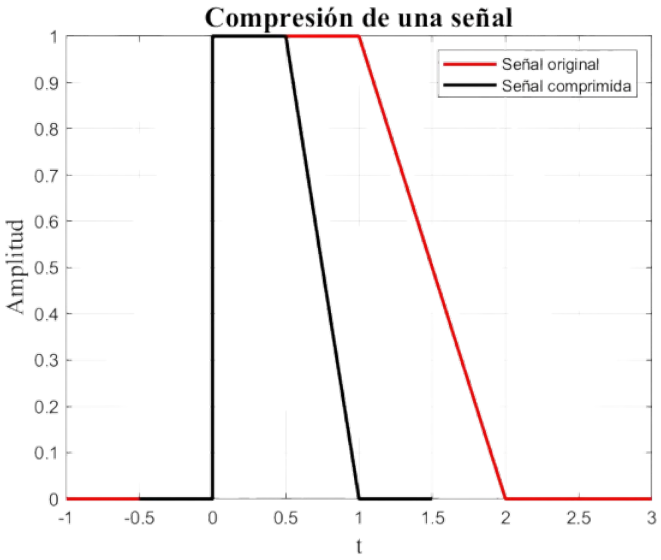


Figura 23: Compresión en el tiempo de una señal.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Para este material, la función *escalón unitario* se define con una amplitud de $u(t)$ es igual a 1 para toda $t \geq 0$.

Nota En algunos casos, dependiendo la bibliografía consultada, la función de escalón unitario está definido como $u(0) = 1$, mientras que en otros está definido como $u(0) = 0$.

Si la variable K se considera como un número real diferente de cero, entonces, $Ku(t)$ es la función escalón tomando como valor de amplitud el valor que se le asigne a K para valores mayores o iguales a cero ($t \geq 0$). Consideremos una señal de tiempo continuo $x(t)$, y si a esta señal le aplicamos la operación de producto con una función escalón, es decir, $x(t)u(t)$, el resultado será igual a $x(t)$ para los valores que tome t mayores o iguales a cero ($t \geq 0$). Para cuando t tome valores menores a cero ($t < 0$), el resultado del producto será cero. En conclusión, realizar la multiplicación una señal $x(t)$ por una función escalón ($u(t)$), resultará en eliminar cualquier valor diferente de cero de $x(t)$ para $t < 0$.

La representación matemática para una función rampa unitaria ($r(t)$) se presenta a continuación:

$$r(t) = \begin{cases} \mathrm{t}, & \mathrm{t} \geq 0 \\ 0, & \mathrm{t} < 0 \end{cases} \tag{2}$$

En esta representación matemática podemos observar que para $t \geq 0$, la pendiente de $r(t)$ es de valor 1 ($m = 1$), por lo que se considera que $r(t)$ tiene *"pendiente unitaria"*. Derivado de lo anterior, es que a $r(t)$ se le conoce como la *"función rampa unitaria"*. Si nuevamente, la variable K es un número escalar (número real) cualquiera diferente de cero, la función rampa $Kr(t)$, tendrá una pendiente m que tomará los valores de K para $t \geq 0$.

Analizando estas dos funciones, podemos observar que la función rampa unitaria $r(t)$ se puede representar como la integral de la *"función escalón unitario"* $u(t)$ como se presenta a continuación:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda) d\lambda \tag{3}$$

Nota Caso inverso, podemos identificar a la 1ra. derivada de $r(t)$ respecto a t es igual a $u(t)$, excluyendo a $t = 0$, donde la derivada de $r(t)$ no está definida.

Ejemplo 3.5 Función escalón unitario

El siguiente **código 5.5** grafica la *"función escalón unitario"*, y la gráfica que despliega este código se observa en la **Figura 25**.

Código 5.5

Código

```
%% Funcion escalon
t = -5:.001:5;
uo = heaviside(t);
plot(t,uo,'LineWidt',3,'Color','r');
axis([-5 5 -1 2])
hold on;
plot([-5 5],[0 0])
plot([0 0],[-1 2])
grid on;
title('Grafica de la se al escalon unitario u_{0}(t)')
xlabel('Variable independiente t')
ylabel('u(t)')
```

■

Ejemplo 3.6 Suma de escalones unitarios

El siguiente **Código 5.6** grafica la suma de diferentes escalones unitarios como se puede observar en la **Figura 26**.

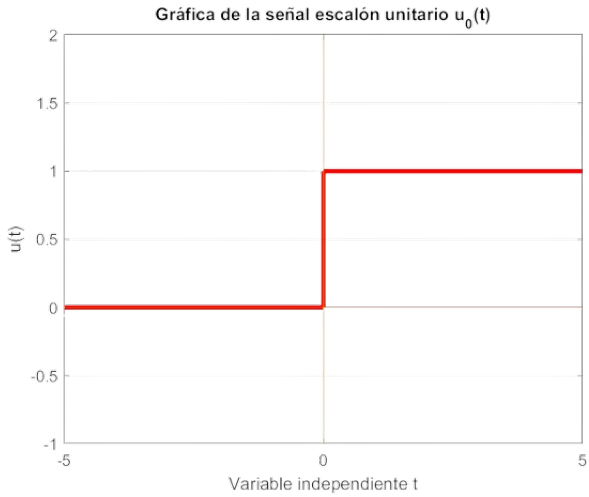


Figura 25: Gráfica de la función escalón unitario.

Código 5.6.

Código

```
%% Suma de escalones unitarios "x(t)=u(t + 1) 2u (t -1)+u(t -3)"
t = -2:.001:2;
f = heaviside(t+1)-1*heaviside(t-1)+1*heaviside(t-3);
plot(t,f,'LineWidt',3,'Color','r');
grid on
title('Combinacion de senales escalon unitario')
xlabel('Variable independiente t')
ylabel('u(t)')
```

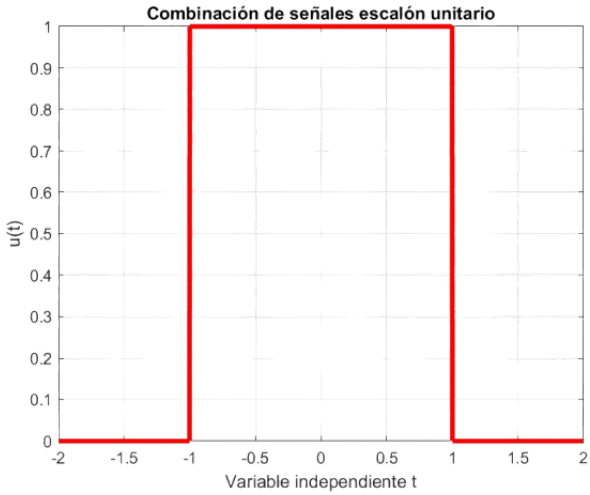


Figura 26: Suma de escalones unitarios del **ejemplo 3.6**.

Ejemplo 3.7 Suma de escalones unitarios

El siguiente **Código 5.7** grafica la suma de diferentes escalones unitarios como se puede observar en la **Figura 27**.

Código

Código 5.7.

```
f = heaviside(t+1)-heaviside(t-1)+2*heaviside(t-3)
    -2*heaviside(t-5)+2*heaviside(t-7)-2*heaviside(t
    -9);
plot(t,f,'LineWidt',3,'Color','r');
grid on
title('Combinacion de se ales escalon unitario')
xlabel('Variable independiente t')
ylabel('u(t)')
```

■

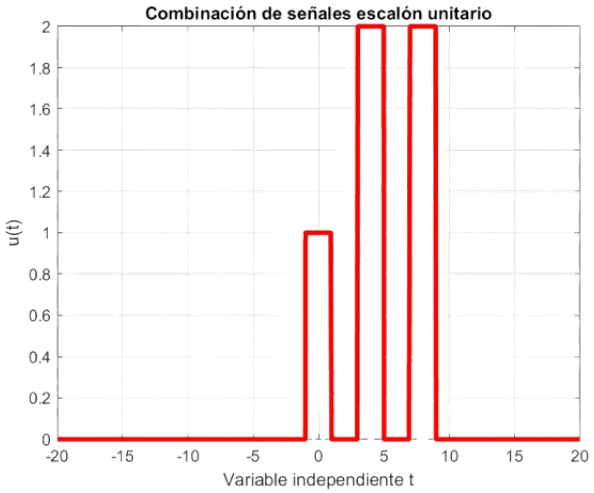


Figura 27: Suma de escalones unitarios del **ejemplo 3.7**.

Ejemplo 3.8 Función rampa

El siguiente **Código 5.8** grafica una señal rampa como se puede observar en la **Figura 28**.

Código

Código 5.8.

```
t = -1:.001:1;
Rampa =t.*heaviside(t);
plot(t,Rampa,'LineWidt',3,'Color','r');
grid on;
title('Grafica de la se al rampa unitaria r(t)')
xlabel('Variable independiente t')
ylabel('r(t)')
```

■

3.1.5. El impulso

Un *impulso unitario* se representa como $\delta(t)$, y es también conocido como una *función delta* o *distribución de Dirac*. Su definición la podemos consultar más a detalle en **(Kamen & Heck, 2008)**, y su representación matemática es como se presenta a continuación:

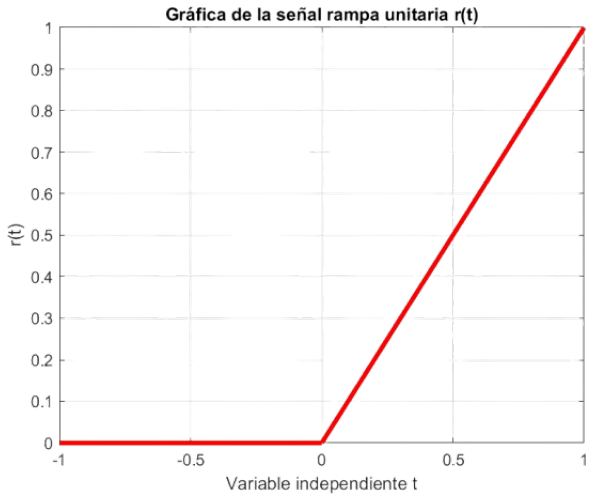
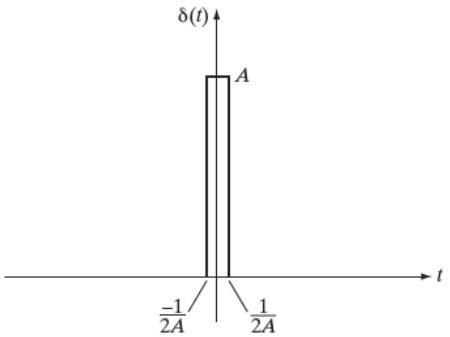


Figura 28: Señal rampa.

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda)d\lambda, \quad \text{para cualquier número real} \varepsilon > 0 \tag{4}$$

Una de las principales condiciones establece que $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$. También, se establece que el área bajo el impulso es 1, por lo que $\delta(t) = 1$. Cabe señalar que cuando se evalúa el impulso en un $t = 0$ ($\delta(0)$), la función no está definida (en particular, $\delta(0)$ no es igual a infinito). La función impulso unitario la podemos aproximar empleando un pulso centrado en cero, con A de amplitud y duración de $1/A$. Siendo así, A tomaría un valor positivo muy grande. La interpretación de pulso para $\delta(t)$ la presentamos en la **Figura 29**.



Considerando lo anterior, asignaremos valores reales positivos a la variable K, $K\delta(t)$ será el impulso con un área igual a K, y estará definida entonces como:

$$K\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

Figura 29: Interpretación de pulso para $\delta(t)$.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} K\delta(\lambda)d\lambda = K, \quad \text{para cualquier número real } \varepsilon > 0$$

En la **Figura 30** se muestra la representación gráfica de $K\delta(t)$, en donde *"(K)"* hace referencia al área del impulso $(K\delta(t))$.

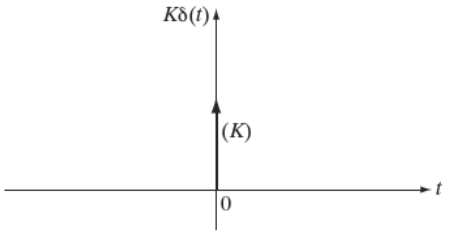


Figura 30: Impulso $K\delta(t)$.

También podemos representar a la función escalón unitario $u(t)$ como la integral del impulso unitario $\delta(t)$. En la **ecuación 5** podemos observar esta interpretación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda, \quad \text{para toda t, excepto t=0} \tag{5}$$

Para demostrar la **ecuación 5**, debemos analizar primero que para valores menores a cero $(t < 0)$, se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = 0, \quad \text{debido a que } \delta(t) = 0, \text{para toda } t < 0$$

Considerando valores mayores a cero $(t > 0)$,

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = \int_{-t}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = 1, \quad \text{ya que } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda)d\lambda = 1, \text{para cualquier } \varepsilon > 0$$

Ejemplo 3.9 **Generar la función impulso unitario en Matlab**
En este ejemplo, se presentará un intervalo de 0 a 9, en el cual graficaremos un impulso en la posición 5. El siguiente **Código 5.9** ejemplifica el concepto de función delta, en el cual se desea graficar:

$$\delta_{[n-n_0]} = \begin{cases} 1; & n = n_0 \\ 0; & n \neq n_0 \end{cases}$$

En el intervalo de $n_1 < n_0 < n_2$ (en donde $n_1 = 0$ y $n_2 = 9$), declararemos la función presentada en el siguiente código:

Código 5.9.

Código

```
function [x,n]=impulso(n0,n1,n2) % Genera x[n]=delta(
    n-no); n1<=n<=n2
n=[n1:n2];
x=[(n-n0)==0];
```

Una vez que tenemos definida nuestra función "impulso", la utilizaremos dentro del siguiente **Código 5.10** esto con el fin de implementar una función arbitraria $T = \delta_{[n-5]}$ en el intervalo

antes mencionado, lo que generará la gráfica de la **Figura 31**.

Código 5.10.

Código

```
%% Graficar el impulso en 5
n=[0:9];
T=impulso(5,0,9);
grid on
stem(n,T)
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
title('Impulso unitario en la posicion 5')
```

■

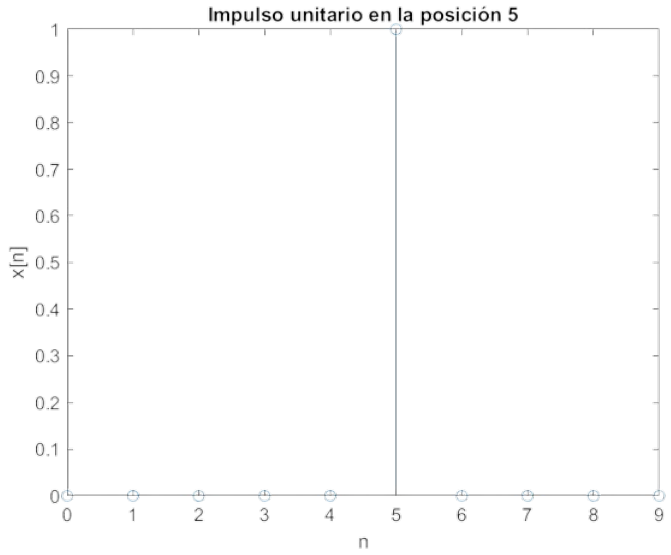


Figura 31: Ejemplo de función delta en la posición 5.

Ejemplo 3.10 Generar dos impulsos unitarios en Matlab

En este ejemplo, se generará y graficará una secuencia sobre un intervalo de -5 a 5 para:

$$x_{[n]} = 2\delta_{[n+2]} - \delta_{[n-4]}; \quad -5 \leq n \leq 5$$

Código 5.11.

Código

```
n=[-5:5];
x=2*impulso(-2,-5,5)-impulso(4,-5,5);
stem(n,x);
xlabel('n')
ylabel('x[n]')
title('Grafica de 2 impulsos unitarios')
```

El código generará la gráfica de la **Figura 32**. ■

3.1.6. Señales periódicas

Para explicar una señal periódica, consideremos que T tomará valores reales positivos fijos. Para que una señal sea considerada continua y periódica con periodo T, $x(t)$ debe cumplir **(Kamen**

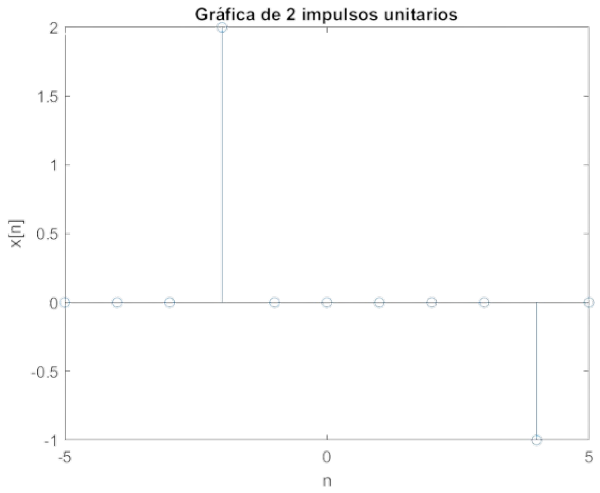


Figura 32: Gráfica de 2 impulsos uinitarios.

& Heck, 2008):

$$x(t+T) = x(t), \quad \text{para toda t, } -\infty < t < \infty \tag{6}$$

Analizando la **ecuación 6** podemos resumir que si $x(t)$ es periódica con un periodo T, también lo será con un periodo qT, donde q tomará cualquier valor entero positivo. De aquí se desprende un nuevo concepto que es el *periodo fundamental* (T_o). Este concepto nos refiere al número positivo más pequeño de T, para el cual la **ecuación 7** se cumple.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta), -\infty < t < \infty \tag{7}$$

donde

A es la amplitud.
ω es la frecuencia [rad/s].
θ es la fase [rad].

La frecuencia f en hertz [Hz] es:

$$f = \omega/2\pi \tag{8}$$

Las señales periódicas más relevantes bajo estudio son las señales senoidales. Para comprobar que la señal senoidal dada por la **ecuación 7** es periódica, analizamos que para cualquier valor de la variable de tiempo t se cumple lo siguiente:

$$A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = A\cos\left(\omega t + 2\pi + \theta\right) = A\cos\left(\omega t + \theta\right)$$

Con esto, comprobamos que la señal senoidal es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$ y, también, $2\pi/\omega$ es el *periodo fundamental* T_o. La señal senoidal $A\cos(\omega t + \theta)$ se observa en la **Figura 33**,

en este caso θ toma valores entre $-\pi/2$ y 0 ($-\pi/2 < \theta < 0$).

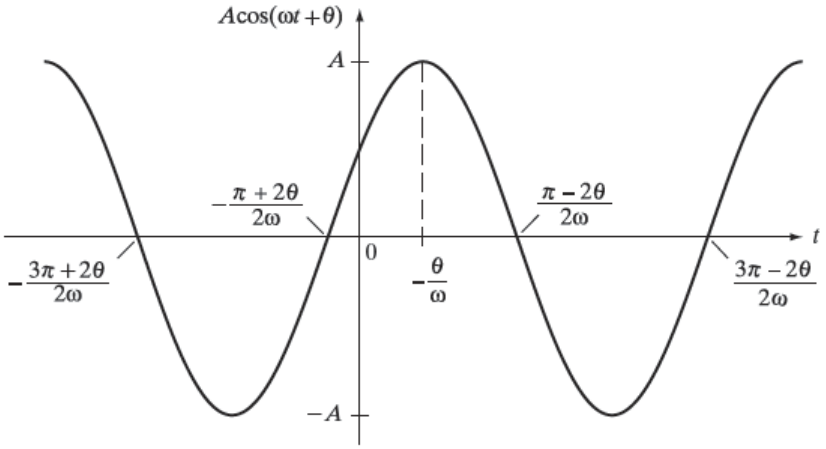


Figura 33: Sinusoide $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ con $-\pi/2 < \theta < 0$.

Si ahora consideramos que $\theta = -\pi/2$, entonces observamos que nuestra señal coseno defasado $-\pi/2$ se convierte en una señal seno con argumento ωt ($\sin(\omega t)$) como se observa en la siguiente expresión:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = A\sin(\omega t)$$

Cuando trabajamos con señales periódicas en ocasiones se requiere trabajar con la suma de estas, y surge la incógnita de saber si la suma de dos señales periódicas resultará también en una señal periódica. Entonces, consideremos ahora dos señales periódicas definidas como $x_1(t)$ y $x_2(t)$, con sus respectivos *periodos fundamentales* T_1 y T_2. La pregunta problema a resolver:

¿Es periódica la suma $x_1(t) + x_2(t)$?;

es decir,

¿Existe un número positivo T, tal que satisfaga lo siguiente?

$$x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{para toda t?} \tag{9}$$

Concluimos que la **ecuación 9** se satisface si y sólo si la relación entre los periodos fundamentaes T_1/T_2 se logra escribir también como una relación de dos números enteros, por ejemplo q y r (q/r). Una vez explicado lo anterior, podemos observar que si se cumple que $T_1/T_2 = q/r$, relacionamos estos conceptos como $rT_1 = qT_2$, y como ya se mencionó que tanto r como q son números enteros, concluimos que la señal $x_1(t)$ y la señal $x_2(t)$ son también señales periódicas con periodo rT_1. Es por eso que la expresión de la **ecuación 9** se sigue satisfaciendo con $T = rT_1$.

Adicional, si los valores que toman r y q son coprimos, es decir, r y q no tienen factores enteros comunes diferentes de 1, entonces $T = rT_1$ es el *periodo fundamental* de la suma de ambas señales $x_1(t) + x_2(t)$.

Ejemplo 3.11 Suma de señales periódicas

Considerando la señal periódica $x_1(t) = \cos(\pi t/2)$ y la señal periódica $x_2(t) = \cos(\pi t/3)$, expresamos que las señales son periódicas con periodos fundamentales de $T_1 = 4\ s$ y $T_2 = 6\ s$, respectivamente, como se observa a continuación:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resultando en que si $q = 2$ y $r = 3$, se concluye que la suma entre ambas señales $(x_1(t) + x_2(t))$ es periódica, con un *periodo fundamental* de $rT_1 = (3)(4) = 12$ segundos. El siguiente **Código 5.12** presenta la sintaxis del procedimiento antes explicado y este genera la gráfica que se presenta en la **Figura 34**.

Código 5.12

Código

```
T=12;
t=0:0.001:T;
x1=cos((pi*t)/(2));
x2=cos((pi*t)/(3));
y=x1+x2;
plot(t,y,'r')
xlabel('t','FontName','Times','Fontsize',14);
ylabel('Amplitud','FontName','Times','Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title('Suma de dos senales periodicas','FontName',
    'Times','Fontsize',16);
```

■

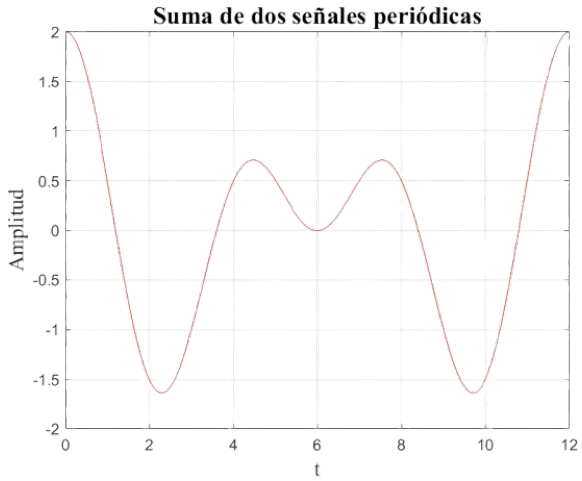


Figura 34: Suma de dos señales periódicas.

Nota El *periodo fundamental* T_0 de una señal $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T. Una

señal $x(t)$ que no cumple con ser periódica se define como una señal *aperiódica*.

Ejemplo 3.12 Señal periódica

Consideremos la siguiente señal periódica $x(t)$:

$$x(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

Como primer paso calcularemos el *periodo fundamental* de la señal $x(t)$, seguido graficaremos la señal con periódica con duración de 4 ciclos. El siguiente **Código 5.13** presenta la sintaxis para calcular el *periodo fundamental*, y con este dato grafica la señal en 4 ciclos como se observa en la **Figura 35**.

Código 5.13

Código

```
T=6*pi;
m0=1;
t=0:0.1:m0*T;
y=cos(t/3);
plot(t,y,'r', 'DisplayName','Senal original')
grid on;
hold on;
m1=2;t1=m0*T:0.1:m1*T;y1=cos(t1/3);
plot(t1,y1,'b', 'DisplayName','Senal 2do periodo')
m2=3;t2=m1*T:0.1:m2*T;y2=cos(t2/3);
plot(t2,y2,'g', 'DisplayName','Senal 3er periodo')
m3=4;t3=m2*T:0.1:m3*T;y3=cos(t3/3);
plot(t3,y3,'k', 'DisplayName','Senal 4to periodo')
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
title ('Senal 4*T', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    16);
```

■

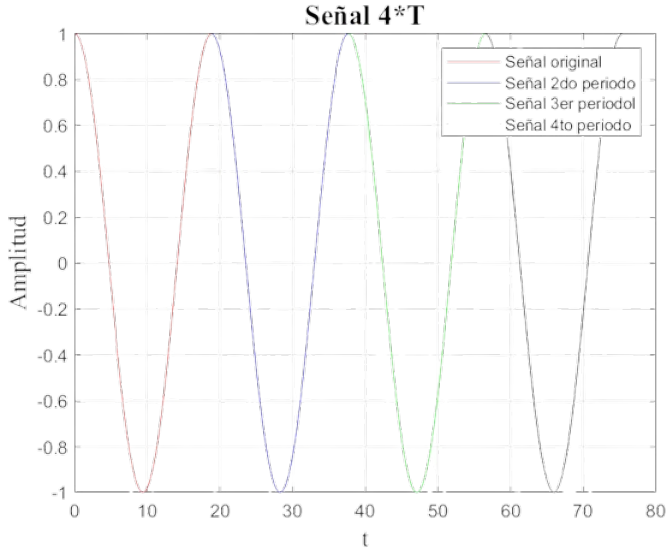


Figura 35: Ejemplo de una señal periódica.

3.1.7. Señales pares e impares

Una señal periódica puede clasificarse como una señal *par* o *impar*. Esta característica está relacionada directamente con la simetría que presentan las señales en función con la inversión de tiempo t.

Señales par. ■

Una señal periódica $x(t)$ se clasifica como una *señal par* si ésta es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo t, es decir, de forma visual debe cumplir que su reflejo sea respecto del origen **(Oppenheim et al., 1998)**. Graficamente podemos observar esta definición en la **Figura 36**

$$x(t) = x(-t)$$

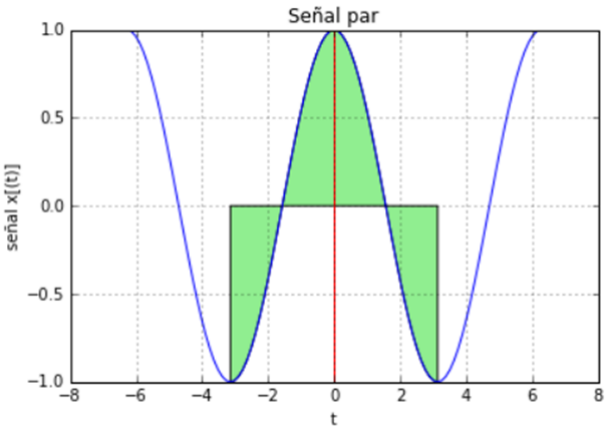


Figura 36: Señal par.

Señales impar. ■

Una señal periódica $x(t)$ se clasifica como una *señal impar* si al ser evaluada en $t = 0$ el valor de la función también es 0, también debe cumplir la condición $x(t) = -x(-t)$ para todos los valores de t **(Oppenheim et al., 1998)**. Graficamente podemos observar esta definición en la **Figura 37**

$$x(t) = -x(-t)$$

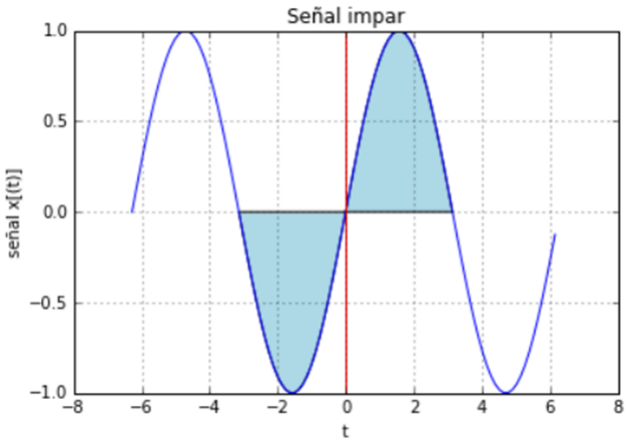


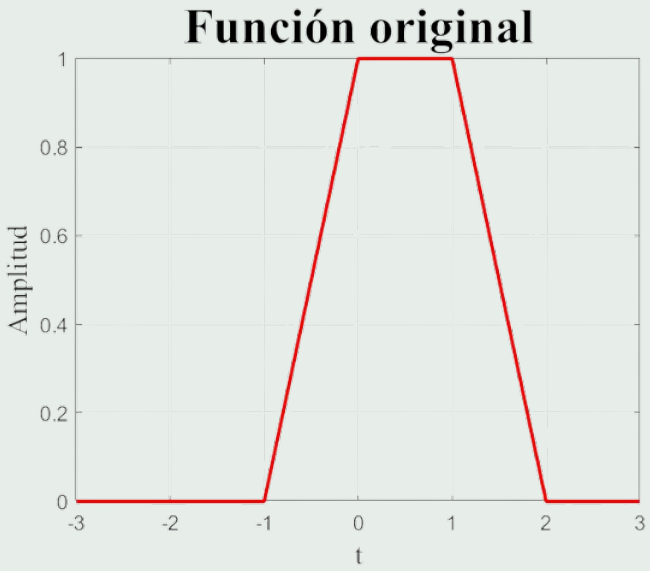
Figura 37: Señal impar.

Algo importante que se debe mencionar es que *cualquier señal* se puede descomponer en la suma de dos señales, una de estas señales será la que corresponde a una *señal par* y la otra la que corresponde a una *señal impar*.

Parte PAR
$$x(t)_{PAR} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

Parte IMPAR
$$x(t)_{IMPAR} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Ejemplo 3.13 Señales pares e impares
Consideremos una señal $x(t)$, de la cual se debe obtener su parte par y su parte impar. Posterior se debe realizar la comprobación mediante un código de que la suma de $x(t)_{PAR}$ y $x(t)_{IMPAR}$ resulta la señal original.



La señal $x(t)$ se genera con el siguiente **Código 5.14**:

Código

Código 5.14.
```
function x = PAR(t)
n = length(t);
x = zeros(1,n);
i = find(t < -3);
x(i) = 0; %1
i = find(t > -3);
x(i) = 0;% 2
i = find(t > -1);
x(i) = t(i)+1 ; % 3
i = find(t > 0 );
x(i) = 1 ; % 4
i = find(t > 1 );
x(i) = (-t(i)+2) ; % 5
i = find(t > 2 );
x(i) = 0; % 6
return;
```

Una vez que se genera la señal, se utiliza el siguiente **Código 5.15** para contestar el ejemplo.

Código 5.15.

Código

```
%% Senales Pares e Impares
t=-3:0.1:3;
x=PAR(t);
subplot(2,3,1);
plot(t,x,'r', 'LineWidth', 2);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Func. original', 'FontName', 'Times', '
    Fontsize', 24);
xp1=0.5*PAR(t);
subplot(2,3,2);
plot(t,xp1,'c','LineWidth', 1.5);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Senal 0.5x(t)', 'FontName', 'Times', '
    Fontsize', 24);
tt=-t;
xp2=0.5*PAR(tt);
subplot(2,3,3);
plot(t,xp2,'G','LineWidth', 1.5);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Senal 0.5x(-t)', 'FontName', 'Times', '
    Fontsize', 24);
xp=xp1+xp2;
subplot(2,3,4);
plot(t,xp,'b','LineWidth',4);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Senal Par', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    24);
xi=xp1-xp2;
subplot(2,3,5);
plot(t,xi,'m','LineWidth',4);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Senal Impar', 'FontName', 'Times', 'Fontsize'
    , 24);
%% Senal original
X_original=xp+xi;
subplot(2,3,6);
plot(t,X_original,'k','LineWidth',4);
xlabel ('t', 'FontName', 'Times', 'Fontsize', 14);
ylabel ('Amplitud', 'FontName', 'Times', 'Fontsize',
    14);
grid on;
hold on;
title ('Func. original', 'FontName', 'Times', '
    Fontsize', 24);
```

Las gráficas que se desprenden de correr el código anterior son las presentadas en la **Figura 38**. ■

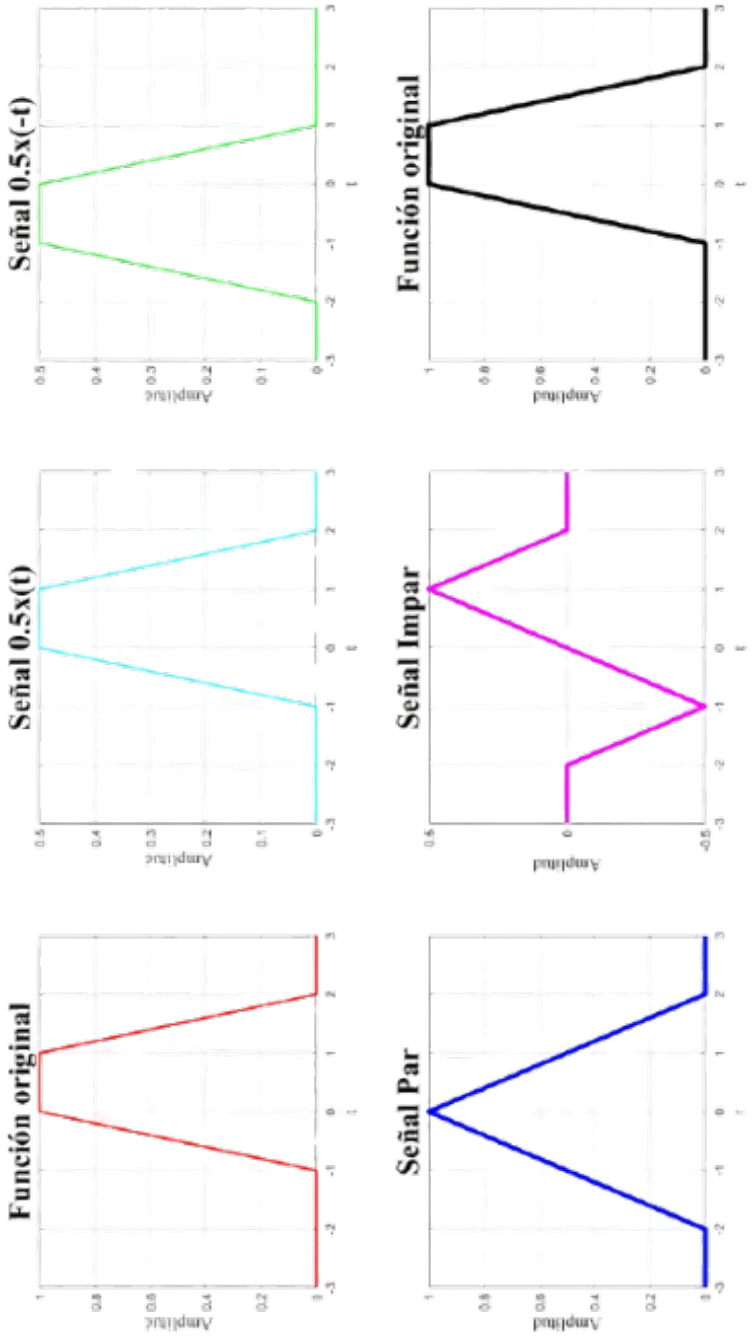


Figura 38: Parte par y parte impar de la señal $x(t)$, así como la comprobación de que la suma de $x(t)_{PAR}$ y $x(t)_{IMPAR}$ resulta la señal original.

3.2. Teorema de Muestreo

Uno de los procesos de digitalización de una señal es el muestreo, el *teorema de muestreo* de una señal establece que, una señal analógica que está limitada en su banda con una frecuencia fundamental f_0, puede ser muestreada (discretizar la señal en tiempo) sin que exista pérdida de su información siempre y cuando la frecuencia para muestrear f_s sea superior que la relación de $2f_0$. Entonces, estas muestras determinan únicamente a la señal, y esta puede ser reconstruida sin distorsión y sin error a partir de dichas muestras, **(Proakis, Salehi, Zhou, & Li, 1994)**.

Ejemplo 3.14 Diseño de una función de MATLAB que dibuje la señal analógica, el tren de impulso y la señal muestreada.

Existen varios tipos de muestreo, el más común es el *muestreo ideal*, el cual consiste en multiplicar la señal analógica por un tren de impulsos de amplitud unitaria, y período $ts = 1/f_s$, es decir, tiempo de muestreo. Al realizar esta multiplicación obtenemos a la salida solo muestras de nuestra señal en cada t_s segundos, este proceso se muestra en la **Figura 39**.

Diseñar una función de MATLAB que dibuje la señal analógica, el tren de impulso y la señal muestreada, cumpliendo el teorema de muestreo.

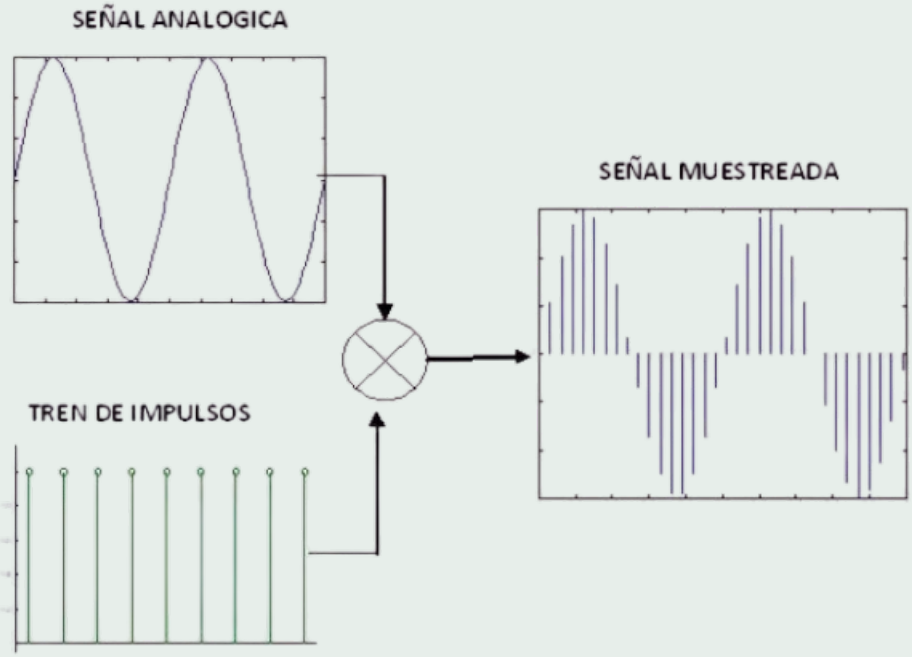


Figura 39: Muestreo Ideal.

Código 5.16.

Código

```
fo=2;
fs=30;
A=3;
t=0:0.01:1;
y=A*sin(2*pi*fo*t);
plot(t,y)
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
title('Senal Analogica')
grid on
figure(2)
for ts=0:(1/fs):1
aux1=[ts ts];
aux2=[0 1];
plot(aux1,aux2,'k')
hold on
end
xlabel('ts')
ylabel('Amplitud')
title('Tren de Impulsos')
grid on
axis([-0.2 1.2 -0.2 1.2])
figure(3)
for ts=0:(1/fs):1
aux3=[ts ts];
f=A*sin(2*pi*fo*ts);
aux4=[0 f];
plot(aux3,aux4,'k')
hold on
xlabel('ts')
ylabel('f(ts)')
title('Senal Muestreada')
grid on
xlabel('ts')
ylabel('f(ts)')
title('Señal Muestreada')
grid on
```

El **código 5.16** produce las gráficas de la **Figura 40**, **Figura 41** y **Figura 42**.

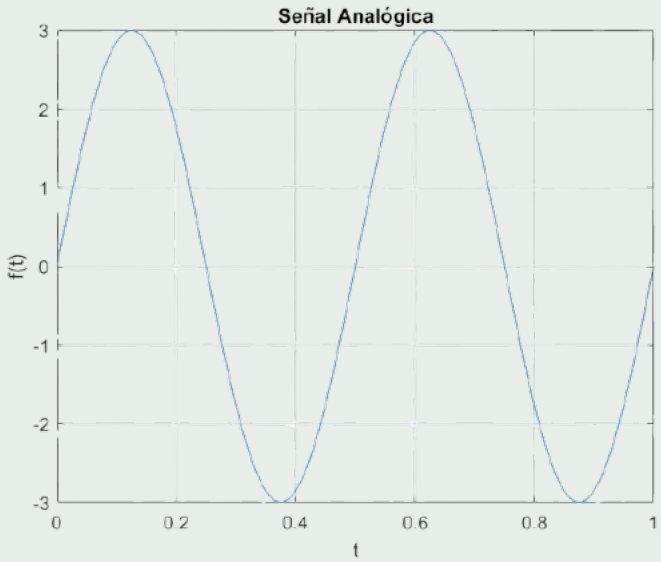


Figura 40: Señal analógica.

Se observa en el código que la señal muestreada solo tiene valores cada t_s segundos, también se observa que se utilizan variables auxiliares nombradas como $aux1$, $aux2$, $aux3$ y $aux4$, las cuales se utilizan para la gráfica de los impulsos, esto se puede omitir utilizando el comando `stem` que nos sirve para la gráfica de secuencias discretas, dado que el muestreo es la discretización de la señal en el tiempo. Esto se muestra en el **código 5.17**, y el cual produce las gráficas de la **Figura 43**, **44** y **45**.

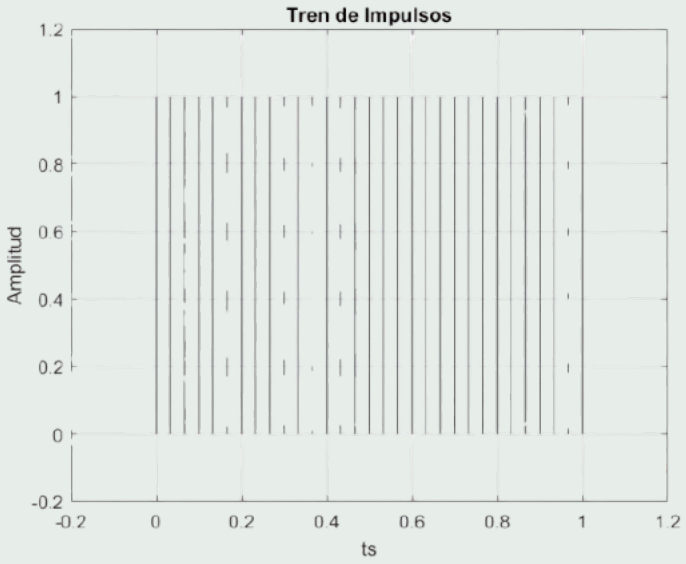


Figura 41: Tren de impulsos.

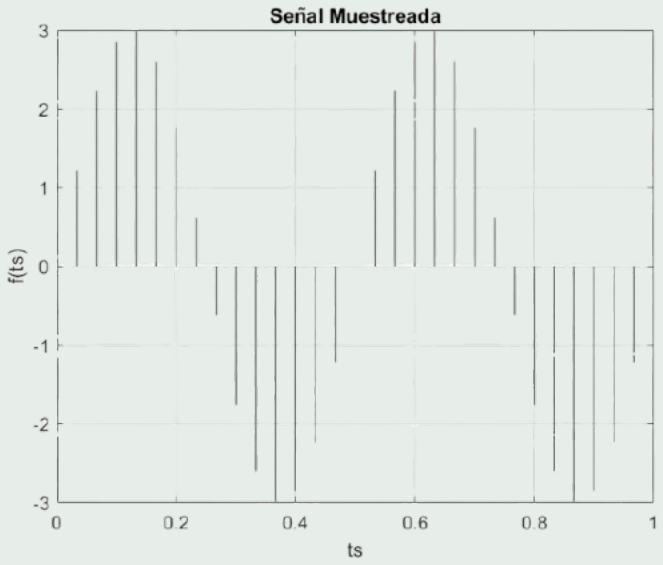


Figura 42: Señal muestreada.

Código 5.17

Código

```
fo=2;
fs=30;
A=3;
t=0:0.01:1;
y=A*sin(2*pi*fo*t);
plot(t,y)
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
title('Senal Analogica')
grid on
figure(2)
ts=0:(1/fs):1;
n=length(ts);
tren=ones(n);
stem(ts,tren,'k')
xlabel('ts')
ylabel('Amplitud')
title('Tren de Impulsos')
grid on
axis([-0.2 1.2 -0.2 1.2])
figure(3)
ts=0:(1/fs):1;
f=A*sin(2*pi*fo*ts);
stem(ts,f,'k')
xlabel('ts')
ylabel('f(ts)')
title('Senal Muestreada')
grid on
```

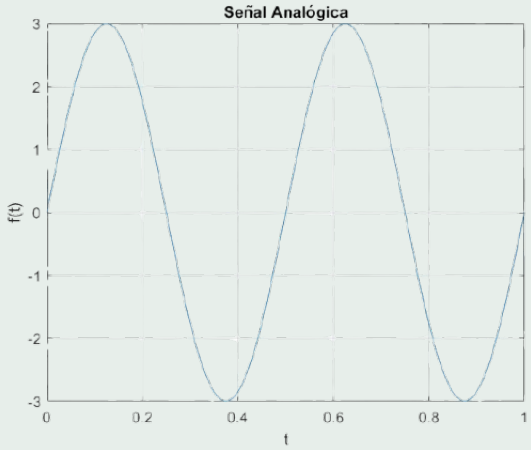


Figura 43: Señal Analógica.

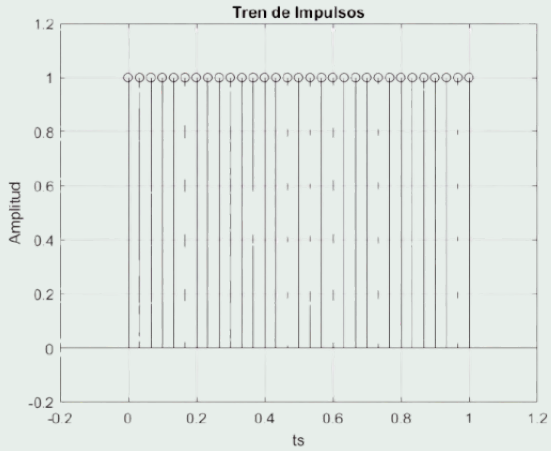


Figura 44: Tren de Impulsos.



Figura 45: Señal Muestreada.

3.3. Cuantización

Una vez obtenida la señal muestreada, el siguiente proceso para digitalizar la señal es hacer que la señal tome valores de amplitudes de un conjunto finito de valores, a este proceso se le conoce como cuantización **(Haykin, 2002.)**.

Ejemplo 3.15 Escribir un código que dibuje una señal cuantificada

Para este ejemplo, podemos utilizar la señal muestreada obtenida anteriormente, y utilizar el comando `stairs` para unir los puntos. El **código 5.18** produce las gráfica de la **Figura 46**.

Código 5.18.

Código

```
fo=2; % Frecuencia de la se al
fs=30; % Frecuencia de muestreo
A=3; % Amplitud de la se al
ts=0:(1/fs):1; % Tiempo de Muestreo
f=A*sin(2*pi*fo*ts);
stairs(ts,f)
xlabel('ts')
ylabel('f(ts)')
title('Se al Cuantificada')
grid on
```

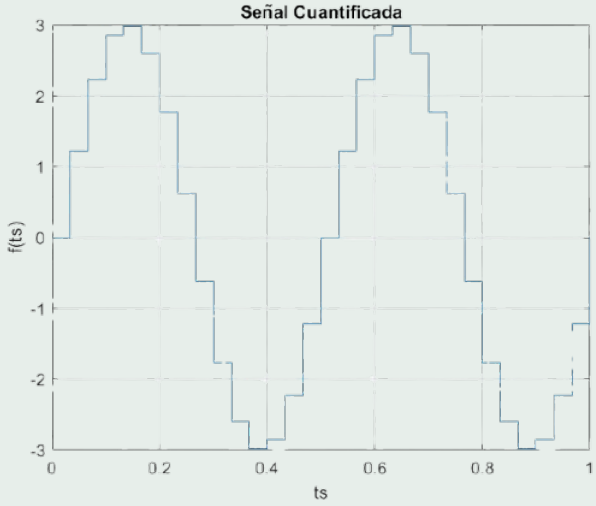


Figura 46: Cuantización.

■

3.4. Conversión Analógica a Digital (PCM)

El **código 5.19** convierte una señal analógica de N componentes a una señal digital de B bits, es decir, muestrea, cuantiza (con L niveles de cuantización, con $L = 2^B$) y codifica la señal para producir una *señal PCM*. Al ingresar los parámetros de la **Figura 47**, el programa genera las gráficas de la **Figura 48** y **49**, así como los resultados presentados en la **Figura 50**.

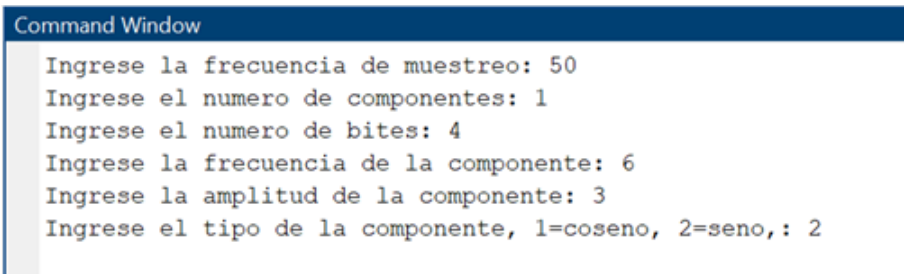


Figura 47: Parámetros .

Código 5.19

Código

```
fs=input('Ingrese la frecuencia de muestreo: ');
ts=1/fs;
N=input('Ingrese el numero de componentes: ');
t=ts/10:ts/10:1;
suma=0;
B=input('Ingrese el numero de bits de cada nivel: ');
for k=1:N
    f=input('Ingrese la frecuencia de la componente: ')
       ;
    A=input('Ingrese la amplitud de la componente: ');
    ti=input('Ingrese el tipo de la componente, 1=
       coseno, 2=seno,: ');
    if ti==1
        y=A*cos(2*pi*f*t);
    else
        y=A*sin(2*pi*f*t);
    end
    suma=suma+y;
end
plot(t,suma,'k')
title('Senal Analogica')
maxsum=max(suma);
minsum=min(suma);
D=maxsum+(-1*(minsum));
L=2^B;
Delta=D/L;
Deltamed=[Delta/2];
Cuantificacion=[0];
Valor=[0];
b=1;
a=0;
figure(2)
for k2=ts/10:ts/10:N
    if mod(k2,ts)==0
        z(b)=suma(b);
        a=a+1;
        xy(a)=z(b);
    else
        z(b)=0;
    end
    aux1=[k2,k2];
    aux2=[0,z(b)];
    plot(aux1,aux2,'r')
    hold on
    b=b+1;
end
```

Código

```
%% Cont...
cuant=[0];
aux=maxsum/(L/2);
for c=1:L
    if c==1
        cuant(c)=maxsum-(aux/2);
    else
        cuant(c)=cuant(c-1)-aux;
    end
end
k3=L-1;
    for k4=1:L/2
        for k5=1:length(xy)
            ls=cuant(k4)+aux/2;
            li=cuant(k4)-aux/2;
            if xy(k5)<=ls && xy(k5)>=li
                Cuantificacion(k5,:)=[k3];
            end
        end
        k3=k3-1;
    end
k6=0;
    for k7=L/2+1:L
        for k8=1:length(xy)
            ls=cuant(k7)+aux/2;
            li=cuant(k7)-aux/2;
            if xy(k8)<=ls && xy(k8)>=li
                Cuantificacion(k8,:)=[k6];
            end
        end
        k6=k6+1;
    end
Muestreo=transpose(xy);
Niveles=transpose(Cuantificacion);
Codificacion=dec2bin(Niveles,B);
T = table(Muestreo,Cuantificacion,Codificacion)
```

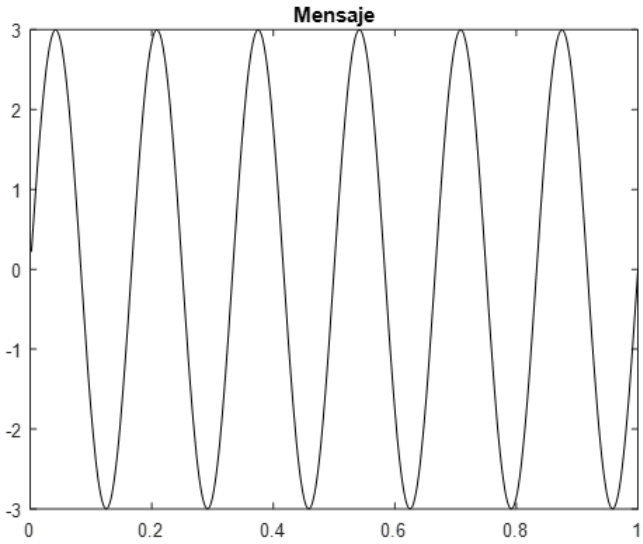


Figura 48: Señal analógica.

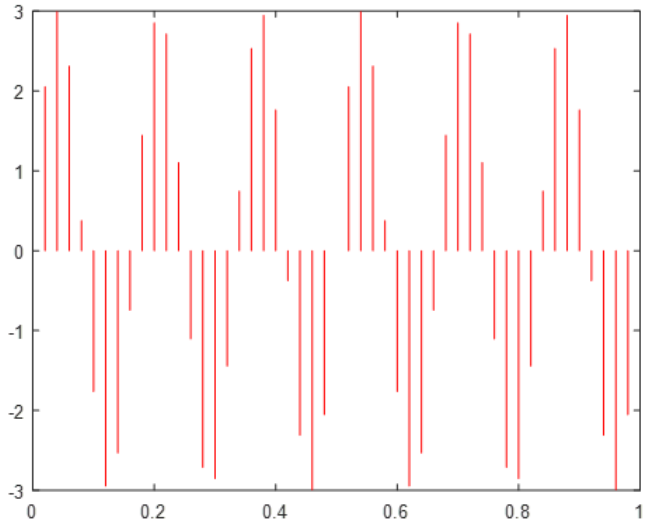


Figura 49: Señal muestreada.

Muestreo	Cuantificacion	Codificacion
2.0536	13	1101
2.9941	15	1111
2.3115	14	1110
0.376	9	1001
-1.7634	4	0100
-2.9469	7	0111
-2.533	6	0110
-0.74607	1	0001
1.4453	11	1011
2.8532	15	1111
2.7145	15	1111
1.1044	10	1010
-1.1044	2	0010
-2.7145	7	0111
-2.8532	7	0111
-1.4453	3	0011
0.74607	9	1001

Figura 50: Tabla de resultados.

3.5. Modulación AM y FM

La modulación es el proceso de modificar una o más propiedades de una señal llamada portadora, de mayor frecuencia que la señal de mensaje, para transmitir información. Básicamente, se trata de adaptar la señal de mensaje a la señal portadora, logrando una transmisión eficiente a través de un medio. Dos de las modulación analógicas mas utilizadas son:

Modulación por Amplitud (AM): La amplitud de la señal portadora cambia dependiendo de la señal de mensaje.

Modulación por Frecuencia (FM): La frecuencia de la señal portadora cambia según la señal de mensaje.

El siguiente **código 5.20** calcula y dibuja las señales moduladas en amplitud y en frecuencia, así como produce las gráficas de la **Figura 51**, **52** y **53**.

Código 5.20

Código

```
fo=2; A=3; t=0:0.005:1; f=A*sin(2*pi*fo*t);
am=ammod(f,fo,4); fm=fmmod(f,fo,50,1);
plot(t,f) grid on;
xlabel('x') ylabel('y')
title('Senal Analogica')
figure(2)
plot(t,am)
xlabel('x') ylabel('y') title('Senal AM')
figure(3)
plot(t,fm)
xlabel('x') ylabel('y') title('Senal FM')
```

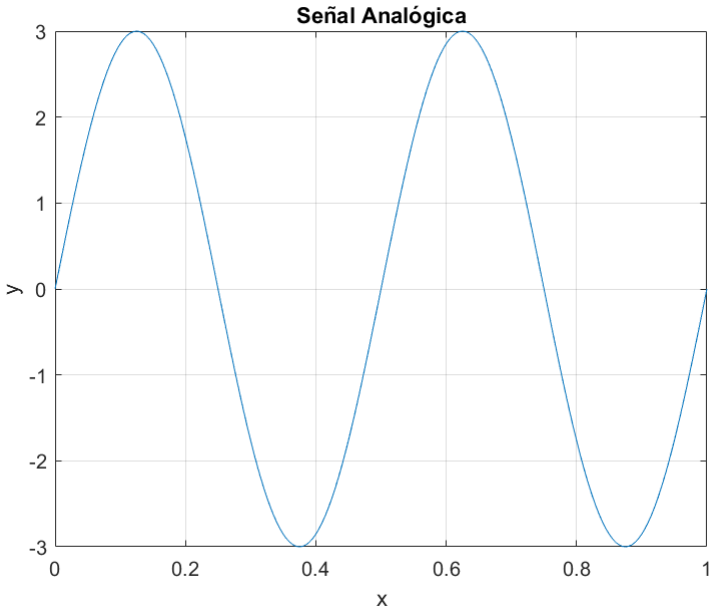


Figura 51: Señal Analógica.

Se utiliza el comando `ammod`, el cual tiene como parámetros de entrada la señal, la frecuencia (f) de la señal y la frecuencia de la portadora. Si se desea saber más sobre este comando, en la ventana de comandos escriba `help ammod`, de la misma manera para `fmmod`.

3.6. Densidad Espectral de Potencia

El siguiente **código 5.21** muestra la densidad espectral de potencia para una señal modulada en amplitud (AM), haciendo uso de la transformada de Fourier. Se consideran varios esquemas de la modulación en amplitud:

- Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora Suprimida (AM-DSB-SC)
- Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora (AM-DSB-C)
- Modulación de Amplitud de Banda Lateral Única (AM-SSB)

Código 5.21

Código

```
Am=input('Ingrese la amplitud del mensaje: ');
fm=input('Ingrese la frecuencia del mensaje: ');
Ac=input('Ingrese la amplitud de la portadora: ');
fc=input('Ingrese la frecuencia de la portadora:');
fs=input('Ingrese la frecuencia de muestreo: ');
m=input('Ingrese el indice de modulación: ');
t=0:1/fs:2;
x=Am*cos(2*pi*t*fm);
y=Ac*cos(2*pi*t*fc);
z=Ac*(1+m*x).*cos(2*pi*t*fc);
subplot(4,1,1)
plot(t,x)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]'); ylabel ('Amplitud'); title 'Mensaje
    ';
subplot(4,1,2)
plot(t,y)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Portadora');
subplot(4,1,3)
plot(t,z)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]'); ylabel ('Amplitud');
title ('Modulacion AM de doble banda lateral con portadora
    ');
N = 10*length(t);
fnorm = fs.*(-N/2:(N/2)-1)/N;
subplot(4,1,4)
t_f=fft(z,N);
plot(fnorm,abs(t_f))
grid on;
xlabel ('Frecuencia [Hz]'); ylabel ('Amplitud');
title ('Espectro AM doble banda lateral con portadora');
w=amdemod(z,fc,fs);
z2=x.*y;
figure(2)
subplot(4,1,1)
plot(t,x)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title 'Mensaje';
subplot(4,1,2)
plot(t,y)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title 'Portadora';
subplot(4,1,3)
plot(t,z2)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Modulacion AM de doble banda lateral con portadora
     suprimida');
```

Código

```
%% Cont...
subplot(4,1,4)
t_f=fft(z,N);
plot(fnorm,abs(t_f))
grid on;
xlabel ('Frecuencia [Hz]'); ylabel ('Amplitud');
title ('Espectro AM doble banda lateral con portadora');
w=amdemod(z,fc,fs);
z2=x.*y;
figure(2)
subplot(4,1,1)
plot(t,x)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title 'Mensaje';
subplot(4,1,2)
plot(t,y)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title 'Portadora';
subplot(4,1,3)
plot(t,z2)
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Modulacion AM de doble banda lateral con
   portadora suprimida');
subplot(4,1,4)
t_f2=fft(z2,N);
plot(fnorm,abs(t_f2))
grid on;
xlabel ('Frecuencia [Hz]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Espectro AM doble banda lateral con portadora
   suprimida');
w2=amdemod(z2,fc,fs);
figure(3)
y3 = ssbmod(x,fc,fs);
x3 = ssbdemod(y3,fc,fs);
subplot(2,1,1);
plot(t,y3);
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Modulacion AM de banda lateral unica');
grid on;
xlabel ('Tiempo [s]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Modulacion AM de banda lateral unica');
subplot(2,1,2)
t_f3=fft(y3,N);
plot(fnorm,abs(t_f3))
grid on;
xlabel ('Frecuencia [Hz]');
ylabel ('Amplitud');
title ('Espectro AM banda lateral unica');
```

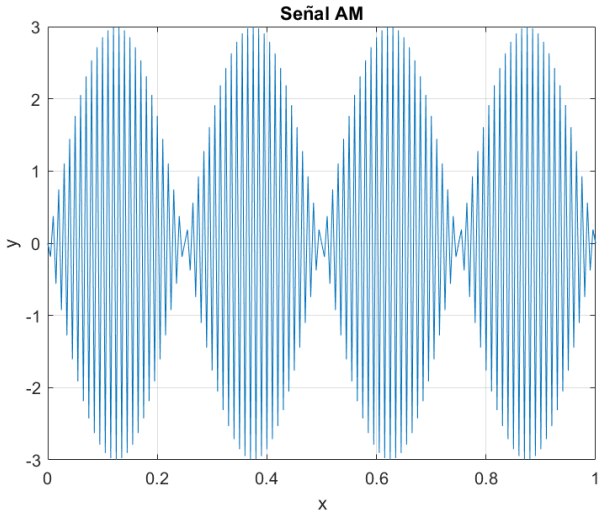


Figura 52: Modulación AM.

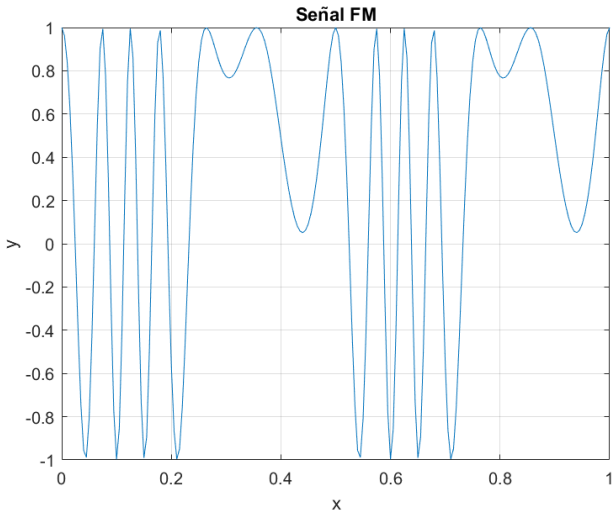


Figura 53: Modulación FM.

Utilizando los valores de entrada que se muestran en la **Figura 54**, el código produce las gráficas de la **Figura 55-57**.

```
Command Window
  Ingrese la amplitud del mensaje: 5
  Ingrese la frecuencia del mensaje: 8
  Ingrese la amplitud de la portadora: 8
  Ingrese la frecuencia de la portadora:70
  Ingrese la frecuencia de muestreo: 1000
  Ingrese el indice de modulación: 0.8
```

Figura 54: Valores de entrada del **código 5.21**.

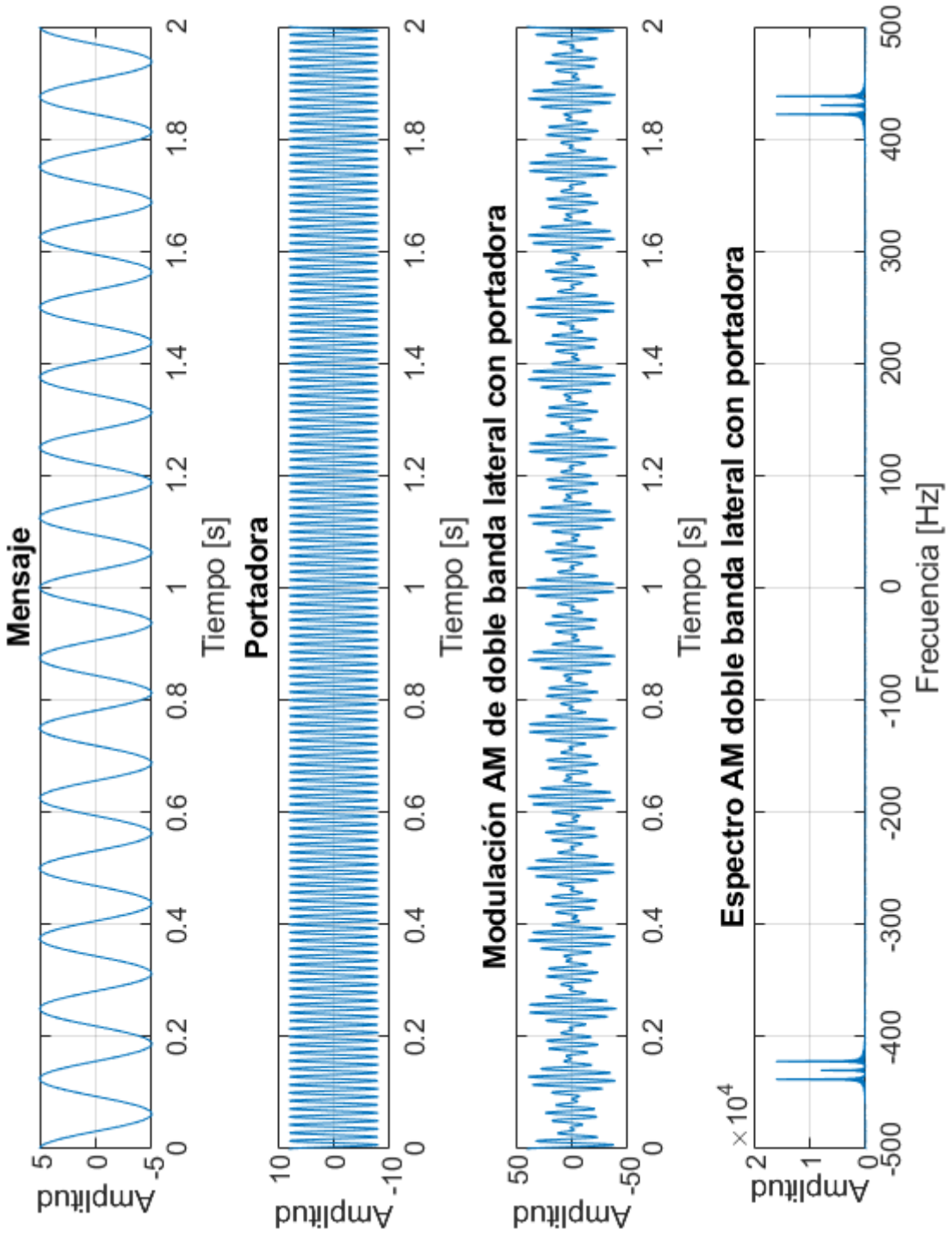


Figura 55: Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora.

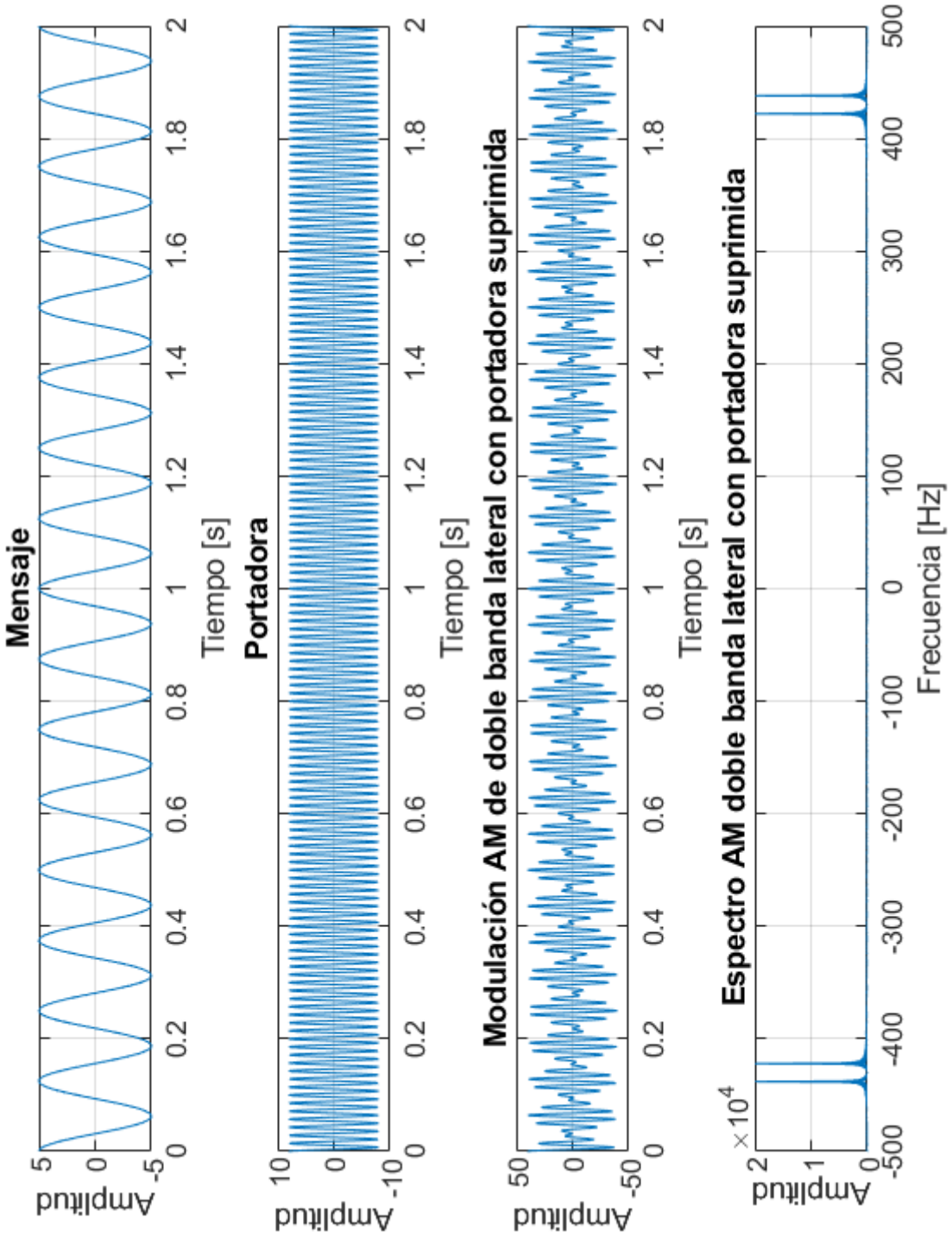


Figura 56: Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora Suprimida.

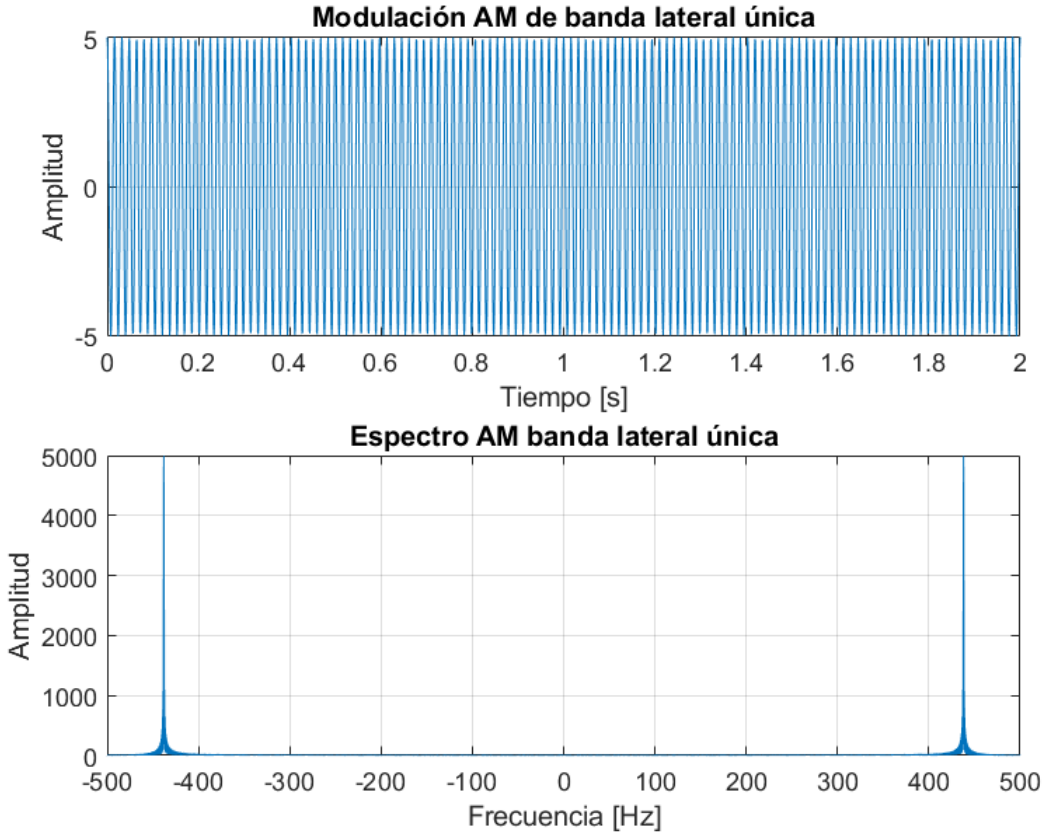


Figura 57: Modulación de Amplitud de Banda Lateral Única.

3.7. Código AMI

Las señales digitales son secuencias de pulsos de unos $(1')$ y ceros $(0')$, aquí cada uno de los pulsos representa un elemento de la señal. Estos pulsos son representados por ceros $(0')$ y unos $(1')$. Los *códigos de línea* surgen bajo la necesidad de tener que transmitir señales digitales a través de diversos medios de transmisión. En otras palabras, son una forma de representación de las secuencias de unos $(1')$ y ceros $(0')$ **(Proakis et al., 1994)**.

El código de línea **AMI**, del acrónimo proveniente de *Alternate Mark Invesiones*, y que indica una inversión alternada, es decir, va alternando los valores en donde la secuencia vale 1, a un valor de amplitud positivo $(+A)$ y un valor de amplitud negativo $(-A)$, y los ceros quedan igual sin sufrir cambio alguno, esto se puede observar en la **Figura 58**.

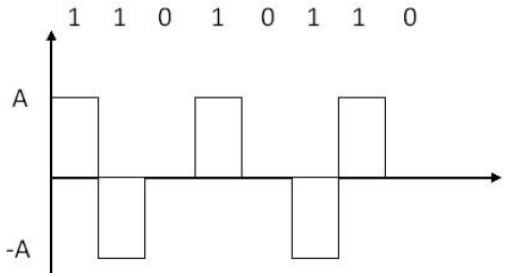


Figura 58: Código AMI.

El siguiente **código 5.22** convierte una secuencia a código AMI y produce la gráfica de la **Figura 59**, así como imprime las siguientes líneas:

```
La secuencia de entrada es:
     1     1     0     0     1     0     1     1     0     1     1     0     0     1

La secuencia AMI es:
     5    -5     0     0     5     0    -5     5     0    -5     5     0     0    -5
```

Código 5.22

Código

```
else
aux(k)=0;
end
end
disp('La secuencia de entrada es: ')
disp(sec)
disp('La secuencia AMI es: ')
disp(aux)
t=0:n-1;
stairs(t,aux)
axis([-1 14 -6 6])
grid on
xlabel('Periodo') ylabel('Amplitud') title('Codigo AMI
    ')
A=5;
sec=[1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1];
b=0;
n=length(sec);
for k=1:n
if sec(k)==1
b=b+1;
if mod(b,2)==0
aux(k)=-A;
else
aux(k)=A;
end
```

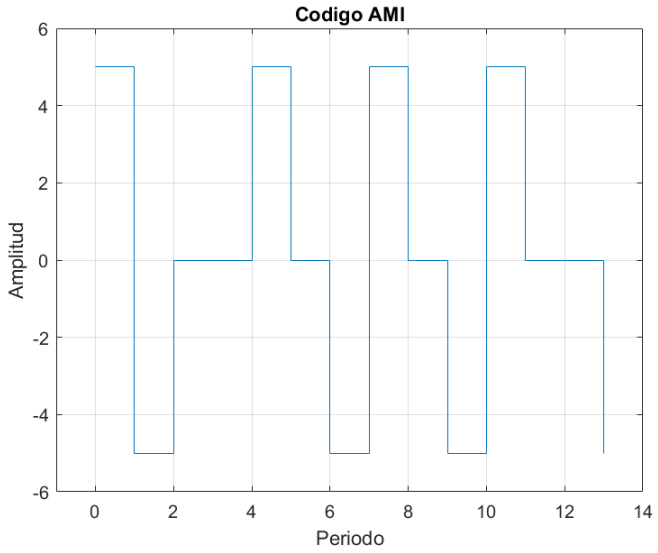


Figura 59: Código AMI.

4. Serie y Transformada de Fourier

4.1. Serie de Fourier

En la ingeniería, y en especial en las áreas de comunicaciones y electrónica, las *series de Fourier* se convierten en un tema relativamente importante y esencial, ya que son una herramienta matemática que nos ayudan en el análisis de señales periódicas. Como bien se dice, al ser una herramienta matemática, esta nos ayuda al análisis de diferentes señales a través de su descomposición en una suma infinita de funciones cosenoidales más simples. Antes de introducirnos directamente en el tema se recomienda que el alumnado estudie la representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia.

4.1.1. Representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia

Cuando comenzamos a trabajar con señales, uno de los conceptos fundamentales que se abordan es referente al *contenido de frecuencia* de una señal. La manera de generar el contenido de frecuencia para una gran cantidad de señales se puede lograr si dividimos la señal en sus componentes de frecuencia, las cuales están dadas por señales cosenoidales **(Oppenheim et al., 1998)**.

Consideremos la siguiente señal $x(t)$, la cual es una señal continua en el tiempo (t) y definida por una suma finita de señales cosenoidales:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad -\infty < t < \infty \tag{10}$$

De la **ecuación 10** definimos:

- N toma valores de enteros positivos.
- A_n representan las amplitudes de las funciones sinusoidales (las cuales asumimos como no negativas)
- ω_n representan las frecuencias (en rad/s) de las sinusoides
- θ_n representan las fases de las sinusoides.

Las frecuencias de la señal definida por la **ecuación 10** son ω_1 y sus componentes de frecuencia son las sinusoides $A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$. La señal definida en la **ecuación 10** está caracterizada por tres parámetros principales, que son: las frecuencias ω_1, ω_2, ..., ω_N, las amplitudes A_1, A_2, ..., A_N, y las fases θ_1, θ_2, ..., θ_N, **(Kamen & Heck, 2008)**.

Como se menciono anteriormente, la señal se puede caracterizar en función de los tres parámetros que la componen. Un caso particular, son las amplitudes A_1, A_2, ..., A_N, definen los pesos relativos de cada componente en cada frecuencia de la señal. Estas amplitudes caracterizan la *"forma"* de la señal, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 Suma de sinusoides

Considere la señal continua dada por

$$x(t) = A_1 \cos(t) + A_2 \cos(4t + \pi/3) + A_3 \cos(8t + \pi/2) +, \quad -\infty < t < \infty \tag{11}$$

Se puede observar que los parámetros de la señal son los siguientes; frecuencias de 1, 4, 8 rad/s, amplitudes A_1, A_2, A_3, y fases $0, \pi/3, \pi/2$ rad. Queremos mostrar que la forma de la señal se define por las amplitudes A_1, A_2, A_3.

Código

Código 6.1.

```
t = 0:20/400:20;
w1 = 1; w2 = 4; w3 = 8;
A1 = input('Input the amplitude A1 for w1 = 1: ');
A2 = input('Input the amplitude A2 for w2 = 4: ');
A3 = input('Input the amplitude A3 for w3 = 8: ');
x = A1*cos(w1*t)+A2*cos(w2*t+pi/3)+A3*cos(w3*t+pi/2);
```

Para alcanzar el propósito antes descrito, utilizamos los comandos de **MATLAB** presentados en la página anterior para generar $x(t)$, para distintos valores de A_1, A_2, y A_3. Mediante los comandos generamos las gráficas **MATLAB** de $x(t)$ para los tres casos $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$; $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0$; y $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$. En la **Figura 60** se muestran los resultados. En los tres casos, sólo aparecen las componentes de frecuencia de 1 rad/s y 4 rad/s.

Primer caso: La componente de frecuencia 4 rad/s, se observa que sobresale en la **Figura 60(a)**, debido a que su amplitud es el doble en comparación con la componente de frecuencia 1 rad/s.

Segundo caso: caso contrario al caso 1, la componente dominante es la de frecuencia 1 rad/s, su amplitud es el doble en comparación con la componente de frecuencia 4 rad/s. Esto se muestra en la **Figura 60(b)**.

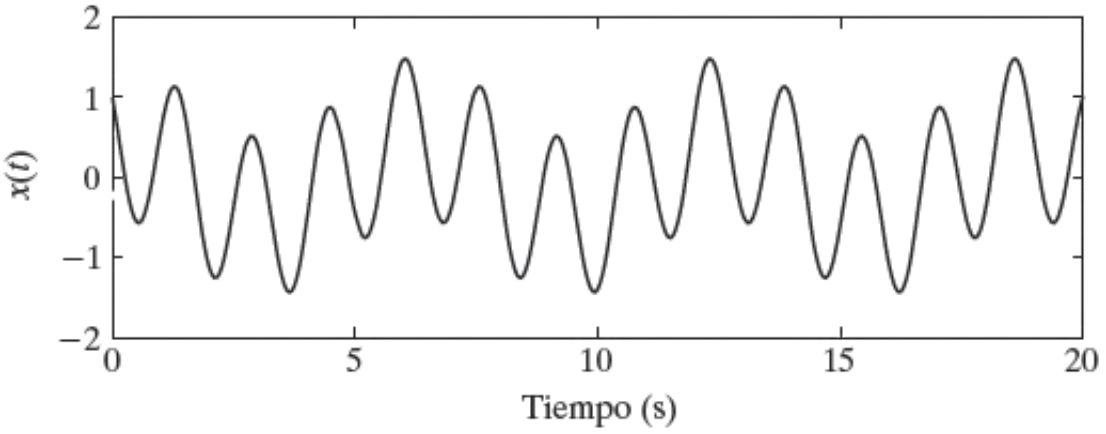
Tercer caso: No existe componente dominante, ambos tienen la misma amplitud, como se muestra en la **Figura 60(c)**.

Ejecutamos de nuevo el programa de **MATLAB** con los siguientes valores $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.5$; $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.5$; y $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$. ■

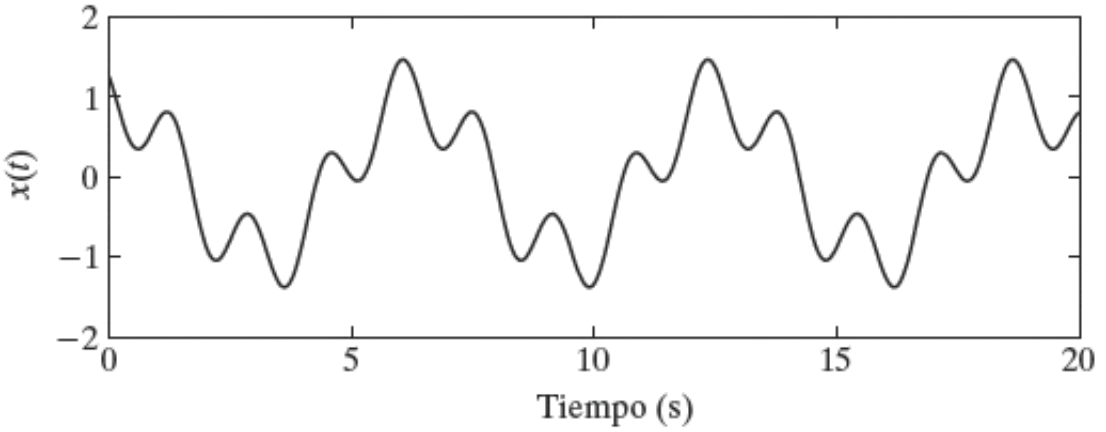
En los tres casos, están presentes todas las componentes. En el primer caso la componente dominante es la de 4 rad/s. En el segundo caso la componente dominante es la de 1 rad/s, y en el último caso todas las componentes tienen la misma amplitud. Estos casos se muestran en la **Figura 61**.

Considerando, nuevamente, la señal de la **ecuación 10**. Sea ω la *frecuencia variable*. Se puede graficar las amplitudes A_n vs ω. La señal $x(t)$ esta definida para valores finitos de frecuencias, por lo tanto, la gráfica tendrá un número finitos de valores en las frecuencias ω_n.

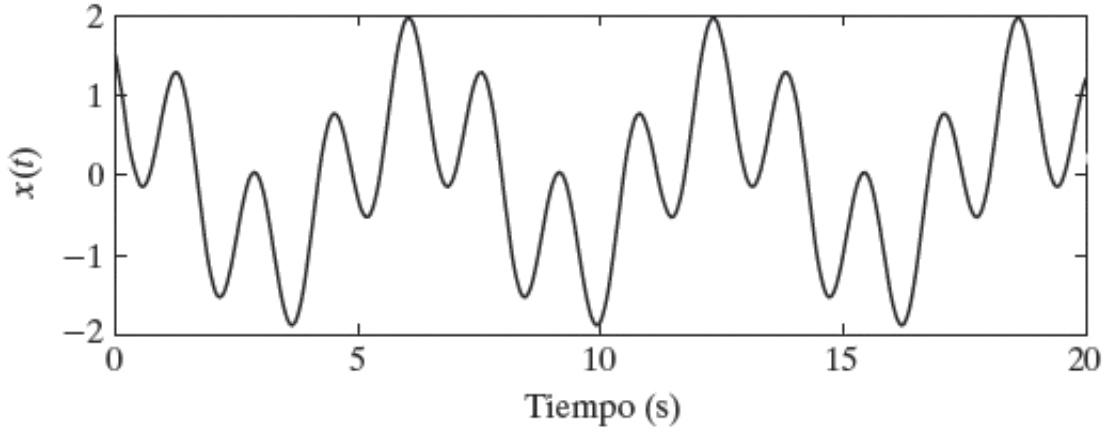
La gráfica que se muestra se conoce como *espectro de línea* o *espectro de amplitud* de la señal $x(t)$. El objetivo de este tipo de graficas es mostrar las magnitudes relativas de todas las componentes de frecuencia que integran la señal. Como ejemplo, podemos considerar la señal del **ejemplo 4.1**.



(a)

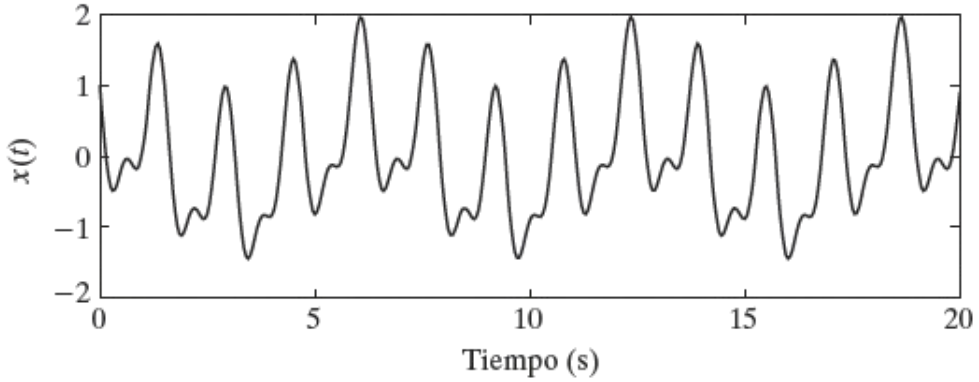


(b)

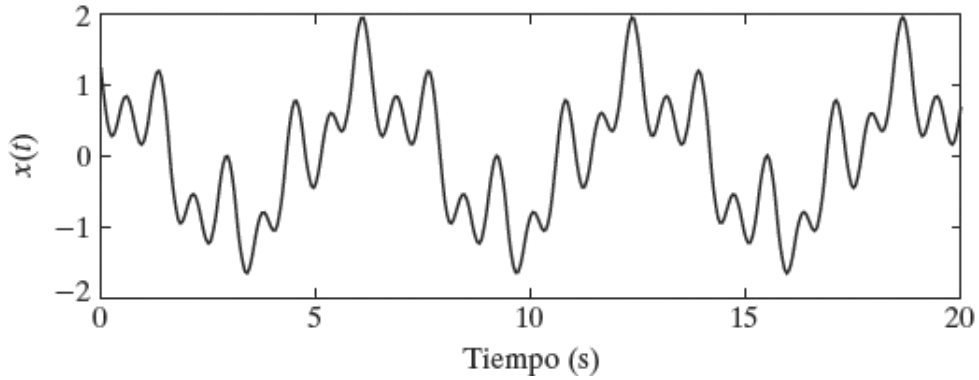


(c)

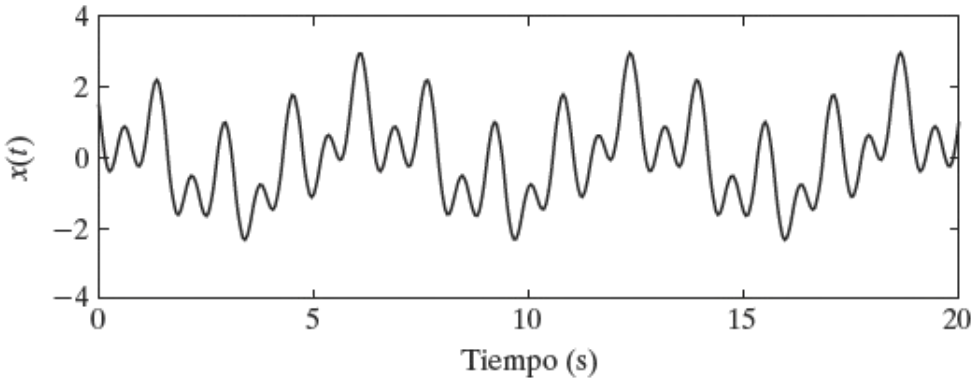
Figura 60: Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$; (b) $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0$; y (c) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$.



(a)



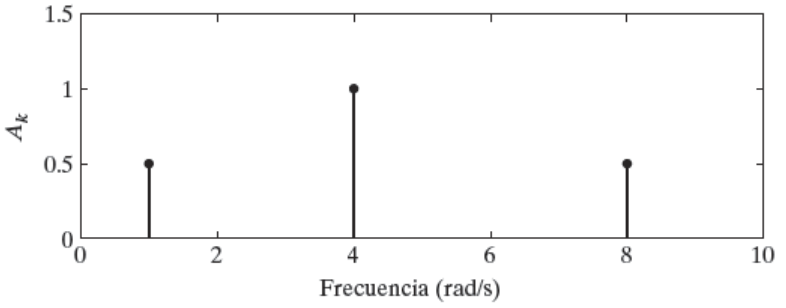
(b)



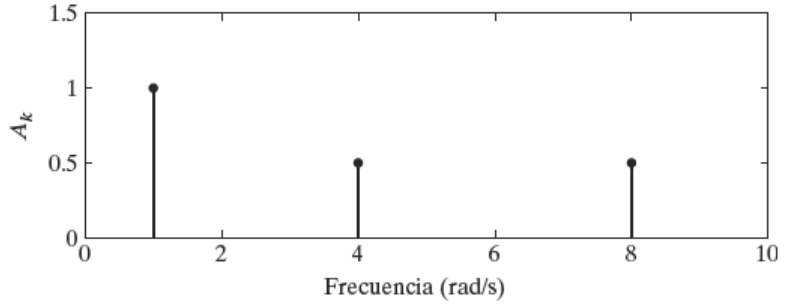
(c)

Figura 61: Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.5$; (b) $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.5$; y (c) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$.

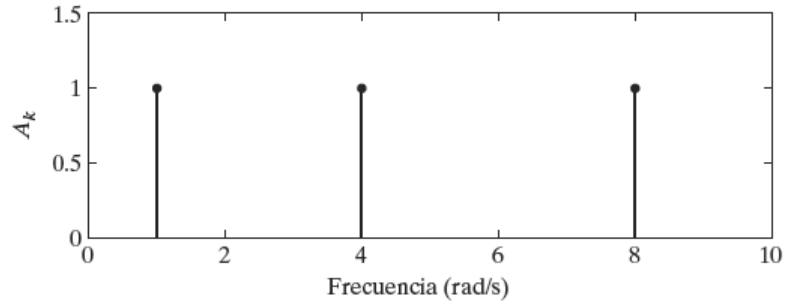
En la **Figura 62** se presenta el espectro de amplitud, de todas las versiones de la señal de la **Figura 61**. Existe una correspondencia entre la **Figura 62** y la **Figura 61**. La **ecuación 10** también contiene un *espectro de fase*, que consiste en graficar la fase θ_n vs la frecuencia ω. En la **Figura 63** se muestra un ejemplo de este tipo de espectro, para la **ecuación 11**.



(a)



(b)



(c)

Figura 62: Espectros de amplitud

4.1.2. Serie trigonométrica de Fourier

La serie de Fourier es una sucesión infinita que representa a una función o señal periódica, que también es continua por partes. Estas herramientas matemáticas, son la base fundamental para el análisis de Fourier, que sirven para estudiar las señales periódicas, mediante la desintegración de la señal en componentes de una suma infinita de funciones trigonométricas (senos y cosenos) **(Oppenheim et al., 1998)**.

Una señal $x(t)$ es periódica si cumple con la ecuación **ecuación 12**. Donde T se conoce como periodo, y es número real positivo.

$$x(t+T) = x(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{12}$$

El número más pequeño para el cual se cumple la **ecuación 12** se conoce como periodo funda-

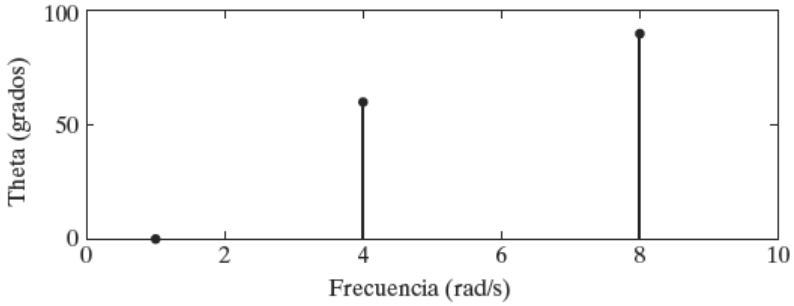


Figura 63: Espectro de fase de la señal $x(t)$ definida por **ecuación 11**.

mental T. En la **Figura 64** se muestra un ejemplo para $T = 2$, para un tren de pulsos.

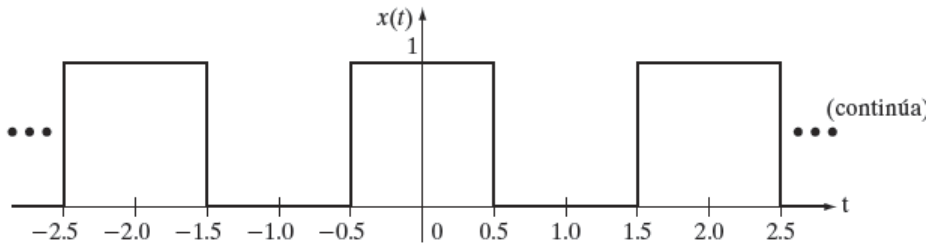


Figura 64: Señal periódica con periodo fundamental $T = 2$.

Si $x(t)$ es una señal periódica, se puede escribir como una suma de señales senoidales, como se muestra en la **ecuación 13**.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right], \quad -\infty < t < \infty \tag{13}$$

Donde a_0, a_n y b_n se conocen como coeficientes, y ω_0 es la *frecuencia fundamental* (en rad/s) dada por $\omega_0 = 2\pi/T$.

Los coeficientes a_n y b_n se calculan como se muestran en las siguientes ecuaciones.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_o t)dt, \quad n = 1, 2, ... \tag{14}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega_o t)dt, \quad n = 1, 2, ... \tag{15}$$

Los coeficientes a_n y b_n, se pueden integrar en cualquier periodo completo, como se muestra:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_o t)dt, \quad n = 1, 2, ...$$

El coeficiente a_0 representa la componente de cd de la señal, dada por:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{16}$$

La representación de la **ecuación 13** es conocida como *serie trigonométrica de Fourier*. Y a cada componente de la suma se conoce como armónicos. Observe que la frecuencia de cada componente de la suma son múltiplos de $n\omega_0$.
La serie trigonométrica de Fourier se puede mostrar como una *forma de cosenos con fase*

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad -\infty < t < \infty \tag{17}$$

donde

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, ... \tag{18}$$

y

$$\theta_n = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_n}{a_n}\right), & n = 1, 2, ..., \text{cuando } a_n \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_n}{a_n}\right), & n = 1, 2, ..., \text{cuando } a_n < 0 \end{cases} \tag{19}$$

La **ecuación 17** puede ser un caso particular de la **ecuación 10**, considerando que la suma sea infinita ($N = \infty$) y agregando la componente cd de la señal, a_0.

Es importante concluir que la serie de Fourier muestra que toda señal periódica, que cumple con las *condiciones de Dirichlet* **(Moya, 2008)**, se puede escribir como una suma de señales sinusoides.

1. $x(t)$ es integrable en su totalidad en cualquier periodo; es decir,

$$\int_a^{a+T} |x(t)|dt < \infty \quad \text{para cualquier } a$$

2. En un periodo la señal $x(t)$, contiene un número finito de mínimos y máximos.
3. En un periodo la señal $x(t)$, sólo tiene un número finito de discontinuidades.

Ejemplo 4.2 Tren de pulsos rectangulares

Dada la señal mostrada en la **Figura 64**. Se observa que la señal es periódica con $T = 2$, en consecuencia, la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/2$ rad/s. Calculando los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{0.5}(1)dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 x(t)\cos(n\pi t)dt \\ &= \int_0^{0,5}\cos(n\pi t)dt + \int_{1,5}^2 \cos(n\pi t)dt \\ &= \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi t)|_{t=0}^{t=0.5} + \frac{1}{\pi n}\sin(n\pi t)|_{t=1.5}^{t=2} \\ &= \frac{1}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}+n\pi\right)\right] = \frac{1}{\pi n}\left[2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right], n = 1,2,... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 x(t)\sin(k\pi t)dt = \int_0^{0.5}\sin(k\pi t)dt + \int_{1.5}^2 \sin(k\pi t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi k}\cos(k\pi t)|_{t=0}^{t=0.5} - \frac{1}{\pi k}\cos(k\pi t)|_{t=1.5}^{t=2} = -\frac{1}{\pi k}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0, k = 1,2,... \end{aligned}$$

Con estos resultados, se puede escribir la señal $x(t)$ mediante su representación en serie de Fourier, como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty \tag{20}$$

El resultado anterior, se puede reescribir para casos impares, debido a que la componente $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ es cero para valores pares, quedando como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1 \\ k_{impares}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty \tag{21}$$

■

Simetría par o impar

Por definición, una señal $x(t)$ es una señal par si cumple con $x(t) = x(-t)$ para $\infty < t < \infty$. Por otro laso, es una señal impar si cumple con $x(t) = -x(-t)$ para $\infty < t < \infty$.

Sean $x(t)$ y $\nu(t)$ dos señales pares (o impares), se tiene que para cualquier constante $\eta > 0$, se cumple con:

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)\nu(t)dt = 2\int_0^{\eta} x(t)\nu(t)dt \tag{22}$$

Sea $x(t)$ una señal par y $\nu(t)$ una señal impar, se cumple con:

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)\nu(t)dt = 0 \tag{23}$$

Por lo tanto, dado que $\cos(n\pi t)$ es par y $\sin(n\pi t)$ es impar, si la señal $x(t)$ es par, la **ecuación 14** y la **ecuación 15** se reducen a

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt, \quad n = 1, 2, ... \tag{24}$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{25}$$

Por otro lado, si la señal $x(t)$ es impar, la **ecuación 14** y la **ecuación 15** se reducen a

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{26}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt, \quad n = 1, 2, ... \tag{27}$$

Estás expresiones (**ecuación 24-27**), nos sirven para simplificar el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier, según sea el caso, $x(t)$ par o impar. Para mostrar estas simplificaciones se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3 Reducción por simetría

Considerando nuevamente la señal de la **Figura 64**. Se sabe que esta señal es par y, por lo que se pueden utilizar la **ecuación 24** y la **ecuación 25** para encontrar los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier a_n y b_n.

- Primero, por simetría par de la señal $x(t)$, $b_n = 0, n = 1, 2, ...$
- Después, se calcula $a_n = 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2}\int_0^1 x(t)\cos(n\pi t)dt = 2\int_0^{0.5}\cos(n\pi t)dt \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi t)|_{t=0}^{t=0.5} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Los resultados coinciden con los encontrados en el ejemplo **4.2**, con esto se comprueba que usando la simetría se reduce el numero de cálculos.

■

Ejemplo 4.4 Ejercicio de MATLAB de serie de Fourier

Consideremos la función:

$$f(t) = 1 - \frac{t}{2}; \text{ para } -2 \leq x \leq 2 \tag{28}$$

Resolviendo los coeficientes de Fourier, se tiene $b_n = 2/n\pi$, con $T = 4$. El **código 6.2** genera la gráfica para la suma de los primeros N componentes de la serie de Fourier.

Código 6.2.

```
x=-2:0.005:2;
suma=0;
N=50;
for n=1:N
b=2/(n*pi);
suma=suma+(b*sin(n*x*pi/2));
end
plot(x, suma)
grid on
xlabel('x')
ylabel('bn')
title('Serie de Fourier')
```

La gráfica que produce el **código 6.2** se muestra en la **Figura 65**. ■

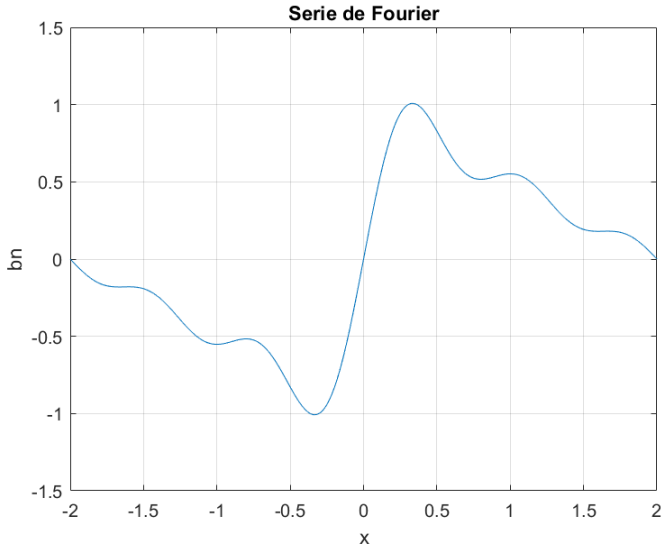


Figura 65: Serie de Fourier.

El fenómeno de Gibbs se genera por las discontinuidades que presenta la función, debido a que el resultado es una aproximación de la señal $x(t)$, dado que se toma para un valor finito de N. Gráficamente podemos observar este fenómeno en el **ejemplo 4.4**. Se presentan oscilaciones de la señal, el cual se puede reducir aumentando el número de elementos, por ejemplo para una valor de $N = 50$, se tiene el siguiente **código 6.3**, y el cual produce la gráfica de la **Figura 66**.

Ejemplo 4.5 **Reducción de las oscilaciones en la señal del ejemplo 4.4**

Código

Código 6.3.

```
x=-2:0.005:2;
suma=0;
N=50;
for n=1:N
b=2/(n*pi);
suma=suma+(b*sin(n*x*pi/2));
end
plot(x, suma)
grid on
xlabel('x')
ylabel('bn')
title('Serie de Fourier')
```

■

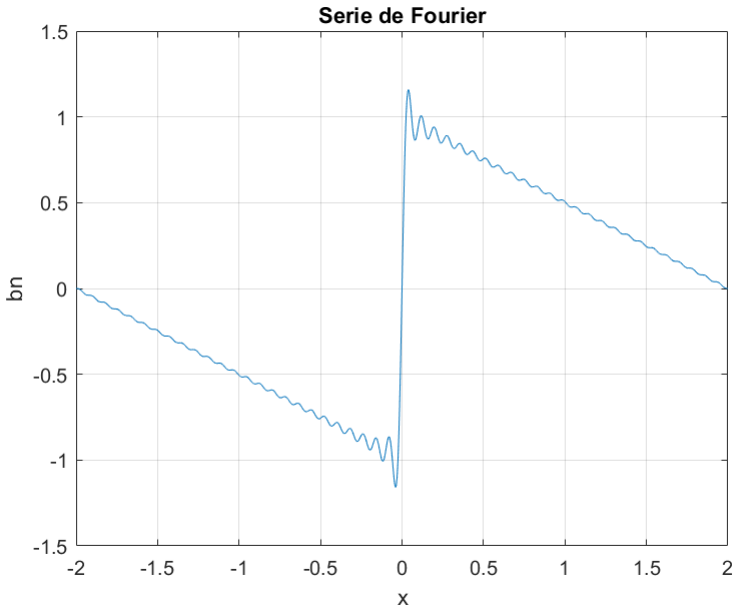


Figura 66: Gráfica de $x_N(t)$ cuando $N = 50$.

Veamos otro caso, tomando la señal $x(t)$ del ejemplo anterior del tren de pulsos, sea $x_N(t)$ la señal que define la suma finita, se tiene:

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k_{impar}}}^{N} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

Por definición del teorema de Fourier (**ecuación 13**), $x_N(t)$ converge en $x(t)$ cuando $N \to \infty$. Por lo tanto, conforme N tiende a infinito, el error $|x_N(t) - x(t)|$ tiende a cero. El código siguiente, muestra estos resultados para distintos valores de N.

Código

```
t = 3:6/1000:3;
N = input('Number of harmonics = ');
a0 = 0.5;
w0 = pi;
xN = a0*ones(1, length(t));
for k = 1:2:N,
xN = xN + 2/k/pi*sin(k*pi/2)*cos(k*w0*t);
end
```

Dado que la señal es par, los coeficientes a_n se excluyen del ciclo para hacer el programa de **MATLAB** más eficiente.

Ahora, con $N = 3$, $x_N(t)$ se vuelve

$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

Con $N = 3$, se obtiene la gráfica mostrada en la **Figura 67**.

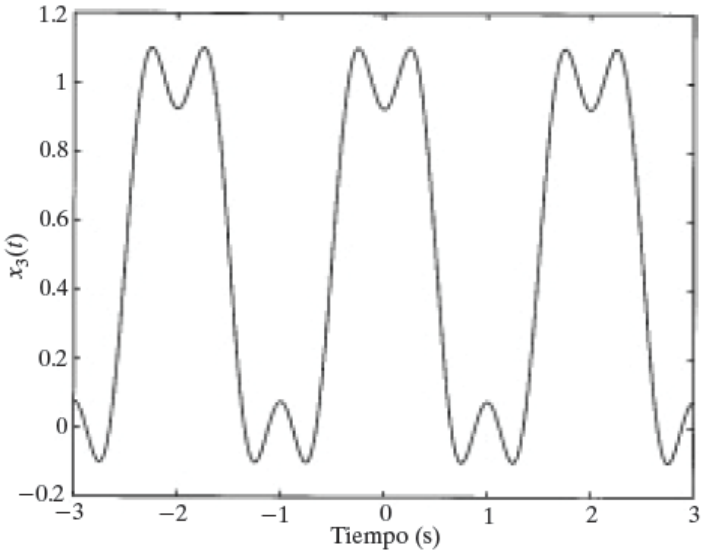


Figura 67: Gráfica de $x_N(t)$ cuando $N = 3$.

La **Figura 68** muestra los resultados para $N = 9$. Comparando la **Figura 67** y la **Figura 68** se observa que la aproximación para $N = 9$ presenta mejores resultados, dado que contiene mas armónicos. Al incrementar el valor de N se puede obtener una mejor aproximación de la señal $x(t)$. Por ejemplo, para $N = 21$ se obtiene la gráfica de la **Figura 69**.

Para $N = 45$ se obtiene el resultado mostrado en la , **Figura 70**. Se observa que los picos en las esquinas siguen apareciendo´, aún cuando N tiende a ∞ los picos estarán presentes (aproximadamente el 9 por ciento). Este fenómeno fue descubierto por Josiah Willard Gibbs, por lo que llevan su nombre y se conoce como fenómeno de Gibbs. Por lo tanto, para una señal $x(t)$ periódica, la aproximación por serie de Fourier presenta errores en las discontinuidades de $x(t)$ de hasta aproximadamente 9 %.

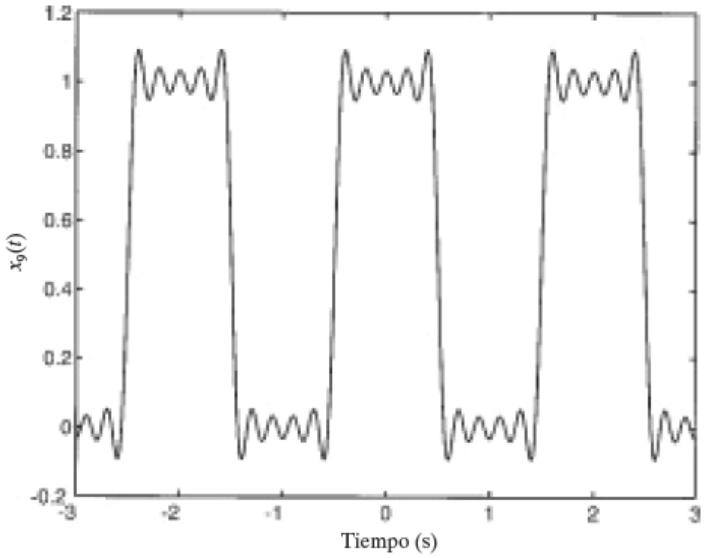


Figura 68: Aproximación $x_9(t)$.

4.1.3. Serie exponencial compleja

La serie trigonométrica de Fourier vista en la sección anterior (**ecuación 13**), se puede expresar de forma exponencial compleja, mediante:

$$\mathrm{x(t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty \tag{29}$$

En la representación la **ecuación 29**, el coeficiente c_0 es un número real y los coeficientes c_n $(n \neq 0)$ son números complejos. ω_0 al igual que la sección anterior representa la frecuencua fundamental, $\omega_0 = 2pi/T$, donde T es el periodo fundamental.

Existen ecuaciones de equivalencias que relacionan los coeficientes de la serie exponencial compleja con los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier. Estas relaciones se calculan mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right), n = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{30}$$

Los coeficientes de la serie exponencial compleja, c_n, se pueden calcular utilizando la fórmula

$$\mathrm{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{31}$$

Al igual que los coeficientes de la serie trigonométrica, los coeficientes de la serie exponencial, c_n, se pueden calcular integrando sobre cualquier periodo completo. Por ejemplo,

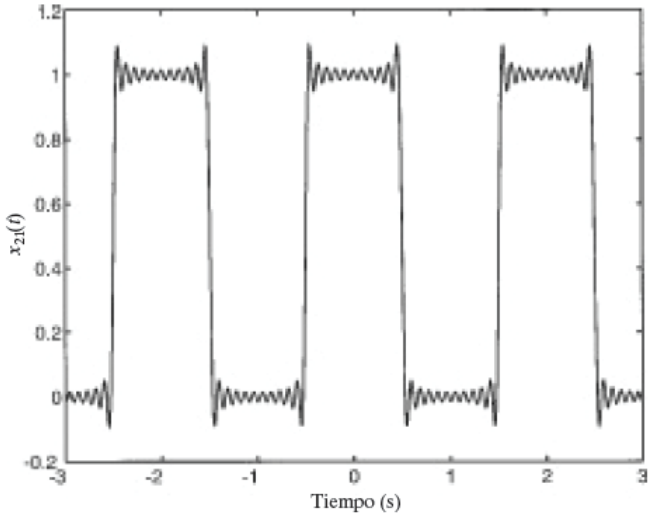


Figura 69: Aprovimación $x_{21}(t)$.

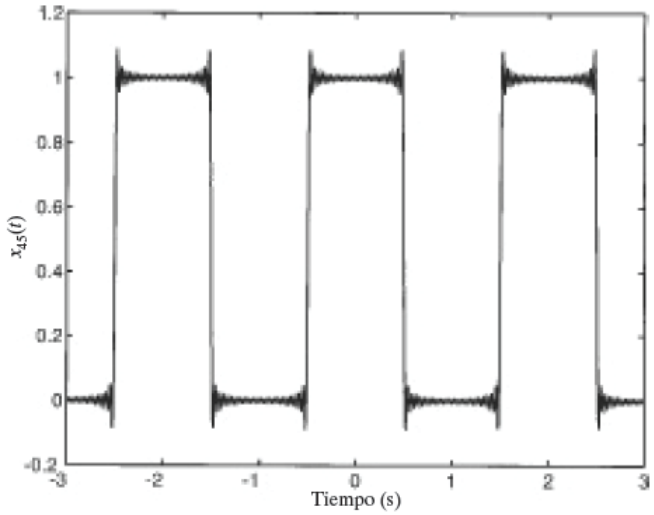


Figura 70: Aprovimación $x_{45}(t)$.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Si $x(t)$ es una señal periódica y está expresada mediante la serie exponencial compleja, entonces, es posible pasarla en forma de serie trigonométrica de Fourier utilizando las siguientes relaciones para los coeficientes

$$\boxed{a_0 = c_0} \qquad \boxed{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ &= 2\Re(c_n) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} b_n &= j\,(c_n - c_{-n}) \\ &= -2\Im(c_n), n = 1, 2, ... \end{aligned}} \tag{32}$$

Las relaciones de la **ecuación 32** se deducen fácilmente de la **ecuación 30**. Cuando la señal $x(t)$ es par, los coeficientes de la serie exponencial son números reales y las ecuaciones se reducen a lo siguiente:

$$c_0 = a_0 \qquad c_n = \frac{1}{2}a_n \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}a_n, n = 1, 2, ... \tag{33}$$

Cuando la señal $x(t)$ es impar de t, los coeficientes de la forma exponencial son números imaginarios (excepto para c_0) y las ecuaciones se reducen a lo siguiente:

$$c_0 = a_0 \qquad c_n = -j\frac{1}{2}b_n \qquad c_{-n} = j\frac{1}{2}b_n, n = 1, 2, ... \tag{34}$$

Ejemplo 4.6 Tren de pulsos rectangulares

Nuevamente, considerando la señal mostrada en la **Figura 64**. Con los resultados obtenidos en el ejemplo **4.2**, podemos calcular los coeficientes de la serie compleja de Fourier como sigue:

$$c_0 = \frac{1}{2}$$
$$c_n = \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, ...$$

Por lo tanto, teniendo los coeficientes podemos expresar la serie exponencial compleja de Fourier de un tren de pulsos como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n_{impar}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{jn\pi t}, \quad -\infty < t < \infty \tag{35}$$

■

Existe una manera sencilla de resolver las ecuaciones para el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando la herramienta de simulación MATLAB, para esto se puede puede utilizar `Symbolic Math Toolbox`. Un ejemplo se muestra en el siguiente código para la señal tren de pulsos rectangulares.

Código

```
k = 1:5;
syms ck t
ck = 0.5*int(exp(-j*k*pi*t),t,-0.5,0.5)
```

La instrucción `syms cn t` genera objetos simbólicos `cn` y `t`. La instrucción `int` integra el primer argumento respecto al segundo argumento `t`, desde -0.5 hasta 0.5. El resultado es un vector de `cn`.

Código

```
ck =[ 1/pi, 0, -1/3/pi, 0, 1/5/pi]
```

Serie de Fourier compleja y truncada

La señal $x_N(t)$ obtenida es un representación truncada de la serie trigonométrica de Fourier de la señal tren de pulsos rectangulares. Esta señal también se puede calcular truncando la forma de la serie exponencial de Fourier como sigue:

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Utilizando **MATLAB** se puede calcular lo expresado en la ecuación anterior, como sigue:

Código

```
t = -3:6/1000:3;
N = input ('Number of harmonics = ');
c0 = 0.5;
w0 = pi;
xN = c0*ones (1, length(t));
for k = 1:N,
ck = 1/k/pi*sin(k*pi/2);
c_k = ck;
xN = xN + ck*exp(j*k*w0*t) + c_k*exp(-j*k*w0*t);
end
```

Utilizando el código anterior para los casos $N = 3, 9, 21$ y 45, obtenemos los mismos resultados mostrados en la **Figura 67** a la **Figura 70**.

Ejemplo 4.7 **Cálculo de la serie de Fourier de una señal acotada**

Expanda en una serie de Fourier la siguiente señal $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < t < 0 \\ \pi - t & \text{para} 0 \leq t < \pi \end{cases} \tag{36}$$

El siguiente **código 6.4** calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la **Figura 71**.

Código 6.4.

Código

```
syms n t
A=pi;
T=2*pi;
wo=2*pi/T;
funcion=-t+A;
a0=int(funcion,0,pi)/(T/2);
an=int(funcion*cos(n*wo*t),0,pi)/(T/2);
bn=int(funcion*sin(n*wo*t),0,pi)/(T/2);
sum=0;
for k=1:6
 ank=subs(an,n,k);
 bnk=subs(bn,n,k);
 sum=sum+ank*cos(k*t)+bnk*sin(k*t);
end
suma=a0/2+sum;
xv=linspace(-pi,pi);
y=subs(suma,t,xv);
plot(xv,y,'*b','Linewidth',1)
grid on;
hold on;
t1=linspace(-(T/2),0);
t2=linspace(0,(T/2));
t=[t1,t2];
v=[(0*(-t1+A)) (-t2+A)];
plot(t,v,'r','Linewidth',3)
```

■

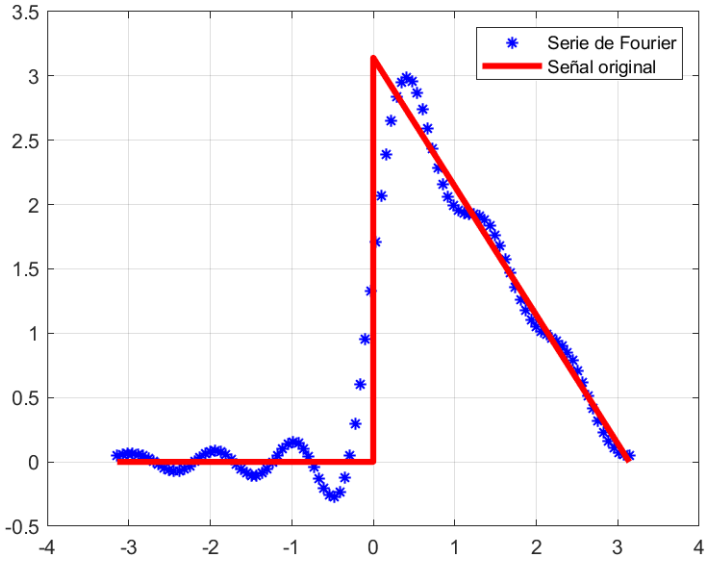


Figura 71: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del **ejemplo 4.7**.

Ejemplo 4.8 **Cálculo de la serie de Fourier de una señal cuadrada**

Calcular la serie de Fourier de la siguiente señal cuadrada $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} 0 < t < \pi \\ -1 & \text{para} \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \tag{37}$$

El siguiente **código 6.5** calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la **Figura 72**.

Código 6.5.

Código

```
T=2*pi;
f=1/T;
wo=(2*pi)/(T);
A=1;
n=1:50;
t=0:0.01:2*pi;
for n=1:2:6
 for k=1:size(t,2)
 s(n,k)=(((4*A)/(pi)))*((sin(n*wo*t(k)))/n);
 end
end
for k=1:size(t,2)
 st(k)=sum(s(:,k));
end
st(1)=st(1)+1;
plot(t,st,'*b','Linewidth',1);
grid on;
hold on;
f_cuadrada=square(2*pi*f*t,50);
plot(t,f_cuadrada,'Linewidth',3);
xlabel('tiempo');
ylabel('Amplitud');
```

■

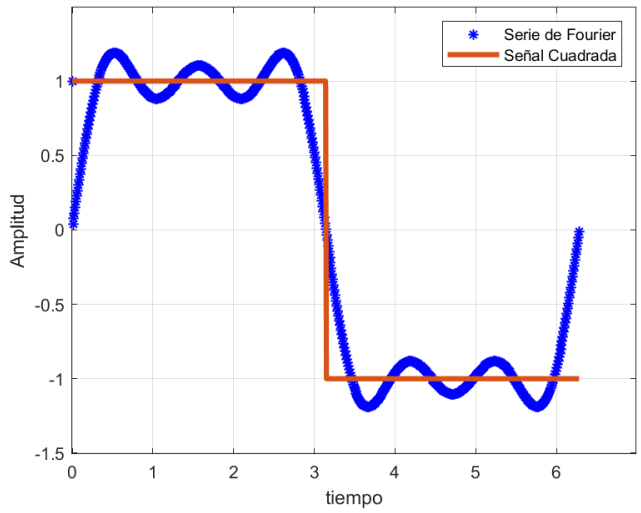


Figura 72: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del **ejemplo 4.8**.

Ejemplo 4.9 **Cálculo de la serie de Fourier de una señal diente de sierra**
Expanda en una serie de Fourier la siguiente señal $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} At/\pi & \text{para} 0 < t < \pi \\ (At/\pi) - 2A & \text{para} \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \tag{38}$$

El siguiente **código 6.6** calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la **Figura 73**.

Código 6.6.

```
syms n t
A=1;
T=2*pi;
wo=2*pi/T;
p=pi;
funcion1=(A*t)/pi;
funcion2=((A*t)/pi)-2*A;
a0=int(funcion1,0,pi)/(T/2)+int(funcion2,pi,2*pi)/(T
    /2);
an=int(funcion1*cos(n*wo*t),t,0,pi)/(T/2)+int(
    funcion2*cos(n*wo*t),t,pi,(2*pi))/(T/2);
bn=int(funcion1*sin(n*wo*t),t,0,pi)/(T/2)+int(
    funcion2*sin(n*wo*t),t,pi,(2*pi))/(T/2);
sum=0;
for k=1:40
 ank=subs(an,n,k);
 bnk=subs(bn,n,k);
 sum=sum+ank*cos(k*t)+bnk*sin(k*t);
end
suma=a0/2+sum;
xv=linspace(0,2*pi);
y=subs(suma,t,xv);
plot(xv,y,'*b','Linewidth',1)
grid on;
hold on;
t1=linspace(0,pi);
t2=linspace(pi,2*pi);
t=[t1,t2];
v=[(((A*t1)/pi)) (((A*t2)/pi)-2*A)];
plot(t,v,'r','Linewidth',2)
```

Código

■

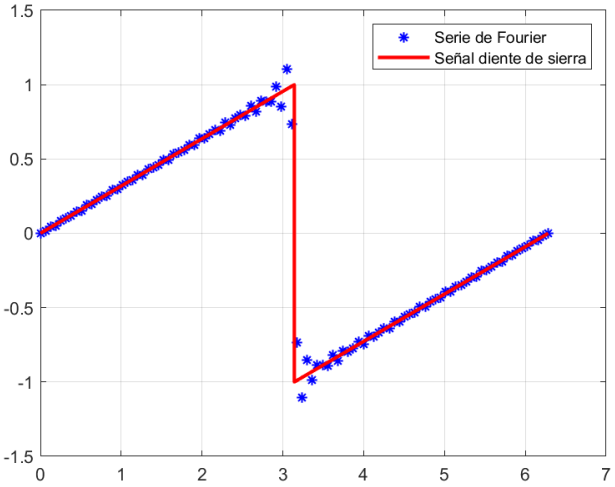


Figura 73: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del **ejemplo 4.9**.

4.2. Transformada de Fourier

Hemos visto que el análisis de una señal periódica se puede realizar mediante la serie de Fourier, esto permite representar a la señal en términos del contenido de frecuencia. Para las señales no periódicas existe una herramienta matemática que permite el análisis de las señales mediante sus componentes espectrales de frecuencia, esta herramienta es la transformada de Fourier.

Este análisis, mediante la transformada de Fourier, muestra que para las señales no periódicas las componentes existen o están definidas en todos los valores reales de la frecuencia ω, y no como en el caso de las señales periódicas que existe solo para valores discretos de ω, por lo tanto, para la transformada de Fourier no es un espectro de línea.

La transformada de Fourier de una señal $x(t)$ se denota por $X(\omega)$, se calcula como sigue:

$$\mathrm{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad -\infty < t < \infty \tag{39}$$

donde ω es la variable que representa la frecuencia. Como se observa las señales se denotan con letras minúsculas y la transformada de Fourier con letras mayúsculas.

Por naturaleza de la **ecuación 39**, los valores de la transformada de Fourier pueden ser complejos. Por esta razón, los resultados se representan mediante la función magnitud $|X(\omega)|$ (espectro de magnitud) y la función ángulo $\angle X(\omega)$ (espectro de fase).

La transformada de Fourier $|X(\omega)|$ de una señal $x(t)$, existe si la señal $x(t)$ es completamente integrable, es decir, si la **ecuación 39** converge. Eso es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \tag{40}$$

El siguiente ejemplo es para una señal que no cumple con la condición de existencia de la transformada de Fourier.

Ejemplo 4.10 Señal constante

Considere la señal de cd o constante

$$x(t) = 1, \quad -\infty < t < \infty$$

La señal constante es físicamente no realizable, es decir no es una señal real, ya que es una señal diferente de cero todo el tiempo. La transformada de Fourier de la señal es:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1)e^{-j\omega t}dt = \lim_{T\to\infty} \int_{T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{t=-T/2}^{t=T/2} \\ &= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{j\omega}\left[e^{(-\frac{j\omega T}{2})} - e^{(\frac{j\omega T}{2})}\right] \end{aligned} \tag{41}$$

Pero $e^{(\frac{j\omega T}{2})}$ no tiene un límite cuando $T \to \infty$ y, por lo tanto, la integral de la **ecuación 41** no converge. Esto indica que la señal no tiene transformada de Fourier, ya que al integrar la señal el área bajo la curva es infinita. ■

Ejemplo 4.11 Señal exponencial

Ahora considere la señal

$$x(t) = e^{-bt}u(t)$$

donde b es una número constante real, y $u(t)$ es la señal escalón unitario. La señal $x(t)$ toma el valor de la señal $u(t)$ cuando el número constante $b = 0$. La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

y debido a que $u(t) = 0$ para $t < 0$, $u(t) = 1$ para $t \geq 1$,

$$X(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\omega)t}dt$$

Evaluando la integral:

$$X(\omega) = -\frac{1}{b+j\omega}\left[e^{-(b+j\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right]$$

Cuando $b \leq 0$ el límite superior $t = \infty$ no puede ser evaluado y, entonces, es este intervalo para b, no existe la transformada de Fourier de $x(T)$. Como se menciono anteriormente, $x(t) = u(t)$ cuando $b = 0$, lo que indica que la función escalón unitario no tiene transformada de Fourier. Cuando $b > 0$, $e^{-bt} \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(b+j\omega)t} = \lim_{t\to\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t} = 0$$

La transforma de Fourier de $x(t)$ cuando $b > 0$ esta dad por

$$X(\omega) = -\frac{1}{b+j\omega}(0-1) = \frac{1}{b+j\omega}$$

y los espectros de amplitud y fase son

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{b}$$

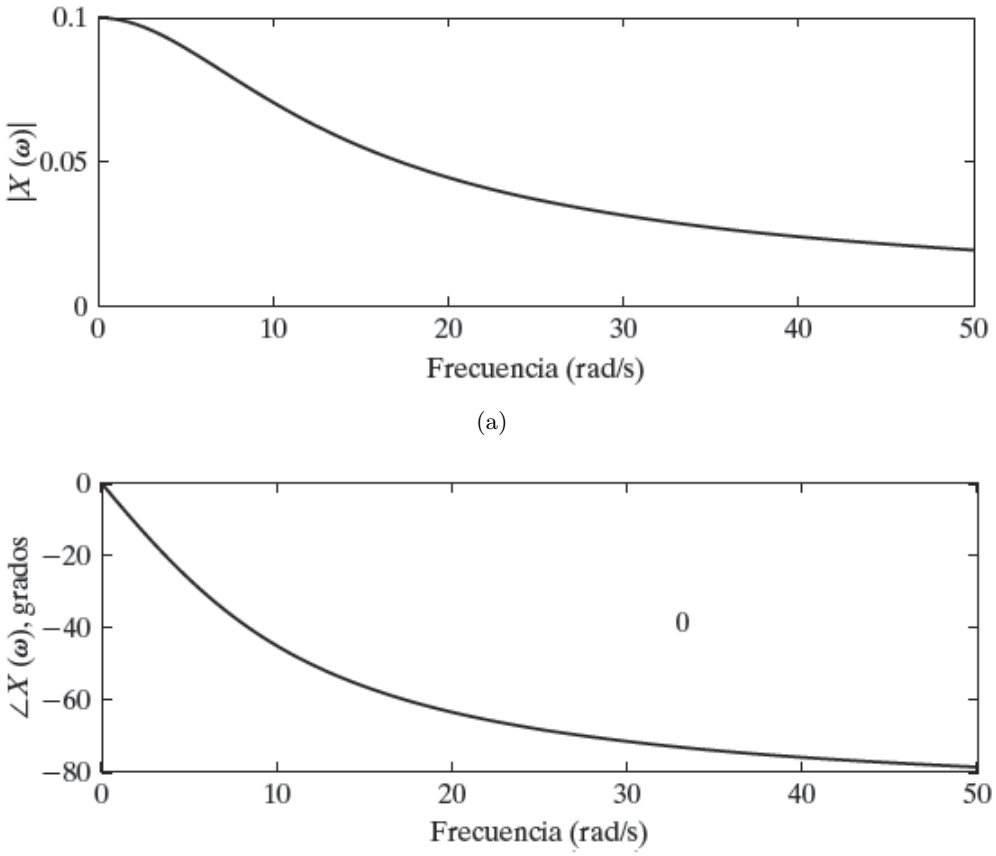
Como ejemplo, cuando $b = 10$, se generan los resultados para el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ y de fase $\angle X(\omega)$ utilizando **MATLAB**, como se muestra en el codigo siguiente:

Código

Código 6.7.

```
w = 0:0.2:50;
b = 10;
X = 1./(b+j*w);
subplot(211), plot(w, abs (X));
subplot(212), plot(w, angle (X));
```

Las gráficas que se generan con el código se muestran en la **Figura 74**. ■



(a)

(b)

Figura 74: Gráficas de los espectros de (a) amplitud y (b) fase, de $x(t) = e^{-10t}u(t)$.

4.3. Transformada inversa de Fourier

Dada la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la señal $x(t)$. Podemos obtener $x(t)$ a partir de $X(\omega)$ aplicando la transformada inversa de Fourier dada por

$$\mathrm{x(t)}= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{42}$$

Como notación se utilizará la siguiente para los pares de transformadas

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Un ejemplo de pares de transformadas de Fourier es el siguiente

$$\mathrm{p}_\tau(t) \leftrightarrow \tau \arcsin\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right) \tag{43}$$

Por la propiedad de dualidad de Fourier, la transformada de Fourier de la señal rectangular en el tiempo corresponde a una función *senc* en frecuencia, e inversamente, una función *senc* en frecuencia corresponde a una función rectangular en el tiempo.

5. Aplicaciones en propagación y desvanecimientos

En este capítulo se analizarán los fenómenos que se presentan y afectan al momento de realizar una transmisión de información en el espacio libre.

5.1. Patrón de Radiación

Al momento de hacer referencia a una transmisión en el espacio libre, lo primero que resalta es el término de *espacio libre*, el cual lo identificamos como el medio por el cual se realizará la propagación de las ondas electromagnéticas, y para que esta actividad se dé, se requiere del uso de antenas. Las antenas se pueden definir como dispositivos que pueden transmitir y/o recibir ondas electromagnéticas (**OEM**). Una antena puede ser caracterizada a través de diversos parámetros, y uno de los más esenciales e incluso de los más relevantes, es el patrón de radiación. El patrón de radiación de una antena se puede entender como una gráfica de la energía radiada vista desde afuera. Si consideramos un dipolo por ejemplo, el campo generado por este sería como el que se muestra en la siguiente ecuación **(Aguilar et al., 2002)**:

$$E = \frac{\cos\left(\beta\frac{l}{2} * \cos(\theta)\right) - \cos\left(\beta\frac{l}{2}\right)}{\sin(\theta)} \tag{44}$$

De la **ecuación 44** podemos describir los siguientes parámetros:

- β es la constante de fase $(2\pi/\lambda)$.
- l es la longitud del dipolo.
- θ es el ángulo medido sobre el eje z.

El **código 7.1** calcula y grafica el campo generado por un dipolo como se puede observar en la **Figura 75**.

Código 7.1.

```
lambda=1;
beta=2*pi/lambda;
l=3*lambda/2; % longitud del dipolo
% angulos
fi=(0:.01:1)*2*pi;
teta=(0:.01:1)*pi;
E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(teta))-cos(beta.*l./2))./sin
    (teta));
polar(teta,E)
```

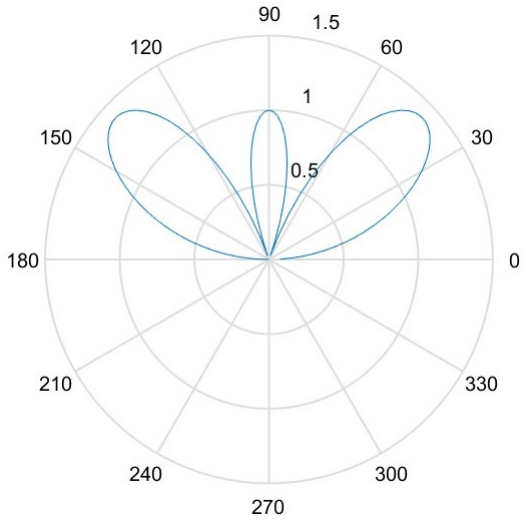


Figura 75: Patrón de radiación de un dipolo.

Se puede graficar este mismo campo en 3D, para realizar lo antes mencionado, se debe utilizar el siguiente **código 7.2**, el cual produce la gráfica de la **Figura 76**.

Código 7.2.

```
lambda=1;
beta=2*pi/lambda;
l=3*lambda/2; % longitud del dipolo
% angulos.
fi=(0:.01:1)*2*pi;
teta=(0:.01:1)*pi;
E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(teta))-cos(beta.*l./2))./sin
    (teta));
polar(teta,E)
[FI,TETA]=meshgrid(fi,teta); % vectores FI y TETA para
    graficar en 3D
% creacion del campo
E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(TETA))-cos(beta.*l./2))./sin
    (TETA));
% cambio de coordenadas esfericas a rectangulares
X=E.*sin(TETA).*cos(FI);
Y=E.*sin(TETA).*sin(FI);
Z=E.*cos(TETA);
S=surface(X,Y,Z,(abs(E))); % Grafica de superficie
view(0,40) % Orientación de los ejes
```

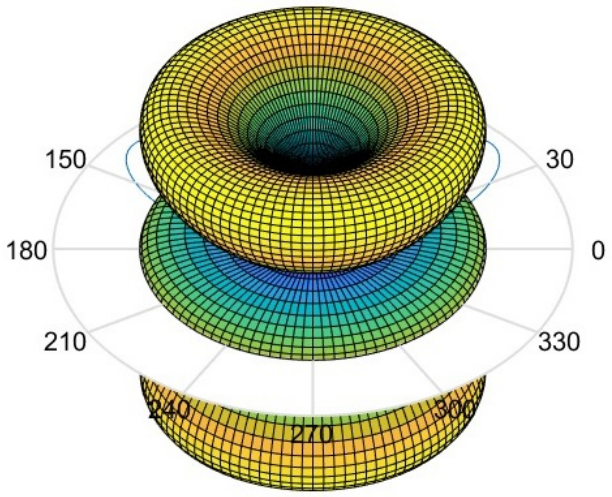


Figura 76: Campo del dipolo en 3D.

5.2. Desvanecimientos

Cuando el medio de transmisión es el canal inalámbrico se presentan diversos fenómenos que disminuyen la intensidad de la señal recibida, estos fenómenos son conocidos como desvanecimientos, los cuales se clasifican en *desvanecimientos lentos* y *desvanecimientos rápidos* **(Stüber & Stèuber, 2012)**.

Los *desvanecimientos rápidos* se dividen según el ambiente de propagación, es decir, el transmisor y receptor pueden tener o no línea de vista. Generalmente no se tiene línea de vista y cuando se tiene este ambiente de propagación la variable aleatoria que caracteriza estos desvanecimientos sigue una distribución de *Rayleigh*, es decir el canal de desvanecimiento es un *canal de Rayleigh*.

Cuando se tiene línea de vista, la variable aleatoria es una variable con *distribución Rice*. Los *desvanecimientos lentos* por lo general se modelan con una variable aleatoria con *distribución Log-normal* **(Stüber & Stèuber, 2012)**. El siguiente **código 7.3** genera un *canal Rayleigh* (ver **Figura 77**) y un *canal Log-Normal* (ver **Figura 78**).

Código 7.3.

Código

```
sigma=1; media=0; N=1000;
x1=randn(N,1)*sigma + media;
x2=randn(N,1)*sigma + media;
x3=randn(N,1)*sigma + media;
Z=sqrt(x1.^2 + x2.^2); % Calculo de V.A. Rayleigh
W=exp(x3); % Calculo de V.A. Log-Normal
plot(10*log10(Z)) % Grafica del canal Rayleigh en dB
xlabel('x') ylabel('Potencia (dB)')
grid on
figure(2)
plot(10*log10(W)) % Grafica del canal Log-Normal en dB
xlabel('x') ylabel('Potencia (dB)')
grid on
```

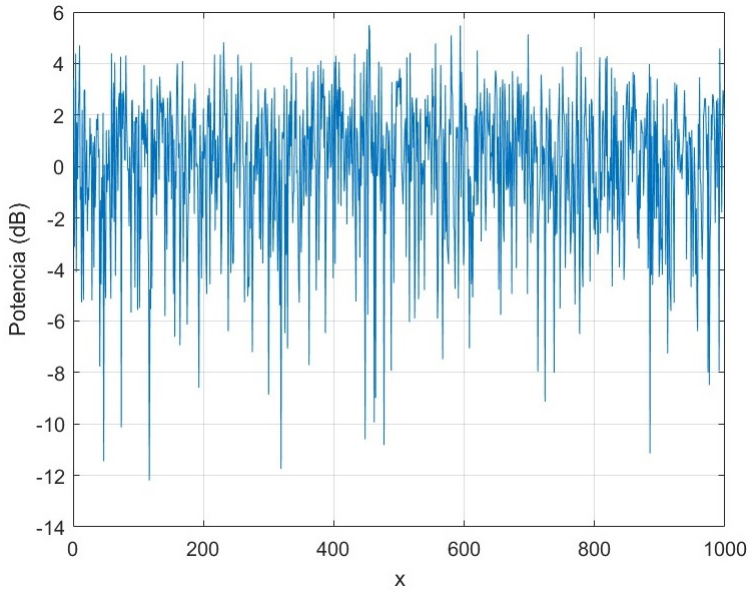


Figura 77: Canal Rayleigh.

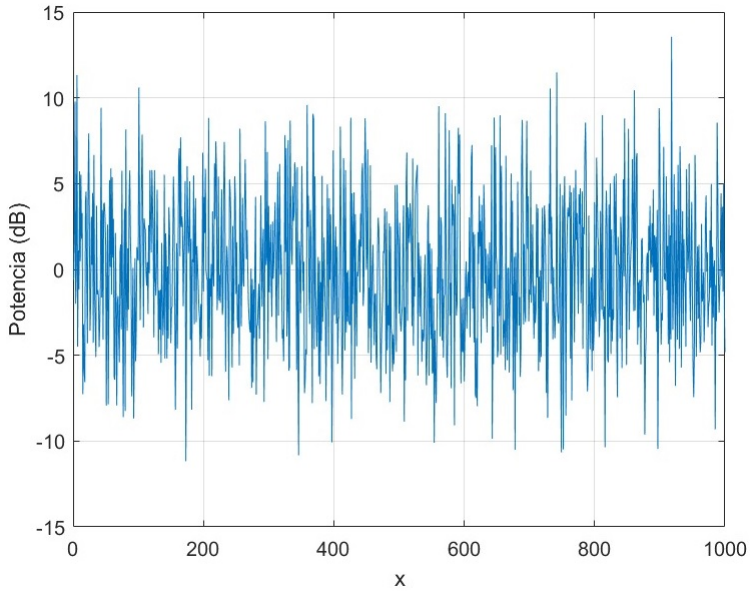


Figura 78: Canal Log-normal.

El calculo de los canales con desvanecimientos puede servir para calcular la ganancia del canal, este análisis se utiliza en el Acceso Multiple No Ortogonal (**NOMA**, por sus siglas en inglés) en el dominio de la potencia, que es una de las propuestas paras las redes celulares 5G. Estos resultados sirven para poder mitigar la interferencia de los usuarios que comparten el mismo recurso, esto se logra utilizando la Cancelación de Interferencias Sucesivas (**SIC**, por sus siglas en inglés).

Una vez obtenidos los canales, lo que procede es generar la *función de densidad de probabilidad* (**PDF**) de las variables aleatorias y graficarlas sobrepuestas con las fórmulas teóricas para observar la aproximación.

La **PDF** de la variable aleatoria *Rayleigh* está dada por la **ecuación 45**, **(Papoulis & Saunders, 2002)**.

$$f(r) = \frac{r}{2\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}; \quad r \geq 0; \tag{45}$$

La **PDF** de la variable aleatoria *Log-normal* está dada por la **ecuación 46**, **(Papoulis & Saunders, 2002)**.

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{46}$$

Aquí, x representa una variable aleatoria normal. El siguiente **código 7.4** es una función *"M"*, la cual utilizaremos para generar y graficar la **PDF** para todo tipo de variable aleatoria.

Código

Código 7.4.

```
function[]= pdfva(variable, bines, total) % parametros
    que recibe la funcion
[rr,u]=hist(variable,bines); % Calculo de histograma
delta=u(2)-u(1); % Calculo de intervalo
r2=rr/(total*delta); % Normalizar valor del eje Y
bar(u,r2); % Graficar la funcion
colormap([1 1 1]); % Colocar en blanco el fondo de cada
    barra
hold on
```

El siguiente **código 7.5** calcula y muestra la gráfica de la **PDF** de los desvanecimientos, tanto de manera teórica como de forma simulada. Este código produce las gráficas de la **Figura 79** y **80**.

Código

Código 7.5.

```
sigma=1;media=0;N=5000;
x1=randn(N,1)*sigma + media; % Creacion de N variables
    aleatorias normales con media cero y desviacion
    estandar 1
x2=randn(N,1)*sigma + media;
x3=randn(N,1)*sigma + media;
Z=sqrt(x1.^2 + x2.^2); % Calculo de V.A. Rayleigh
W=exp(x3); % Calculo de V.A. Log-Normal
y=length(Z); % Tama no de mi variable
bin=30;
pdfva(Z, bin, y) % Llamado de la funcion
u2=max(Z);u1=min(Z);
m=(u2-u1)/y; % Calculo de intervalo
j=u1:m:u2;
f=(j/sigma.^2).*exp(-j.^2/(2*sigma.^2));
plot(j,f, 'r'); % Grafica de funcion teorica
xlabel('x') ylabel('pdf (x)')
legend('EMPIRICO', 'TEORICO');
```

Código

```
%% Cont...
figure(2)
y2=length(W); % Tama no de mi variable
pdfva(W, bin, y2)% Llamado de la funcin
u4=max(W);
u3=min(W);
m2=(u4-u3)/y;
k=u3:m2:u4;
f2=(k/sigma.^2).*exp(-k.^2/(2*sigma.^2));
plot(k,f2,'r'); % Grafica de funcion teorica
xlabel('x')
ylabel('pdf (x)')
legend('EMPIRICO','TEORICO');
```

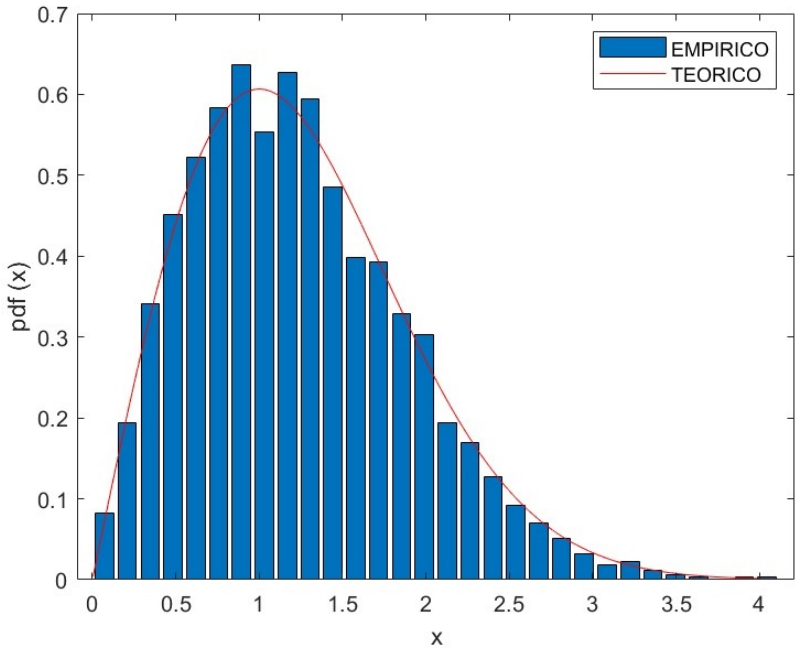


Figura 79: PDF Rayleigh.

5.3. Diseño de radioenlace

Un *radioenlace* se entiende como un enlace de ondas electromagnéticas en la banda de señales de radio. Este enlace se presenta como una conexión ya sea entre terminales fijas o móviles, donde el canal de comunicación es a través del espacio libre.

Cuando se habla de radiocomunicaciones, entendemos que los radioenlaces generalmente se diseñan sobre las bandas de frecuencia del orden de las *microondas*, es decir, a partir de los 300 MHz y hasta los 300 GHz. En esta banda de frecuencia, la longitud de onda (λ) es muy pequeña, y como consecuencia de ello, éstas son muy sensibles a los *fenómenos meteorológicos* como la lluvia y la nieve **(Salema, 2002)**.

Existen condiciones que se deben cumplir para un radioenlace; en primer lugar, es vital que la ruta directa entre las dos antenas (la ruta de la línea de vista) esté libre de obstrucciones. Sin

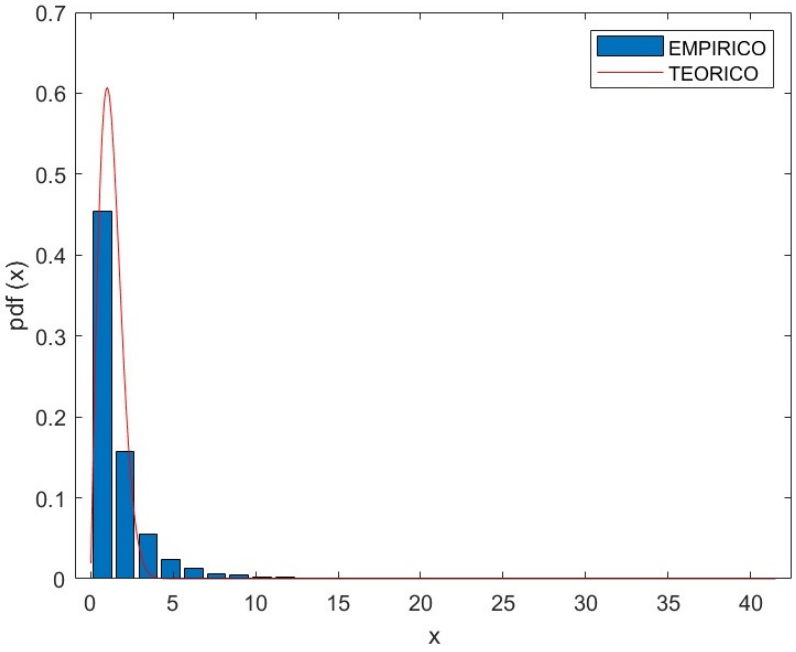


Figura 80: PDF Log-normal.

embargo, esto en sí mismo no es suficiente, sino que es muy conveniente que no haya obstáculos cerca de la ruta de la línea de visión, ya que podrían provocar reflexiones y pérdidas en la recepción. La **Figura 81** muestra un camino simple de un radioenlace, la elipse punteada define una región conocida como la 1ra. *zona de Fresnel* **(Salema, 2002)**.

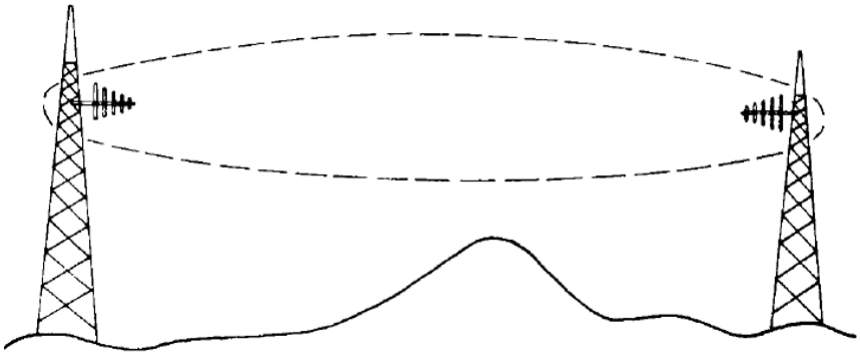


Figura 81: Radioenlace punto a punto.

Cuando se calculan las *pérdidas en la transmisión*, también se deben considerar los efectos como son la *pérdida en el espacio libre*, *atenuación* y *dispersión*. Resultado de este cúmulo de pérdidas, la potencia (P_R) de la señal se ve disminuida en el receptor, y coloquialmente se le conoce como *pérdidas en el espacio libre*. A manera de conclusión, este tipo de pérdidas se ocasionan porque la energía de la señal que se está radiando se expande en función de la distancia desde el transmisor (**Tx**), es decir, entre más alejado esté el **Tx** del receptor (**Rx**) más pequeña es la señal recibida.

En todo el trayecto del radioenlace, la potencia de radiofrecuencia que se le está suministrando al transmisor se dispersa, quiere decir que, una parte de la potencia de **RF** llega directamente a la antena receptora (**Rx**), como se muestra en el trayecto *A* de la **Figura 82**, mientras que otra se refleja en la tierra (trayecto *B* y *C*).

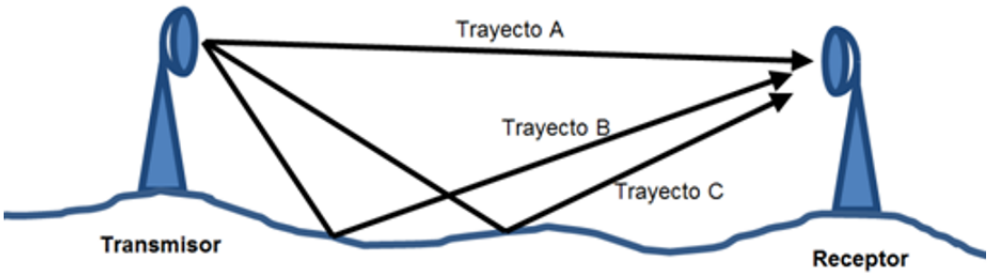


Figura 82: Efecto multitrayectoria.

Cuando en un radioenlace se calculan las pérdida en el *espacio libre*, lo que se analiza también es una estimación aproximada de la viabilidad del enlace. En este sentido, se puede evaluar solamente las *pérdidas en el espacio libre*, pero si se requiere una evaluación exacta se deben considerar también las pérdidas que se generan en la atmósfera.

Al trabajar radioenlaces en la banda de las microondas se vuelve complejo, ya que a estas frecuencias, las ondas electromagnéticas pareciera que se van ensanchando a medida que se van propagando. Las ondas electromagnéticas en esta banda de frecuencia tienen longitudes de onda de pocos centímetros, por lo tanto, sus haces son anchos y necesitan más espacio. Para estos radioenlaces, la línea de vista necesaria para lograr una conexión óptima desde el punto *A* hasta el punto *B* de la **Figura 82**, es más que una simple línea delgada, en sí es un volumen en forma de elipsoide. El ancho de este volumen se puede calcular a través del concepto de *zonas de Fresnel*. La fórmula generalizada se presenta en la **ecuación 47**.

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \tag{47}$$

5.3.1. Pérdida en el espacio libre

Para calcular las pérdidas por trayectoria, se deben tomar en cuenta los efectos ocasionados por la *pérdida en el espacio libre*, las diferentes *atenuaciones* y *dispersiones*. Dependiendo de la longitud de la trayectoria, se deben estudiar los efectos de propagación a través de la atmósfera y las características de elevación del terreno **(Salema, 2002)**.

Como ya se ha mencionado, la potencia de la señal se ve disminuida a lo largo del trayecto por la dispersión del frente de onda ocasionada por la distancia, a este efecto se le conoce comúnmente como *pérdida en el espacio libre*. Se observa que entre más lejanos estén las dos terminales (T_x y R_x), menor será la potencia medida en el receptor. Esta *"pérdida"* (dispersión) ocurre debido a que la onda electromagnética radiada se expande en función de la distancia desde el transmisor (T_x).

La pérdida o atenuación de energía en la trayectoria entre el transmisor (T_x) y el receptor (R_x) es simplemente la relación de la potencia recibida y la potencia transmitida. La fórmula para calcular dicha pérdida se conoce como la *ecuación de Friis*, como se muestra en la **ecuación 48** **(Salema, 2002)**.

$$L_{fs} = \frac{P_R}{P_T} = G_T G_R (\frac{\lambda}{4\pi r})^2 \tag{48}$$

donde

P_R	Es la potencia recibida [W].
P_T	Es la potencia transmitida [W].
G_T	Es la ganancia de la antena Tx.
G_R	Es la ganancia de la antena Rx.
λ	Es la longitud de onda [m].
$(4\pi r)^2$	Es el área de superficie de la esfera en el radio r $[m^2]$.

La **ecuación 48** es comúnmente utilizada en decibeles que está dada por la siguiente **ecuación 49**.

$$L_{fs}(dB) = 32.44 - 10\log G_T - 10\log G_R + 20\log f + 20\log d \tag{49}$$

donde

f	Es la frecuencia de operación [MHz].
d	Es la distancia [km].

5.3.2. Cálculo de zonas de Fresnel

La trayectoria de un radioenlace puede que no sea una línea recta, sino que presente cambios en su ruta debido a la refracción bajo la presencia de obstáculos y de las condiciones atmosféricas del terreno, generándose multitrayectorias con interferencias *constructivas* y *destructivas*, es por ello que para evaluar la viabilidad de un radioenlace es necesario recurrir al concepto de las *zonas de Fresnel* **(Salema, 2002)**.

La *zona de Fresnel* es aquella región del espacio en forma de elipsoide por la que viajan las ondas entre dos puntos, desde un transmisor hasta un receptor. La teoría de zona de Fresnel evalúa la ruta de propagación del enlace y al espacio (volumen) alrededor del eje directo del mismo, los puntos que en teoría no se encuentran en la línea directa de propagación también radian potencia y contribuyen a que la señal llegue hasta el receptor.

En la **Figura 83** se muestra que existe más de una zona de Fresnel alrededor de la línea directa entre un transmisor y un receptor. En la zona de Fresnel existen puntos donde se satisface la **ecuación 50**.

$$d_1 + d_2 + \frac{n\lambda}{2} = a + b \tag{50}$$

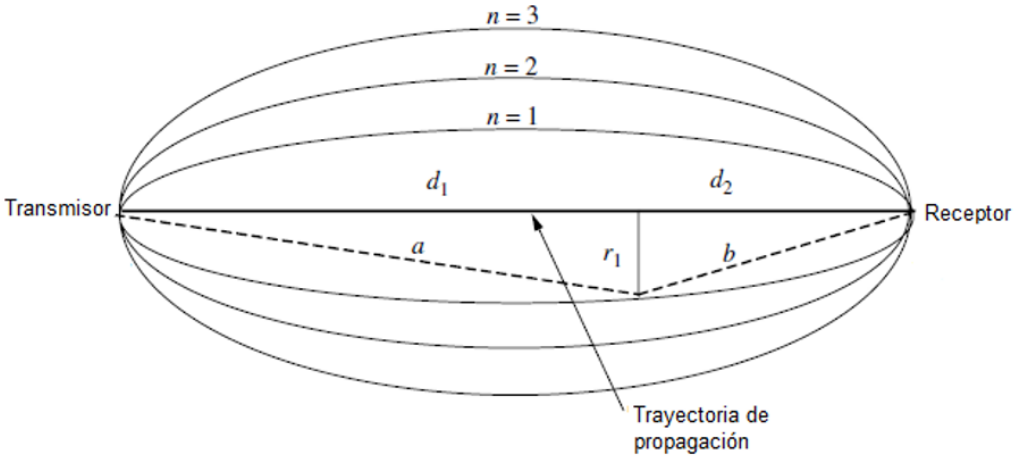


Figura 83: Zonas de Fresnel.

donde

n Es el número de la zona de Fresnel a calcular (número entero).

Si la longitud de la trayectoria es mayor que el radio del volumen de la zona de Fresnel r_n, éste puede aproximarse con la **ecuación 51** **(Salema, 2002)**.

$$r_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \tag{51}$$

Nota Los valores de r_n, d_1 y d_2 están dados en metros $[m]$.

En los sistemas inalámbricos de banda ancha que operan a frecuencias de microondas, el radio del volumen de la zona de Fresnel se calcula mediante la **ecuación 52**, **(Salema, 2002)**.

$$r_n = \sqrt{\frac{nd_1 d_2}{f * (d_1 + d_2)}} \tag{52}$$

donde

r_n Es el radio del volumen de la zona de Fresnel [m].
n Es la zona de Fresnel bajo cálculo.
f Es la frecuencia de operación [GHz].
d_1, d_2 Son las distancias entre los puntos del enlace [m].

La primera zona de Fresnel se conceptualiza como la región en la cual se transmite la potencia significativa, de esta manera si la primera zona de Fresnel se ve obstruida o bloqueada, la potencia que llegará al receptor estará disminuida.

5.3.3. Cálculo de la altura de las antenas en un radioenlace

En el diseño de sistemas de radioenlaces, mantener la zona de Fresnel despejada es un punto importante, puesto que para tener un trayecto libre de obstáculos, se debe considerar la ruta en todas sus direcciones, la mayoría de los casos, si no es que siempre, las obstrucciones se encuentran por debajo de la ruta del enlace, ocasionadas por objetos fijos propios del relieve, copas de los árboles, edificios, etc. La **Figura 84** muestra un enlace cuya zona de Fresnel está bloqueada parcialmente por la cima de un monte, aunque la línea de vista no se encuentra obstruida.

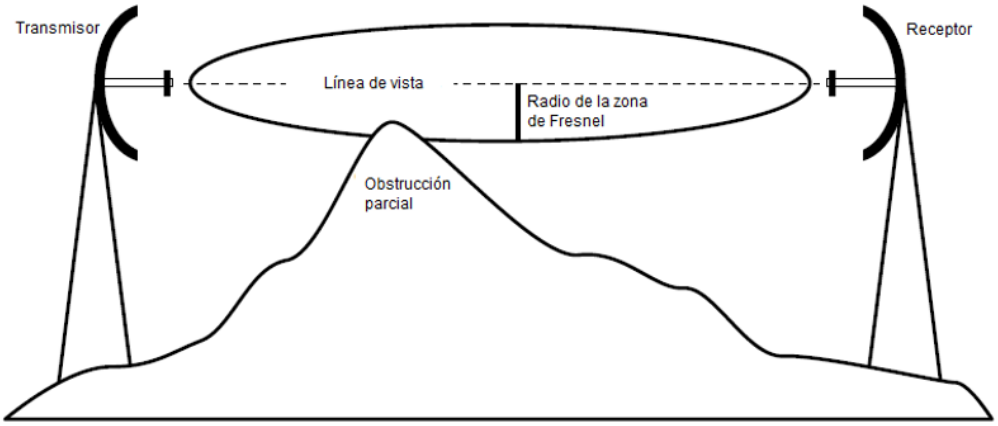


Figura 84: Zona de Fresnel parcialmente bloqueada.

Un criterio general para establecer radioenlaces efectivos es que la primera zona de Fresnel debe tener un radio del volumen de al menos el $60\,\%$ libre de su magnitud total en el punto del obstáculo de mayor altura, para lograr esto, las torres de las antenas deben tener la altura necesaria que satisfaga esta consideración.

Para el cálculo de las alturas de las torres se pueden tomar varios puntos de partida, uno de ellos, es el siguiente:

- Se calcula con $n = 1$ la 1ra. zona de Fresnel entre los puntos donde se colocarán las torres mediante la **ecuación 52**.
- Se identifica la obstrucción más significativa del perfil del radioenlace, el radio del volumen de la zona de Fresnel en este punto corresponde a un valor r_n.
- Se determina la altura entre el punto más elevado de la obstrucción y el punto de la 1ra. zona de Fresnel. Este valor es la altura de las torres y obviamente es la elevación a la cual tienen que estar colocadas las antenas en las mismas para librar el $100\,\%$ de la primera zona de Fresnel, sin embargo, como se mencionó anteriormente, basta que esta zona esté despejada en un $60\,\%$ en relación a su radio $(0.6r_n)$ por lo que la altura de las torres se puede estimar desde el punto $0.6r_n$ hasta el punto más alto del obstáculo.

La altura mínima de las torres de las antenas es de $15m$ y una máxima de $120m$, si el valor calculado del tamaño de las torres excede este intervalo, se procede a la implementación de

antenas repetidoras.

5.3.4. Uso de antenas repetidoras

Las *antenas repetidoras* tienen la función de ser nodos configurados para transmitir el tráfico de las ondas destinadas a otro nodo, ya sea otra repetidora o al receptor de destino, y son utilizadas para evitar obstáculos a lo largo de la trayectoria de un enlace. La **Figura 85** muestra una antena repetidora que reenvía el tráfico de datos por el espacio libre a otras antenas, aquí se observa que las antenas donde se inicia la transmisión no tienen línea de vista con las antenas terminales.

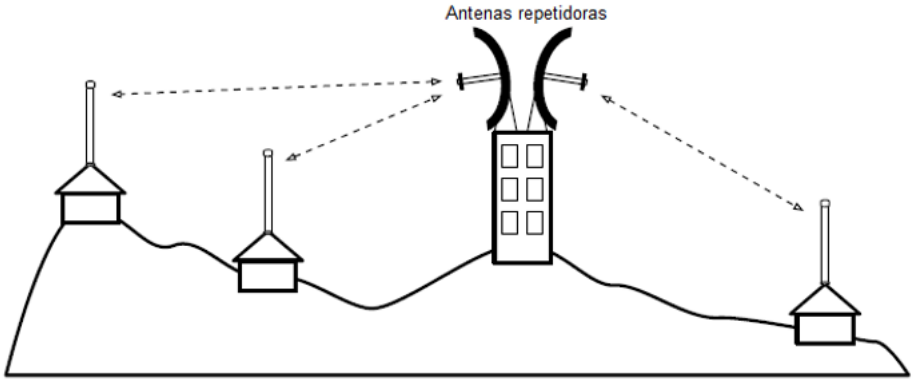


Figura 85: Antena repetidora.

Las antenas repetidoras se utilizan siempre y cuando la altura calculada de las torres sea mayor a $120m$, colocadas en el punto de mayor obstrucción garantizan un enlace de radio viable, así mismo, se recurre a ellas cuando la distancia total del enlace de radio supera los $64km$.

5.3.5. Método de diseño

Cuando se desea diseñar un enlace de radiocomunicaciones se requiere conocer la altura de la superficie terrestre (altitud), desde el transmisor, que sería el punto inicial ($Km\ 0$) hasta el receptor, que sería el punto final ($Km\ n$). Como se debe conocer las altitudes en cada cierta distancia, lo recomendable es utilizar un mapa topográfico.

Una vez que sabemos las ubicaciones del transmisor y receptor, trazamos el perfil, el cual se obtiene marcando sobre el mapa una línea recta entre punto y punto. La línea recta funge como línea de vista entre nuestro **Tx** y **Rx**, desde el punto inicial hasta el punto final del enlace. Sobre esta línea recta en el mapa se marcan todos los puntos discretos, los cuales son tomados a $\leq 250m$ entre punto y punto. En la **Figura 86** se representa una línea de vista trazada sobre un mapa topográfico **(Salema, 2002)**.

Una vez que se hayan marcado ya todos los puntos sobre la línea de vista en el mapa, se continúa con obtener la altura superficial de cada uno de estas marcas. Conociendo ubicación y altura de cada marca, podemos ahora generar una gráfica que represente el relieve de toda la línea de vista. Como se observa en la **Figura 87**, los mapas topográficos cuentan con curvas de nivel las cuales están acotadas en metros y, además, se puede observar que las líneas A y B representan las curvas de nivel ordinarias y están acotadas cada $20m$.

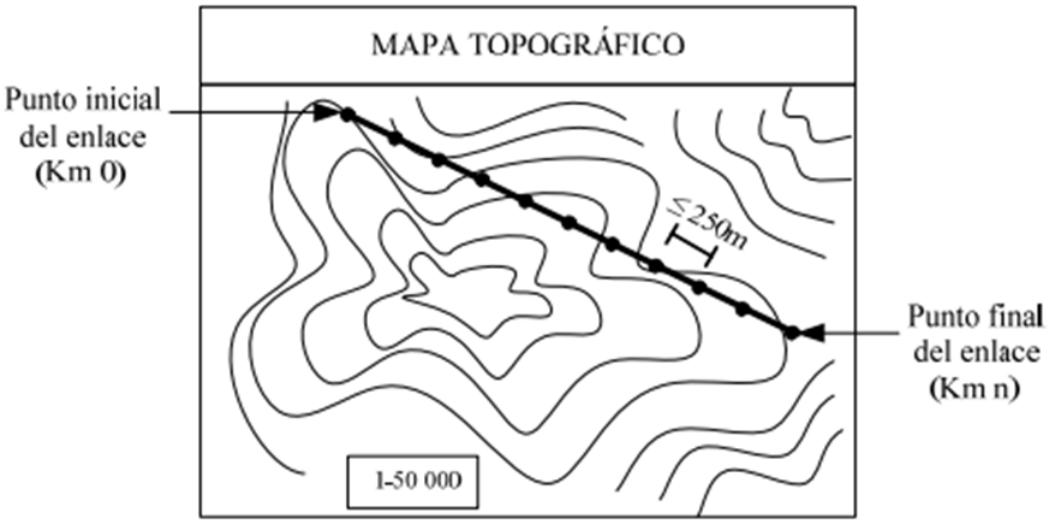


Figura 86: Perfil topográfico.

Cada una de estas curvas representan la altura del relieve sobre el nivel del mar, para este ejemplo, denotaremos como C_i a estas alturas . Entonces si el punto 1 cae sobre la curva de nivel A se le asignará una altura de $5000m$ ($C_i = 5000m$), si caen en la línea X_1 se le asignará una altura de $5020m$ ($C_i = 5020m$).

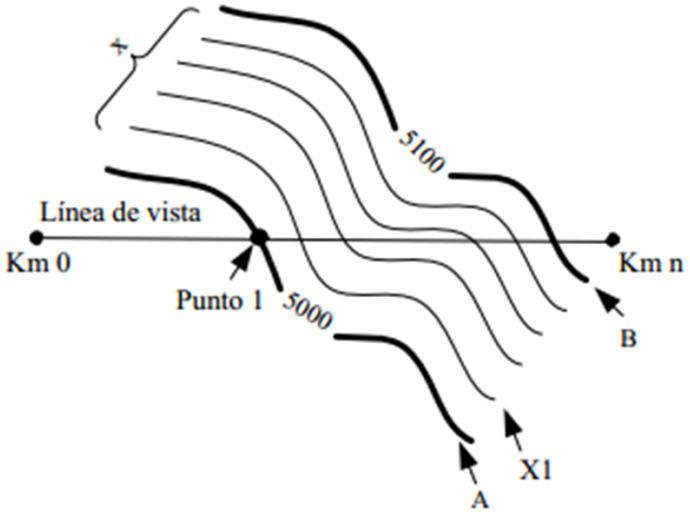


Figura 87: Ejemplo de curvas de nivel en un mapa topográfico.

Generando la base de datos con todas las alturas de los puntos marcados podemos realizar la gráfica C_i con respecto a la distancia X_1, donde X_1 son los puntos de referencia, o bien la distancia que hay desde el $Km\ 0$ y el punto de referencia que se requiere graficar como se muestra en la **Figura 88**.

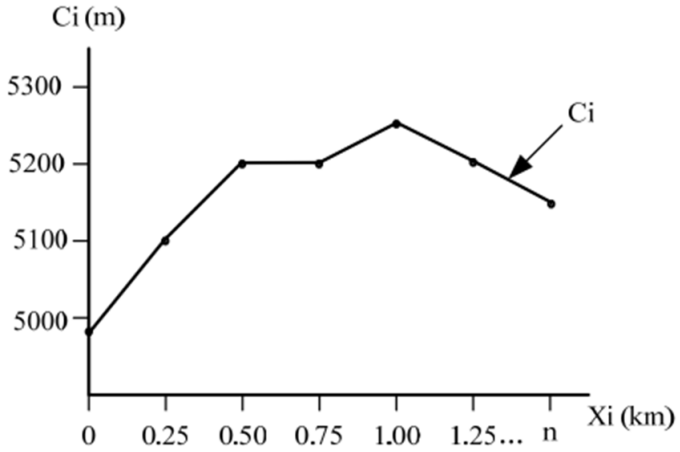


Figura 88: Gráfica de las alturas del relieve (Ci).

Se procede a calcular la curvatura de la tierra utilizando la **ecuación 53**.

$$f_i = \frac{X_i * (X_n - X_i)}{2KR_0} * 1000 \tag{53}$$

donde

f_i	Representa la curvatura de la Tierra en metros [m].
Xi	Es la distancia del punto inicial al punto final, es decir distancia desde el transmisor T_x hasta el receptor (R_x) en kilómetros [Km].
Xn	Es la distancia total del enlace.
K	Representa el factor de corrección de la Tierra.
R_0	Es el radio de la Tierra dado en kilómetros [Km]. $R_0 = 6370Km$.

La curvatura de la Tierra representada por f_i se calcula para obtener la altura real de la superficie terrestre. Ya que se realiza este cálculo, asignaremos el nombre de Z_i, que en resumen sería la suma de C_i y f_i, resultando en $Z_i = C_i + f_i$.

Lo que prosigue es el cálculo de las zonas de Fresnel, y aquí, una vez que se ha graficado Z_i, identificamos el punto en dónde existe mayor obstrucción. Aquí podemmos distinguir la altura que existe entre el punto de la obstrucción (Z_i) hasta la zona inferior del radio del volumen de la zona de Fresnel. Conociendo el valor de esta diferencia, entre la altura del relieve y el límite de la elipsoide de la zona de Fresnel, podemos identificar la altura que deberán cumplir las antenas, es decir, se deberá elevar a las antenas esta altura para que el limite inferior de la elipsoide quede completamente libre de la obstrucción.

Debemos considerar que la altura mínima que debe cumplir una torre de un radioenlce es de $15\ m$, por lo que si la obstrucción que se distingue entre el relieve y la elipsoide inferior de Fresnel es menor a esta altura, la torre siempre será de $15\ m$. El siguiente **código 7.6** calcula y genera las gráficas para un ejemplo de un radio enlace (ver **Figura 89-93**).

Código 7.6.

Código

```
% Distancia del enlace
Xi=0:0.250:8.75;
% Altura del terreno
Ci=
    [2942,2940,2930,2930,2935,2945,2940,2920,2910...

2905,2890,2880,2880,2870,2865,2865,2865,2870,2880,2898...

2910,2920,2930,2930,2930,2922,2895,2865,2865,2865,2870...

2890,2900,2910,2900,2920];
x1=0;
Xn=8.75;
K=4/3;
Ro=6370;
% Curvatura de la tierra
fi=((Xi.*(Xn-Xi))/(2*K*Ro))*1000;
Zi=Ci+fi;
% Gráficas
plot (Xi,fi)
xlabel('Distancia X_i [Km]')
ylabel('Curvatura de la Tierra [m]')
grid on
figure (2)
plot(Xi,Ci,'-ro')
hold on
plot(Xi,Zi,'-k*')
grid on
xlabel('Distancia X_i [Km]') ylabel('Alturas [
    m]') legend ('Ci', 'Zi')
figure(3)
y1=2942; % Altura en el x1
y2=2920; % Altura en el Xn
y=(((y2-y1)/(Xn-x1)).*(Xi))+y1;
plot(Xi,Zi,'-k*')
hold on
plot(Xi,y)
title('Línea de vista entre Tx y Rx') xlabel('
    X_i [Km]') ylabel('Z_i [m]')
grid on;
f=1.8*10^9; c=3*10^8; lamda=c/f;
R1=sqrt((lamda*(Xi*1000).*((Xn-Xi)*1000))/(Xn
    *1000)); % Rn de la elipsoide, para este
    caso especial n=1
elip_inf=y-R1;
elip_sup=y+R1;
figure (4)
plot(Xi,Zi,'-k*')
hold on
plot(Xi,y)
% Grafica de la elipsoide inferior
plot(Xi,elip_inf,'--*')
% Grafica de la elipsoide superior
plot(Xi,elip_sup,'--*')
title('Elipsoide de Fresnel') xlabel('X_i [Km]
    ') ylabel('Z_i [m]')
grid on
```

Código

```
%% cont...
figure (5)
for k=1:length(y)
 if (Zi(k)>y(k))
 dif(k)=abs(Zi(k)-elip_inf(k));
 else
 dif(k)=0;
 end
end
plot(Xi,Zi,'-k*')
hold on
plot(Xi,y+max(dif))
plot(Xi,elip_inf+max(dif),'--*')
plot(Xi,elip_sup+max(dif),'--*')
title('Elevación de la línea de vista')
xlabel('X_i [Km]')
ylabel('Z_i [m]')
grid on;
```

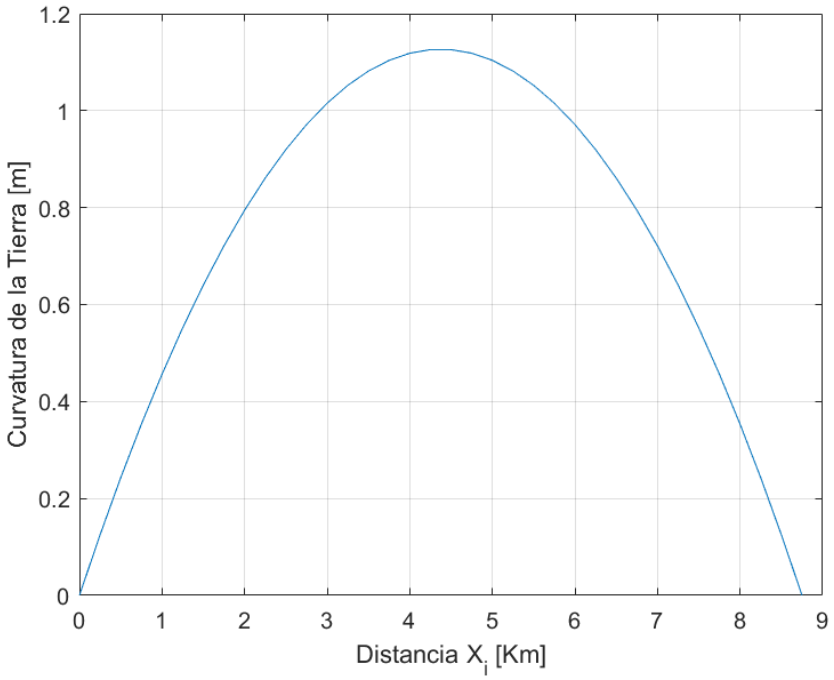


Figura 89: Curvatura de la Tierra.

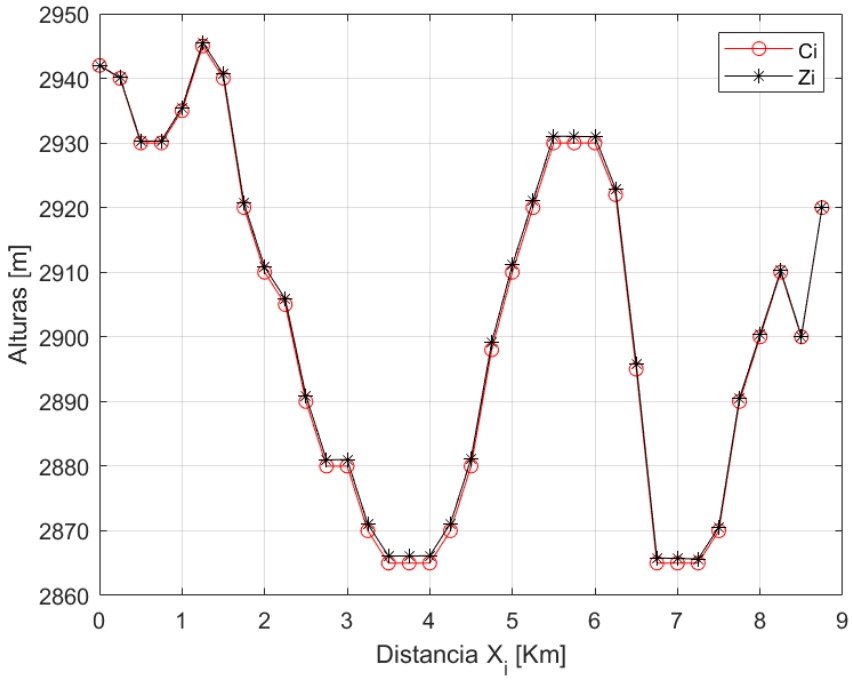


Figura 90: Gráfica de Ci y Zi.

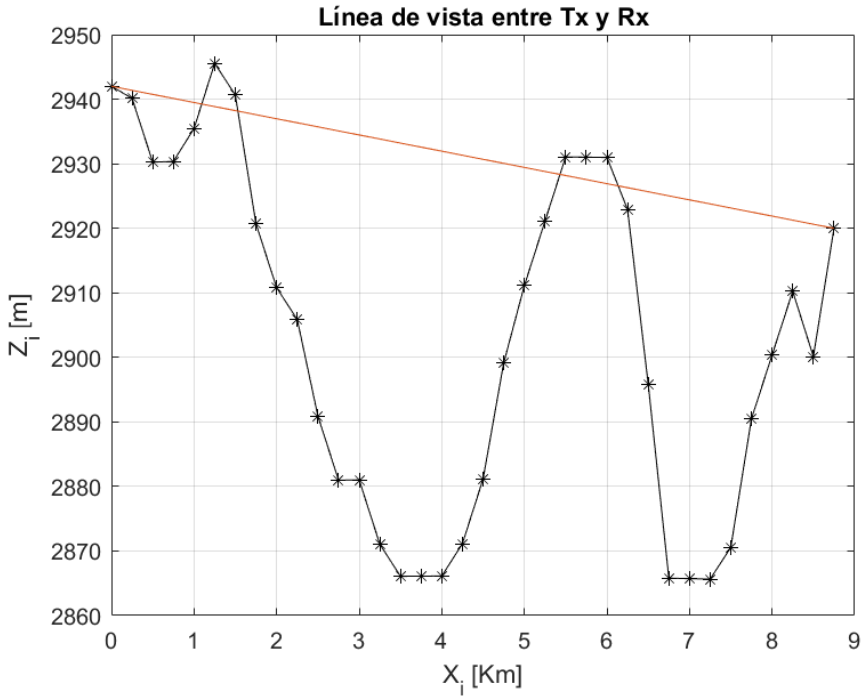


Figura 91: Línea de vista.

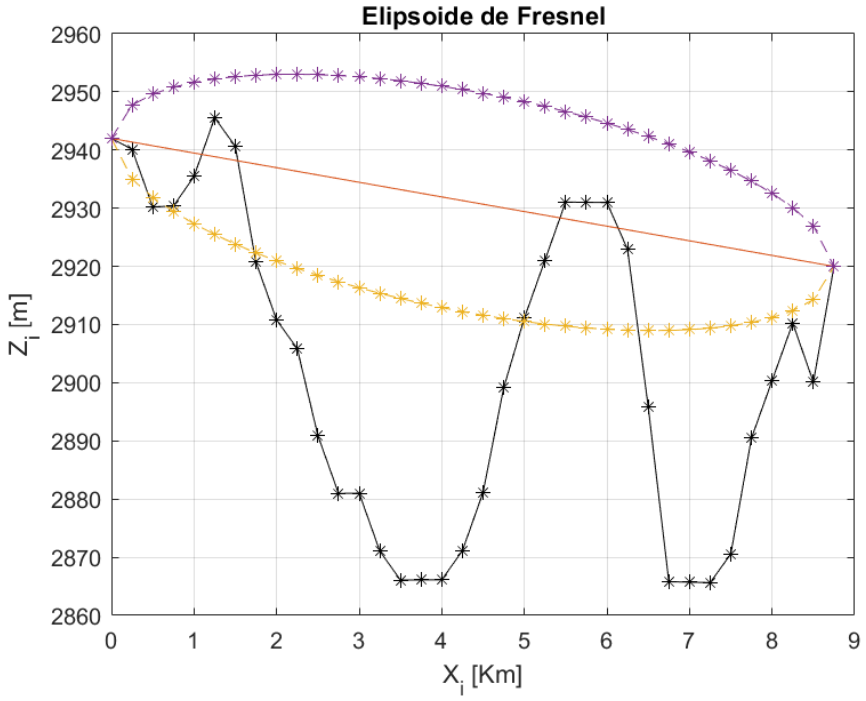


Figura 92: Zona de Fresnel.

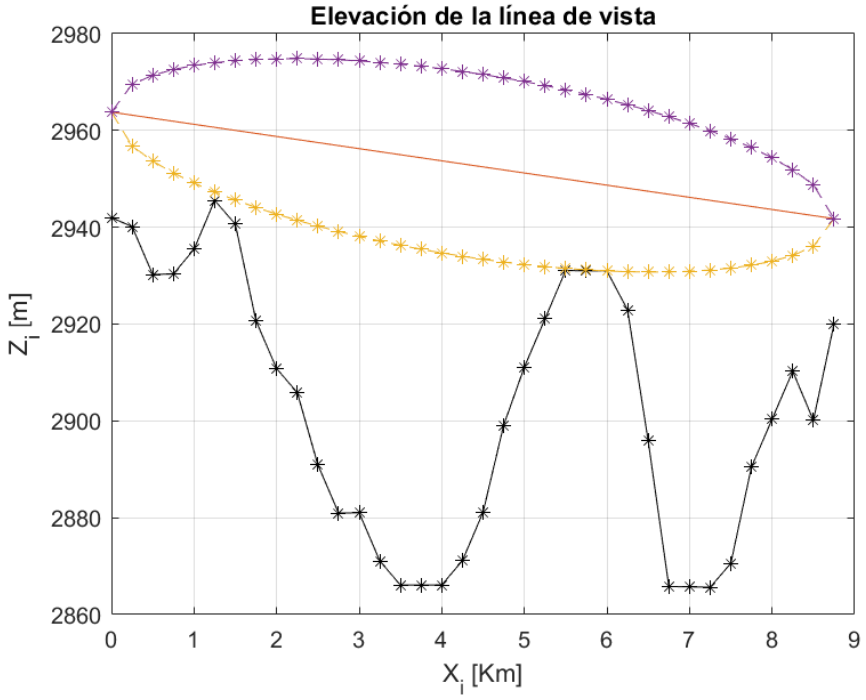


Figura 93: Radioenlace.

6. Aplicaciones en Modulación y Telefonía

En este capítulo se tratarán ejemplos sobre modulación *QAM* en donde se mostrará la constelación del modulador y se calculará la probabilidad de bit erróneo. También se realizará un ejemplo de redes jerárquicas, que son utilizadas en la telefonía, en donde se diseñará la red y se calculará la probabilidad de bloqueo en la red.

6.1. 4QAM

La *modulación* consiste en transportar la señal de información en una portadora de mayor frecuencia. Una de las modulaciones más utilizadas es la *modulación de amplitud en cuadratura* (QAM, por sus siglas en inglés), y esta puede realizar la modulación de la portadora tanto en amplitud como en fase. Por ejemplo, tenemos que la **Figura 94** muestra una constelación de una modulación *4QAM* **(Haykin, 2002.)**.

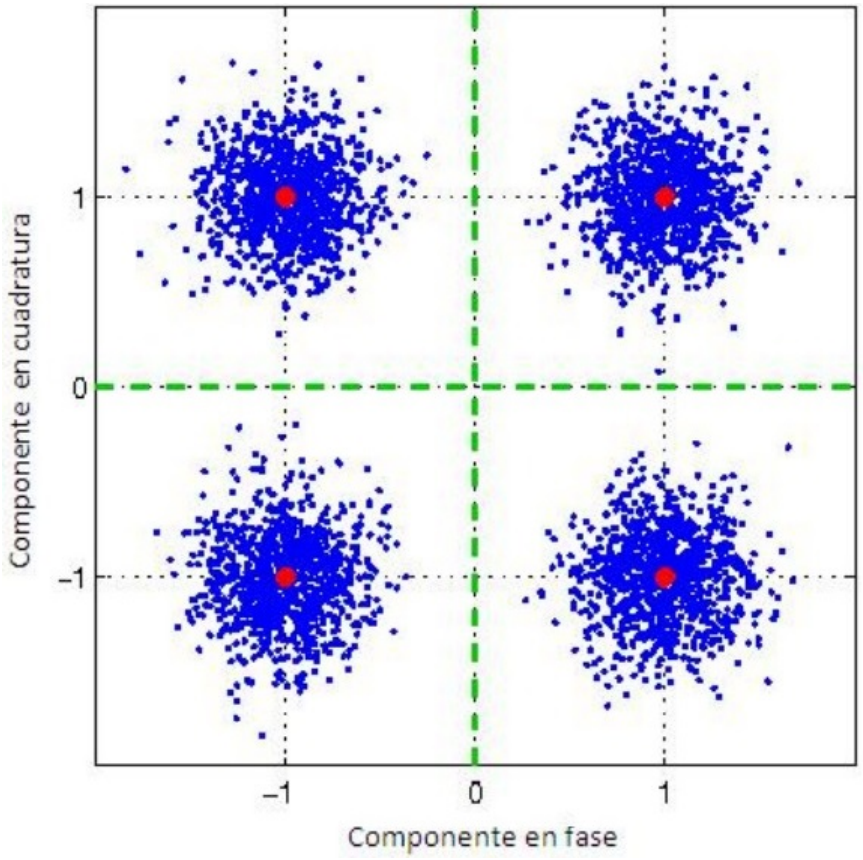


Figura 94: Constelación 4QAM.

El **código 8.1** produce gráfica de la constelación *4QAM* para un canal con ruido Gaussiano (ver **Figura 95**).

Código 8.1.

Código

```
% Generación de componentes principales
N=1000;
x1=3+3*j;
x2=-3+3*j;
x3=-3-3*j;
x4=3-3*j;
% Grafica de componentes
plot(real(x1),imag(x1), 'kp')
hold on
plot(real(x2),imag(x2), 'kp')
plot(real(x3),imag(x3), 'kp')
plot(real(x4),imag(x4), 'kp')
axis([-6 6 -6 6]);
% Suma de ruido Gaussiano a las componentes
r1=x1+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r2=x2+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r3=x3+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r4=x4+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
% Grafica de componente con canal Gaussiano
plot(real(r1),imag(r1), 'ro')
plot(real(r2),imag(r2), 'bo')
plot(real(r3),imag(r3), 'go')
plot(real(r4),imag(r4), 'yo')
xlabel('Componente en fase')
ylabel('Componente en cuadratura')
grid on
```

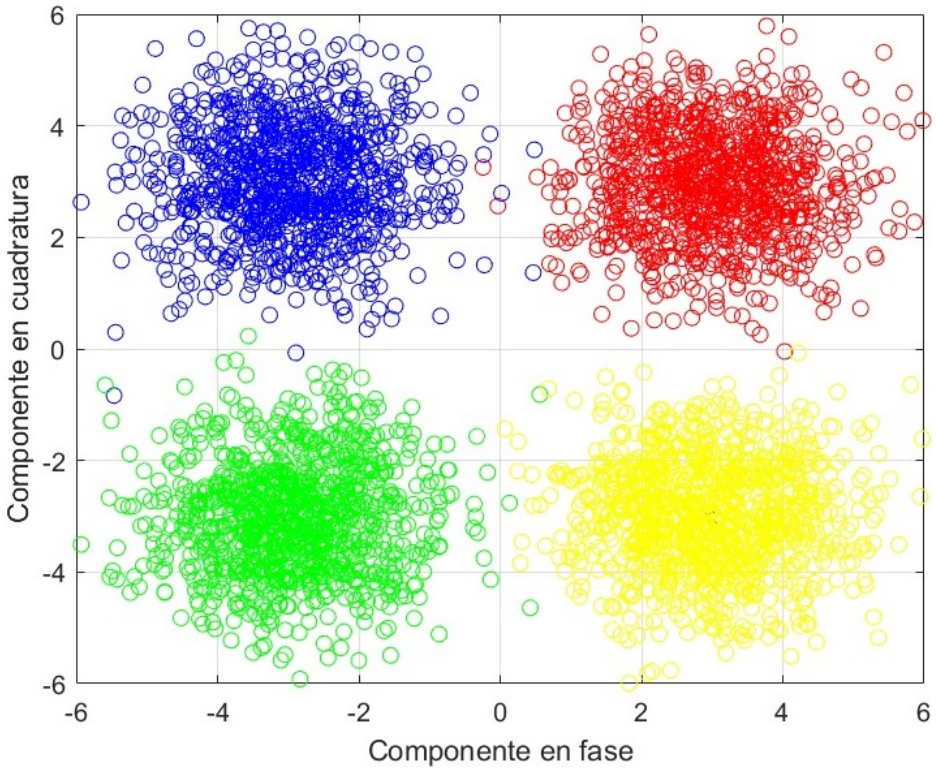


Figura 95: Constelación 4QAM.

Uno de los parámetros utilizados para la medición de la calidad de servicio (QoS, por sus siglas en inglés) es la probabilidad de bit erróneo (BER, por sus siglas en inglés), y el **código 8.2** calcula y muestra la gráfica de esta probabilidad (ver **Figura 96**).

Código 8.2.

Código

```
clc
clear
b=1; % Bandera para contar elementos
N=5000; % Numero de V.A. Gaussianas
for sir=0.1:0.1:2
% Generacion de componentes principales
x1=sir+(sir)*j;
x2=-sir+(sir)*j;
x3=-sir-(sir)*j;
x4=sir-(sir)*j;
% Suma de ruido Gaussiano a las componentes
r1=x1+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r2=x2+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r3=x3+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
r4=x4+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
conta=0; % Contador de bits erroneos
% Busqueda de bit erroneos
for k=1:N
    % Primer Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x1))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x1))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x1))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x1))).^2);
    if (d2<d1 || d3<d1 || d4<d1)
        conta=conta+1;
    end
    % Segundo Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x2))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x2))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x2))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x2))).^2);
    if (d1<d2 || d3<d2 || d4<d2)
        conta=conta+1;
    end
```

Código

```
%% Cont...
    % Tercer Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    if (d1<d3 || d2<d3 || d4<d3)
        conta=conta+1;
    end
    % Cuarto Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    if (d1<d4 || d2<d4 || d3<d4)
        conta=conta+1;
    end
end
Pbe(b)=conta/(4*N); % Calculo de probabilidad de bit
   erroneo
b=b+1;
end
% Generar grafica
sir=0.1:0.1:2;
semilogy(sir,Pbe)
xlabel('Eb/N0')
ylabel('Probabilidad de bit erroneo')
grid on
```

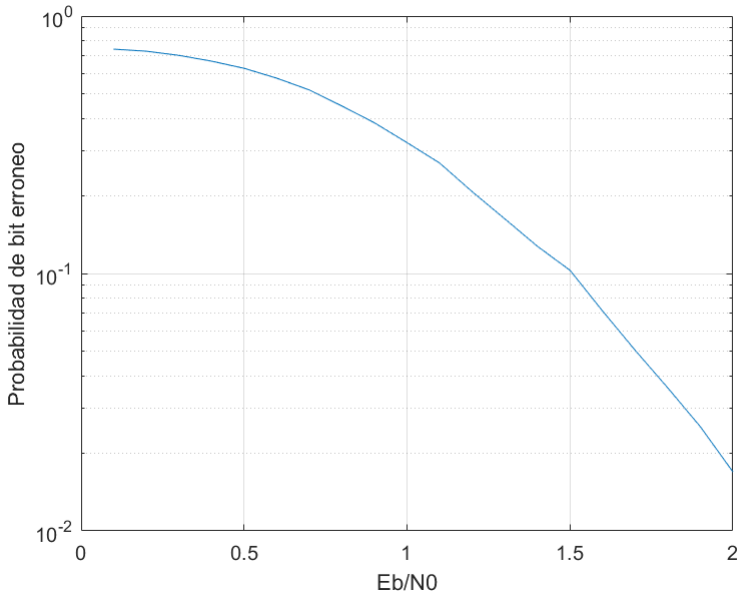


Figura 96: Probabilidad de error.

6.2. MPSK

Otra forma de calcular la probabilidad de bit erróneo es utilizando los comandos de MATLAB. El **código 8.3** calcula la razón de símbolo erróneo para un sistema *MPSK* con ruido Gaussiano (ver **Figura 97**).

Código 8.3.

Código

```
%% Cont...
    % Tercer Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x3))).^2);
    if (d1<d3 || d2<d3 || d4<d3)
        conta=conta+1;
    end
    % Cuarto Cuadrante
    d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r1(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r2(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r3(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r4(1,k))
       -imag(x4))).^2);
    if (d1<d4 || d2<d4 || d3<d4)
        conta=conta+1;
    end
end
Pbe(b)=conta/(4*N); % Calculo de probabilidad de bit
   erroneo
b=b+1;
end
% Generar grafica
sir=0.1:0.1:2;
semilogy(sir,Pbe)
xlabel('Eb/N0')
ylabel('Probabilidad de bit erroneo')
grid on
```

6.3. Telefonía

Una parte medular de las redes telefónicas es el enrutamiento, el cual consiste en asignar o buscar trayectorias entre el transmisor y el receptor. El Sector de Normalización de las Telecomunicaciones de la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU-T, por sus siglas en inglés) define varios tipos de enrutamientos, de los cuales uno de los más utilizados es el enrutamiento jerárquico, en el cual a partir de reglas específicas permite escoger rutas alternativas de manera fija, es decir, hay niveles (jerarquías). El tráfico siempre se enruta hacia los niveles más bajos en la red **(Bellamy, 2000)**.

En la **Figura 98** se muestra un ejemplo de una red, en donde P_1 y P_2 representan la probabilidad de ocupación de la ruta y $(1P_k)$ es la probabilidad de que la ruta esté libre. La probabilidad de bloqueo en la red está dada por la **ecuación 54**.

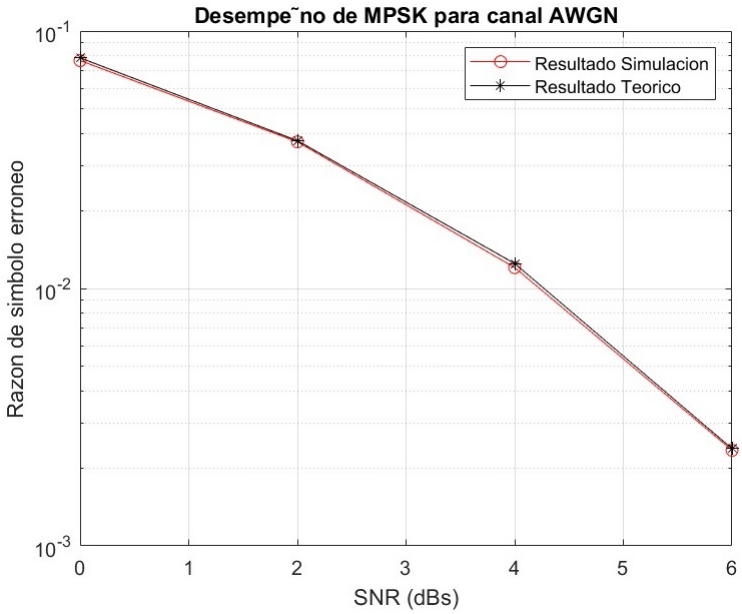


Figura 97: Sistema MPSK.

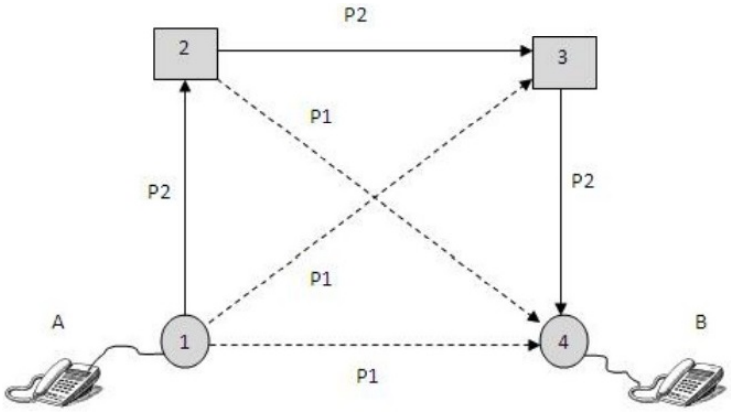


Figura 98: Redes jerárquicas.

$$PB = P_1^2\,P_2 + P_1\,P_2(1-P_1) + P_1^3(1-P_2)P_2 + P_1^3(1-P_2)^2P_2 \tag{54}$$

Se observa en la **Figura 98** que no se pueden dar rutas hacia atrás, es decir siempre son de los niveles bajos hacia los niveles altos. El **código 8.4** calcula la probabilidad de bloqueo utilizando enrutamiento jerárquico, para el ejemplo de la **Figura 98**, cuando el *abonado A* desea comunicarse con el *abonado B*, para valores de $P_1 = 0.3$ y $P_2 = 0.005$, el programa solicita al usuario la probabilidad de ocupación de las rutas, si la ruta no existe la probabilidad es 1, también solicita como dato el nodo alterno, por ejemplo de la **Figura 98** se observa que si la ruta que une el nodo 1 con el nodo 4 está bloqueado, entonces el nodo alterno es el 3. El siguiente **código 8.4** genera un archivo de función *"M"*, para el cálculo de la probabilidad de bloqueo.

Código 8.4.




```
% FUNCION QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO,
    RECIBE COMO PARAMETROS LOS NODOS DE ORIGEN, DESTINO
% INDICES, LA MATRIX DE PROBABILIDAD Y LA MATRIX DE
    NODOS ALTERNOS
function[prob_bloqueo]=pb(i,d,a,b,prob,alter);
if(a==d) % CONDICION DE PARO
prob_bloqueo=0;
elseif(a~=d && b==0) % CONDICION DE PARO
prob_bloqueo=1;
else
% CALCULO DE PROBABILIDAD DE BLOQUEO CON USO RECURSIVO
    DE LA FUNCION
prob_bloqueo=(1-prob(a,b)).*pb(i,d,b,d,prob,alter)+ (
    prob(a,b).*pb(i,d,a,alter(a,b),prob,alter));
end
```

El **código 8.5** produce los siguientes resultados:

Código 8.5.




```
% CONDICIONES DEL CODIGO
disp('PROGRAMA QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO
    DE EXTREMO A EXTREMO DE UNA RED DADA');
disp('SI NO EXISTE ENLACE LA PROBABILIDAD DEBE SER 1');
disp('SI NO EXISTE ENLACE ALTERNO, ENTONCES EL VALOR DE
    NODO ALTERNO DEBE SER 0');
% CONDICIONES INICIALES
x=4;
mat=zeros(x,x); % SE CREA MATRIX DE CEROS DE 4X4
traf=zeros(x,x); % SE CREA MATRIX DE CEROS DE 4x4
t=1; % VARIABLE PARA RECORER LA MATRIX
for j=1:x-1
for i=x-1:-1:t
strcat('INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO ',
    num2str(j), 'Y',num2str(i+1))
% PEDIR PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA EL ENLACE
prob=input('PROBABILIDAD DE BLOQUEO= ');
alter=input('INGRESE NODO ALTERNO: ');
mat(j,i+1)=prob; % MATRIZ DE PROBABILIDADES DE BLOQUEO
traf(j,i+1)=alter; % MATRIZ DE NODOS ALTERNOS
end
t=t+1;
end
m=pb(1,x,1,x,mat,traf); % LLAMADO DE LA FUNCION PARA EL
    CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO
disp('LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA ESTA RED ES: ')
disp(m)
```

```
PROGRAMA QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO DE EXTREMO A EXTREMO DE UNA RED DADA
SI NO EXISTE ENLACE LA PROBABILIDAD DEBE SER 1
SI NO EXISTE ENLACE ALTERNO, ENTONCES EL VALOR DE NODO ALTERNO DEBE SER 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 3

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y3'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 2

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y2'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO2Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 3

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO2Y3'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO3Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0
LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA ESTA RED ES:
    0.0018
```

Figura 99: Resultados.

7. Aplicaciones en Sistemas Celulares

En esta unidad nos enfocaremos en mostrar el uso importante que tiene **MATLAB** en los sistemas celulares. Se mostrarán celdas celulares, usuarios en las celdas y se les dará movimiento a los usuarios, esto para mostrar una idea de lo que sucede en los sistemas reales de comunicación inalámbrica. Los códigos que se desarrollan en esta unidad se pueden utilizar para realizar un

análisis del comportamiento de los usuarios en una red celular 5G. Podemos simular la distribución de los usuarios en la celdas, calcular la interferencia que se presenta en cada banda y la velocidad de transmisión, esto se realiza para un esquema NOMA.

7.1. Celdas celulares

El área de cobertura de las celdas celulares en un principio se representaba mediante circunferencias, pero existen zonas de traslape y zonas que quedan sin cobertura es por esto que las celdas celulares típicamente se representan por hexágonos, para facilitar el análisis matemático.

El siguiente **código 9.1** genera la gráfica de una celda celular hexagonal, en este ejemplo la distancia desde el centro de la celda al vértice es de 10 como se puede observar en la **Figura 100**.

Código 9.1.

```
i=-pi:pi/3:pi;
x=10*cos(i);
y=10*sin(i);
plot(x,y)
```

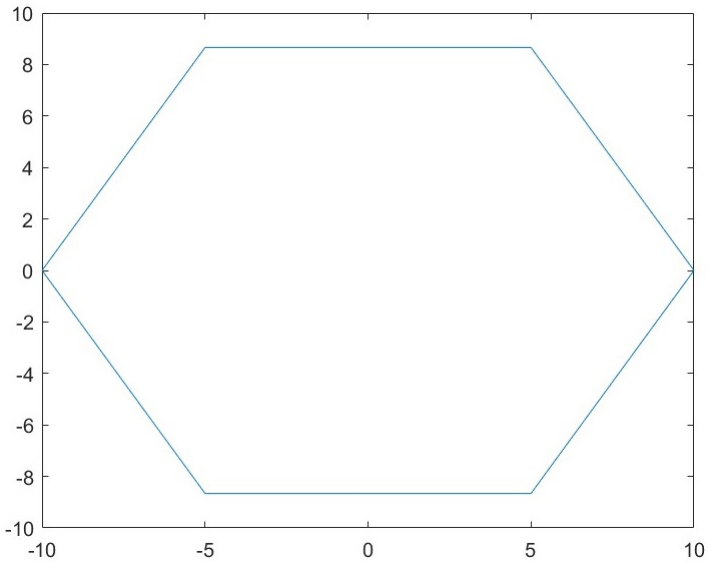


Figura 100: Celda celular.

Al analizar un sistema celular, se toma en cuenta una red de celdas, es decir, una interconexión de celdas adyacentes, esto para considera la transferencia de llamadas, es decir el cambio de celdas. El **código 9.2** genera la gráfica de una red de 19 celdas conjuntas. Esto se reduce a un análisis geométrico (ver **Figura 101**).

Código 9.2.




```
i=-pi:pi/3:pi;
x0=10*cos(i); y0=10*sin(i);
x1=x0+15; y1=y0+8.6603;
x2=x0; y2=y1+8.6603;
x3=x1; y3=y0-8.6603;
x4=x0; y4=y3-8.6603;
x5=x0-15; y5=y1;
x6=x5; y6=y0-8.6603;
x7=x0; y7=y2+8.6603+8.6603;
x8=x1; y8=y2+8.6603;
x9=x8+15; y9=y2;
x10=x9; y10=y1-8.6603;
x11=x10; y11=y10-8.6603-8.6603;
x12=x1; y12=y11-8.6603;
x13=x0; y13=y12-8.6603;
x14=x5; y14=y12;
x15=x14-15; y15=y11;
x16=x15; y16=y10;
x17=x16; y17=y9;
x18=x5; y18=y8;
plot(x0,y0,'k') hold on;
plot(x1,y1,'k')
plot(x2,y2,'k')
plot(x3,y3,'k')
plot(x4,y4,'k')
plot(x5,y5,'k')
plot(x6,y6,'k')
plot(x7,y7,'k')
plot(x8,y8,'k')
plot(x9,y9,'k')
plot(x10,y10,'k')
plot(x11,y11,'k')
plot(x12,y12,'k')
plot(x13,y13,'k')
plot(x14,y14,'k')
plot(x15,y15,'k')
plot(x16,y16,'k')
plot(x17,y17,'k')
plot(x18,y18,'k')
```

7.2. Usuarios en las celdas celulares

Una vez creadas las celdas celulares lo que resta para visualizar el sistemas celular completo, es decir, generar usuarios dentro de la celda. El **código 9.3** genera usuarios aleatorios dentro de una celda, los grafica y genera el efecto de movimiento de los usuarios, los cuales tienen 4 grados de libertad, es decir se mueven hacia el norte, sur, este y oeste. Cada movimiento se realiza cada 0.7 segundos, esto para visualizarse.

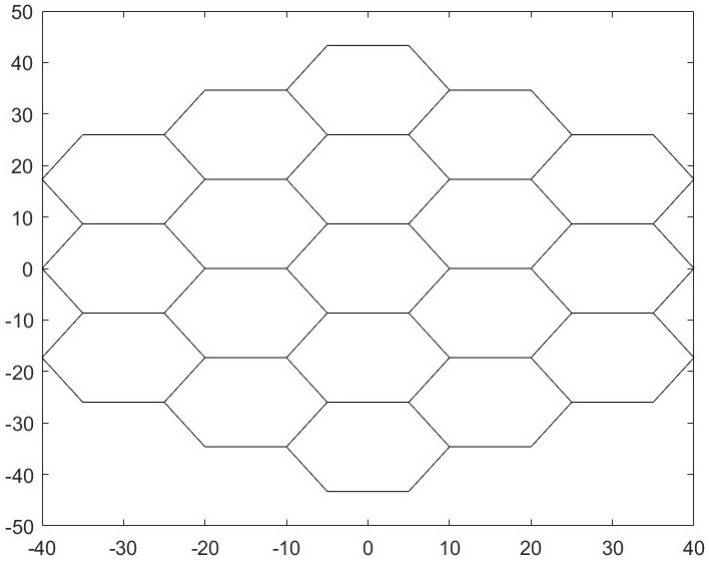


Figura 101: Red celular.

Código 9.3.

Código

```
% Generar Celdas
i=-pi:pi/3:pi;
x=10*cos(i);
y=10*sin(i);
% Generar N usuarios
N=1000;
xv=10*randn(N,1);
yv=10*randn(N,1);
% Colocar los usuarios dentro de la celda
in=inpolygon(xv,yv,x,y);
m1=xv(in);
m2=yv(in);
% Generar movimientos de los usuarios cada 0.7 seg
for u=1:30
pause (0.7)
drawnow
clf
nuevo=rand(length(m1),1);
if (sum(nuevo)>length(m1)/2)
    mnu=m1+nuevo;
    mnu2=m2+nuevo;
else
    mnu=m1-nuevo;
    mnu2=m2-nuevo;
end
```

Código

```
%% Cont...
% Limites de la celda, para asegurar que los usuarios queden dentro
for p=1:length(m1)
if (mnu(p)<=-10)
mnu(p)=mnu(p)+1;
elseif(mnu(p)>=10)
mnu(p)=mnu(p)-1
elseif(mnu2(p)<=-8.6603)
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
elseif(mnu2(p)>=8.6603)
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
end
if (atan(mnu(p)/mnu2(p))>=0.52 || atan(mnu(p)/mnu2(p))<=-0.52)
if (mnu(p)>=0 && mnu2(p)>=0)
mnu(p)=mnu(p)-1;
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
elseif(mnu(p)>=0 && mnu2(p)<0)
mnu(p)=mnu(p)-1;
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)>=0)
mnu(p)=mnu(p)+1;
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)<0)
mnu(p)=mnu(p)+1;
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
end
end
plot(x,y,mnu(p),mnu2(p),'.b')
hold on
end
end
```

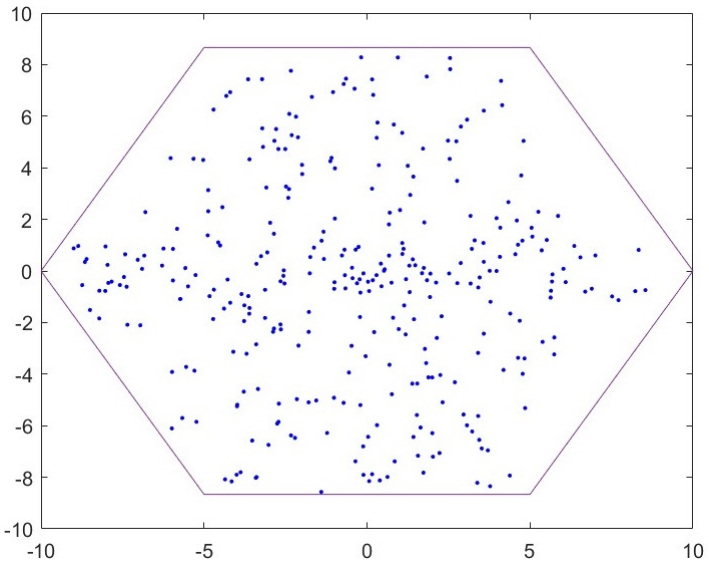


Figura 102: Usuarios en la celda.

Por último debemos distinguir a los usuarios, es decir, los usuarios cercanos a la estación base los consideramos con buena condición de canal (esto sin considerar los desvanecimientos) y los colocaremos en color ocre, los usuarios que se encuentren en condiciones aceptables lo colocaremos con color azul y los usuarios que se ubican en el borde de la celda, en malas condiciones de canal, los colocaremos en color rojo, esto se muestra en el **código 9.4**.

Código 9.4.




```
% Generar Celdas
i=-pi:pi/3:pi;
x=10*cos(i);
y=10*sin(i);
% Generar N usuarios
N=1000;
xv = 10*randn(N,1);
yv = 10*randn(N,1);
% Colocar los usuarios dentro de la celda
in = inpolygon(xv,yv,x,y);
m1=xv(in);
m2=yv(in);
% Generar movimientos de los usuarios cada 0.7 seg
for u=1:30
pause (0.7)
drawnow
clf
nuevo=rand(length(m1),1);
if sum(nuevo)>length(m1)/2
mnu=m1+nuevo;
mnu2=m2+nuevo;
else
mnu=m1-nuevo;
mnu2=m2-nuevo;
end
% Limites de la celda, para asegurar que los usuarios
   queden dentro
for p=1:length(m1)
if (mnu(p)<=-10)
mnu(p)=mnu(p)+1;
elseif(mnu(p)>=10)
mnu(p)=mnu(p)-1;
elseif(mnu2(p)<=-8.6603)
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
elseif(mnu2(p)>=8.6603)
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
end
if (atan(mnu(p)/mnu2(p))>=0.52 || atan(mnu(p)/mnu2(p))
   <=-0.52)
if (mnu(p)>=0 && mnu2(p)>=0)
mnu(p)=mnu(p)-1;
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
elseif(mnu(p)>=0 && mnu2(p)<0)
mnu(p)=mnu(p)-1;
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)>=0)
mnu(p)=mnu(p)+1;
mnu2(p)=mnu2(p)-1;
elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)<0)
mnu(p)=mnu(p)+1;
mnu2(p)=mnu2(p)+1;
end
end
end
```

Código

```
%% Cont...
% Asignar Colores
for o=1:length(m1)
if (sqrt(mnu(o)^2 + mnu2(o)^2) <= 5.9 && sqrt(mnu(o)^2+
    mnu2(o)^2) > 1.589)
col= 'bo';
elseif (sqrt(mnu(o)^2+mnu2(o)^2) <= 1.589 && sqrt(mnu(o
    )^2+mnu2(o)^2) > 0.9)
col= 'g+';
elseif (sqrt(mnu(o)^2+ mnu2(o)^2) <= 0.9)
col= 'g+';
else
col= 'r*';
end
hold on
plot(x,y,mnu(o),mnu2(o),col)
end
end
```

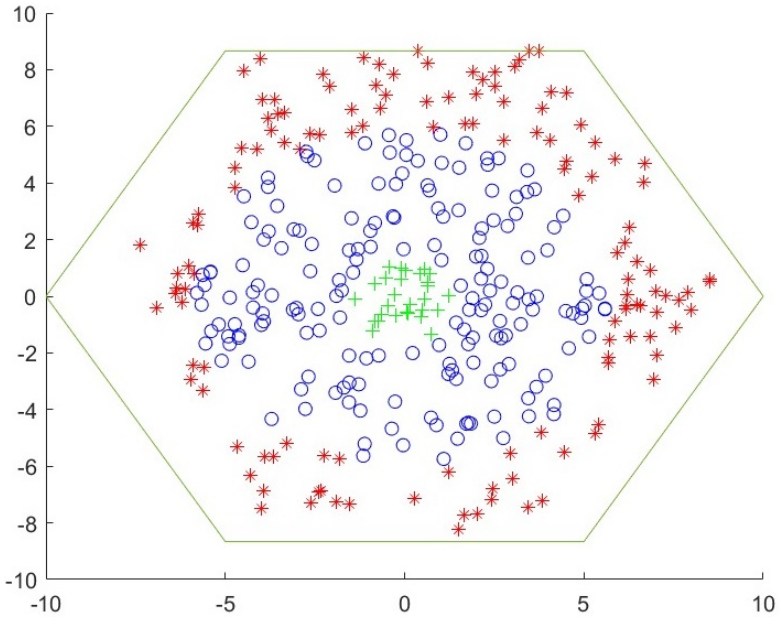


Figura 103: Usuarios en la celda.

7.3. Esquema NOMA para 5G

Hoy en día, las tecnologías de telecomunicaciones en general están tendiendo hacia la integración de todo tipo de clase de servicios, básicamente a través de una red global de comunicaciones. Adicional, se busca que dicha red tenga accesibilidad total, en otras palabras, que todo tipo de usuario pueda acceder a ésta desde cualquier parte, sin tener que estar en una red fija, simplemente mediante la utilización de un terminal móvil **(Butt et al., 2017)**.

Un desafío importante para 5G será la mejora de la eficiencia espectral, ya que con esta se busca ofrecer altas velocidades de transferencia de datos a mayor número de teléfonos inteligentes. La eficiencia espectral se puede incrementar al aumentar el orden de modulación (se refiere a la cantidad de bits de información que se transmiten por símbolo en una señal modulada) y, además, se pueden emplear nuevos esquemas de acceso al medio para mejorar ésta. De los esquemas de acceso al medio podemos destacar el acceso múltiple no ortogonal (*NOMA*),

el cual garantiza que múltiples usuarios puedan compartir el mismo recurso **(Butt et al., 2017)**.

Recientemente *NOMA* se ha destacado como una de las técnicas más prometedoras en cuanto al acceso múltiple para la tecnología 5G, lo anterior debido a que soluciona la problemática de acomodar a más usuarios en el mismo recurso haciendo la asignación de éste en dominios de potencia o código. Estos beneficios se observan commparando esta técnica con la del acceso múltiple ortogonal, **(Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017)**.

En conclusión, *NOMA* radica en el uso sincrónico del mismo espectro de radioeléctrico para múltiples usuarios a expensas de mínimas interferencias entre ellos. Las redes que trabajan bajo el esquema de *NOMA* pueden contemplar a un mayor número de usuarios en las bandas de espectro radioeléctrico que esté disponible, y pueden ofrecer a los usuarios individuales con un mayor ancho de banda, **(Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017)**.

A continuación, se mencionan las ventajas que se observan al emplear *NOMA* en comparación con el Acceso Múltiple Ortogonal (*OMA*, por sus siglas en inglés), **(Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017)**:

- Una mejor eficiencia espectral.
- Existe una conectividad masiva.
- Presenta baja latencia de transmisión y el costo de señalización.

Para que el esquema *OMA* presente resultados exitosos, se deben formar grupos de usuarios y permitir que estos transmitan en el mismo recurso radioeléctrico con cierta potencia adecuada, así, posteriormente emplear técnicas de cancelación de interferencia sucesiva, mejor conocida como *SIC* en el/los receptor/es para finalmente decodificar la señal de mensaje de diferentes usuarios. En la **Figura 104** se presenta el esquema *NOMA* de manera básica a través de un multiplexado en el dominio de la potencia con un receptor SIC, **(Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017)**.

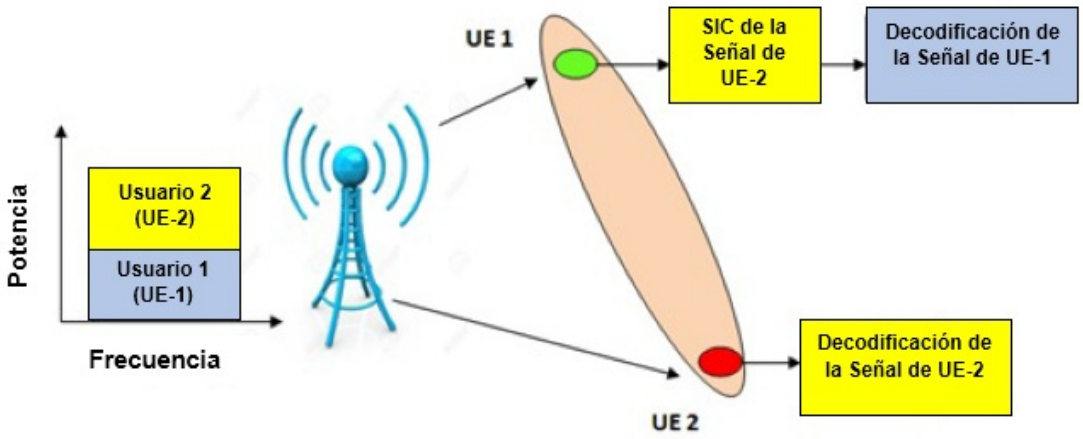


Figura 104: NOMA con SIC en el receptor.

Por sencillez se considera el empleo de una sola antena transmisora y una antena receptora. En el esquema se observa que la estación base transmite una señal (xi) al usuario i (UEi), con potencia Pi, **(Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017)**.

En $NOMA$, el proceso de cancelar la interferencia sucesiva se realiza en el receptor del UE. El orden óptimo para la decodificación está en el orden decreciente de ganancia del canal normalizado por el ruido y la potencia de interferencia entre celdas (llamado simplemente ganancia del canal). En resumen, se supone que cualquier usuario puede decodificar correctamente las señales de otros usuarios cuyo orden de decodificación viene antes del usuario correspondiente. Por lo tanto, UEi puede eliminar la interferencia del usuario j cuya ganancia de canal $|h_j|^2$ es menor a la del usuario i, $|h_i|^2(j < i)$, es decir, las ganancias de los canales se ordenan de mayor a menor **(Borja-Benítez, Vasquez-Toledo, Tirado-Méndez, Borja-Benítez, & Marcelin-Jiménez, 2020)**.

En la **Figura 105**, se puede observar que el usuario 2 ($UE-2$) no realiza la cancelación de interferencia ya que este es el primero en el orden de decodificación. El $UE-1$ primero decodifica la señal de $UE-2$ y resta de su componente de señal recibida, y a continuación se decodifica la señal del $UE-1$ sin interferencia de la señal del $UE-2$ **(Borja-Benítez et al., 2020)**.

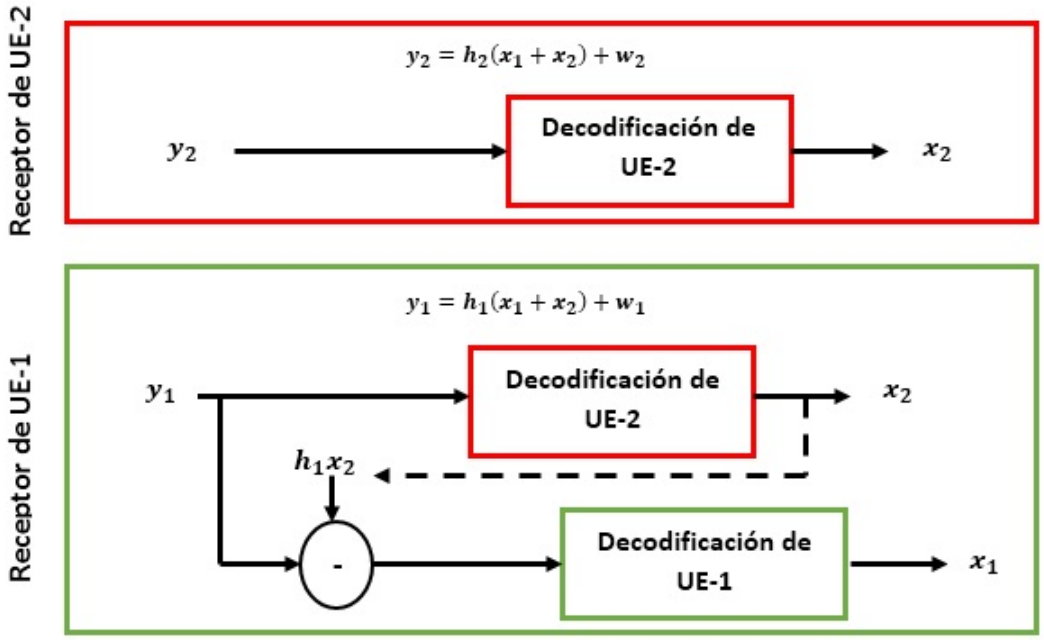


Figura 105: Proceso SIC.

La tasa de transmisión para cada usuario se calcula como sigue:

- Esquema NOMA

$$R_1 = log_2\left(1 + \frac{P_1|h_1|^2}{N_{0,1}}\right) \qquad R_2 = log_2\left(1 + \frac{P_2|h_2|^2}{P_1|h_2|^2N_{0,2}}\right)$$

- Esquema OMA

$$R_1 = \alpha log_2\left(1+\frac{P_1|h_1|^2}{\alpha N_{0,1}}\right) \qquad R_2 = (1-\alpha) log_2\left(1+\frac{P_2|h_2|^2}{(1-\alpha)N_{0,2}}\right)$$

donde

R_1	es la tasa de transmisión normalizado del usuario 1 (bps/Hz).
R_2	es la tasa de transmisión normalizado del usuario 2 (bps/Hz).
P_1	es el porcentaje de potencia asignado al usuario 1.
P_2	es el porcentaje de potencia asignado al usuario 2.
$(\|h_1\|^2)/N_{0,1}$	es la ganancia de canal del usuario 1.
$(\|h_2\|^2)/N_{0,2}$	es la ganancia de canal del usuario 2.
α	es el porcentaje de ancho de banda asignado al usuario 1.

El **código 9.5** simula el canal para dos usuarios que comparten el mismo recurso utilizando la tecnología *NOMA*. Calcula la ganancia del canal, utilizando un canal con desvanecimiento log-normal. Utiliza la función `Ganancia.m` (**código 9.6**) para calcular la ganancia de la antena que depende del ángulo de incidencia. Este código también calcula las tasas de transmisión para cada usuario en ambos esquemas (*OMA* y *NOMA*).

Código 9.5.

Código

```
% Usuario 1
x1=0.2; % Coordenada X del usuario 1
y1=0.66603; % Coordenada Y del usuario 2
d1=sqrt(x1.^2+y1.^2); % Distancia del usuarios 1 a la
    Antena Servidor
ang1=atan(y1./x1)*180/pi; % Angulo
G1=Ganancia(ang1); % Ganancia
% Usuario 2
x2=1; % Coordenada X del usuario 2
y2=-0.86; % Coordenada Y del usuario 2
d2=sqrt(x2.^2+y2.^2); % Distancia del usuarios 2 a la
    Antena Servidor
ang2=atan(y2./x2)*180/pi; % Angulo
G2=Ganancia(ang2); % Ganancia
NGaussianas = 5000; % Numero de variables aleatorias
media = 4; % Valor de la media para ambiente de
    propagación urbano
sigma = 8; % Valor de la varianza para ambiente de
    propagación urbano
% Calculo de Parametros para el usuario 1
media1=10*log10((d1^-4)*G1); % Media
Gaussianas1 = randn(1,NGaussianas);
inter1 = sigma*Gaussianas1 + media1; % Canal Gaussiano
lognormal1= 10.^(inter1/10); % Canal Log-Normal
Gan_canal_1=10*log10(mean(abs(lognormal1))) % Valores
    en dB
```

Código

```
%% cont...
% Calculo de Parametros para el usuario 2
media2=10*log10((d2^-4)*G2); % Media
Gaussianas2 = randn(1,NGaussianas);
inter2 = sigma*Gaussianas2 + media2; % Canal Gaussiano
lognormal2= 10.^(inter2/10); % Canalo Log-Normal
Gan_canal_2=10*log(mean(abs(lognormal2))) % Valores en
    dB
% Asignación de Potencias para cada usuario
P1=0.2;
P2=0.8;
% Tasas para NOMA
R1_NOMA=log2(1+P1*mean(abs(lognormal1)))
R2_NOMA=log2(1+P2*mean(abs(lognormal2))/(P1*mean(abs(
    lognormal2))+1))
% Tasas para OMA
alfa=0.5; % Porcentaje de ancho de banda asignado al
    usuario 1
R1_OMA=alfa*log2(1+(P1*mean(abs(lognormal1))/alfa))
R2_OMA=(1-alfa)*log2(1+(P2*mean(abs(lognormal2))/(1-
    alfa)))
```

Código 9.6.

Código

```
%% Este programa sirve para obtener la ganancia de la
    antena
function [G] = Ganancia(ang)
ar = degtorad(ang);
q=-4; %nivel de ganancia de la antena
p=-15; %nivel promedio de ganancia normalizada para el
     l bulo   lateral.
grado = 0;
raiz=sqrt((1-p)/(1-q))*(pi/3);
%ar=ang;
if(abs(ar)<=raiz)
    grado=1-(((1-q)/((pi/3)^2))*(ar^2));
 elseif (abs(ar)>raiz)
         grado=p;
end
G=grado;
end
```

El **código 9.5** produce:

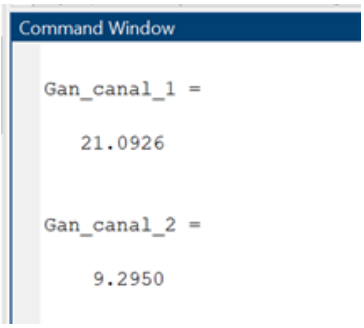


Figura 106: Ganancias de canal.

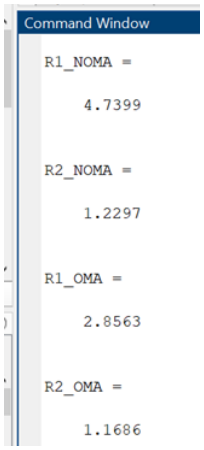


Figura 107: Tasas de transmisión.

Comparando los resultados en las tasas de transmisión para cada esquema se puede observar que *NOMA* tiene ganancia respecto a *OMA* para cada usuario. Para el usuario 1 se tiene una ganancia mayor al 60 %, y para el usuario 2 mayor del 6 %. Con esto se demuestra la ventaja de utilizar el esquema *NOMA*.

8. Introducción a SIMULINK

MATLAB nos ofrece una herramienta llamada **Simulink**, la cual es un entorno muy popular, ya que es un simulador multidominio y su diseño se basa en modelos de diagramas de bloques. Es compatible con:

- El sistema de nivel de diseño.
- Simulación.
- Generación automática de código.
- Prueba continua y verificación de sistemas embebidos.

Además, **Simulink** ofrece el servicio de editor gráfico, contiene bibliotecas de bloques que son personalizadas y, también soluciones para el modelado, así como la simulación de sistemas dinámicos. Este entorno está contenido en **MATLAB**, lo que es muy conveniente ya que podemos añadir códigos de **MATLAB** en los modelos y, además, exportar los resultados obtenidos de las simulaciones para **MATLAB**, lo anterior para realizar análisis posteriores **(Beucher & Weeks, 2008)**.

8.1. Ingresar a SIMULINK

Para ingresar a **Simulink** inicialmente debemos ejecutar la herramienta desde la ventana de comando de **MATLAB**, escribiendo *simulink* en la línea de comandos o la otra opción es dando click en el icono como el mostrado a la derecha.



A continuación, se desplegará una nueva ventana como la mostrada en la **Figura 108**. En ésta, podremos observar todas las librerías de los bloques disponibles en **Simulink**. Del lado izquierdo podemos observar lo correspondiente a todas las librerías disponibles y del lado derecho todo el contenido de cada una de las librerías.

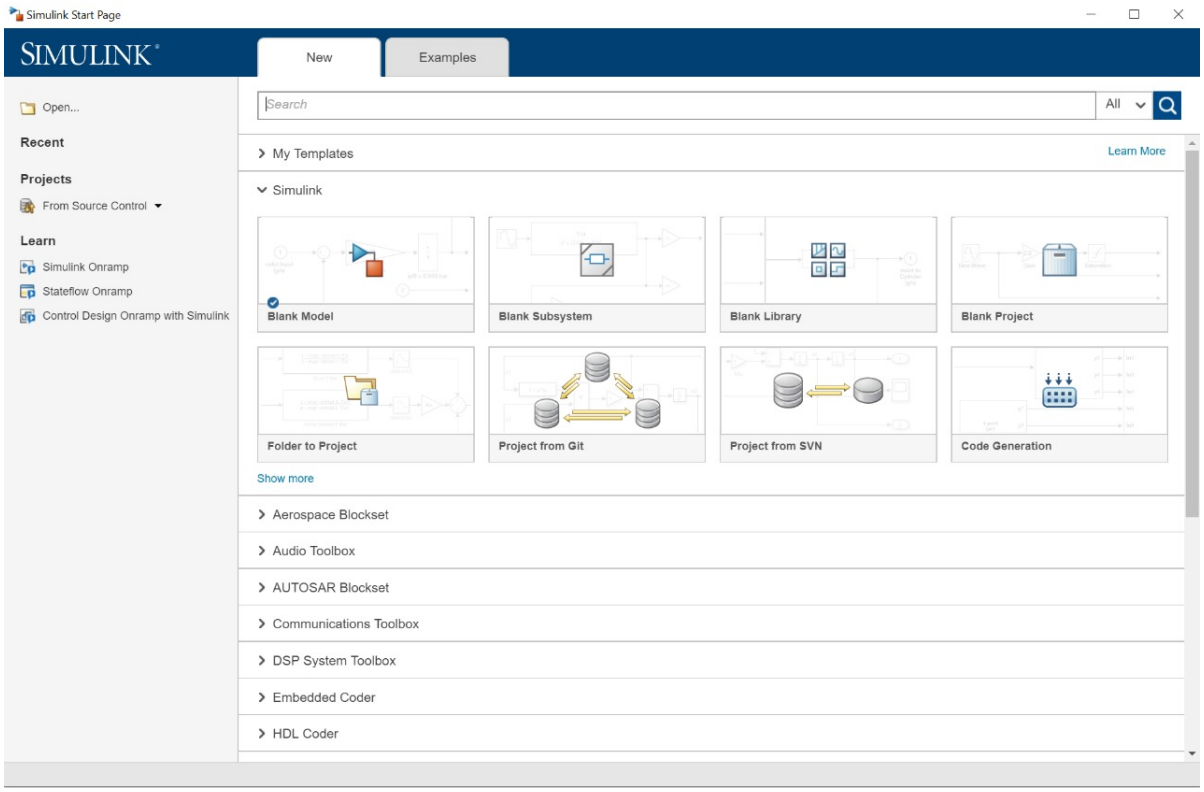


Figura 108: Librerías.

Finalmente, en la ventana de inicio de **Simulink**, en la parte superior, podemos observar diversas herramientas tales como la búsqueda de un bloque determinado a partir de su nombre.

8.2. Entorno de trabajo de SIMULINK

Para poder crear archivos necesitamos abrir un nuevo fichero, para esto, debemos elegir un nuevo fichero en el que se guardará el modelo, damos clic en el menu *NEW*, *Blank Model*, *Create Model*, como se muestra en la **Figura 109 (Beucher & Weeks, 2008)**.

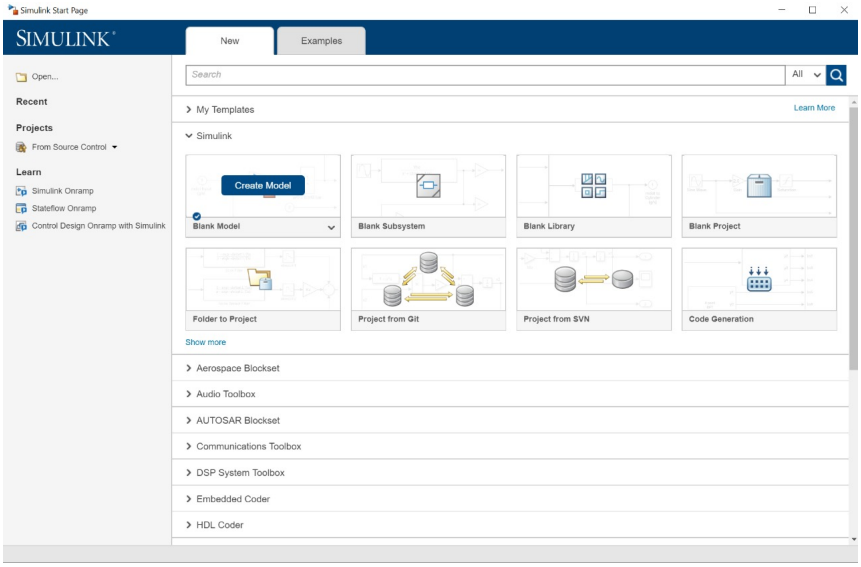


Figura 109: Nuevo fichero.

En esta nueva ventana crearemos el modelo (ver **Figura 110**), observemos que aún no se le ha asignado nombre.

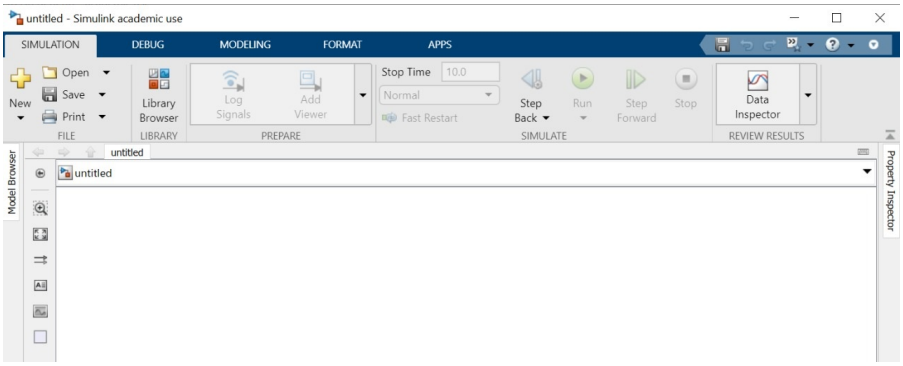


Figura 110: Nuevo fichero.

8.3. Muestreo y Cuantización

Recordando los ejemplos mostrados en el **Capítulo 3**, se trabajó con el teorema de muestreo y se desarrolló el código para el muestreo ideal. En esta sección se desarrollará este ejemplo mediante bloques.

En la ventana de librerías, en la opción **Simulink**, elegir la librería *Sources* y en esta buscar y elegir *Sine Wave*, arrastrar este bloque en la ventana del fichero, como se muestra en la **Figura 111**. En el bloque colocado en el fichero, hacer doble clic, se desplegará una ventana de configuración del bloque en la cual se eligen las características de la señal analógica que queremos generar, esto se observa en la **Figura 112**.

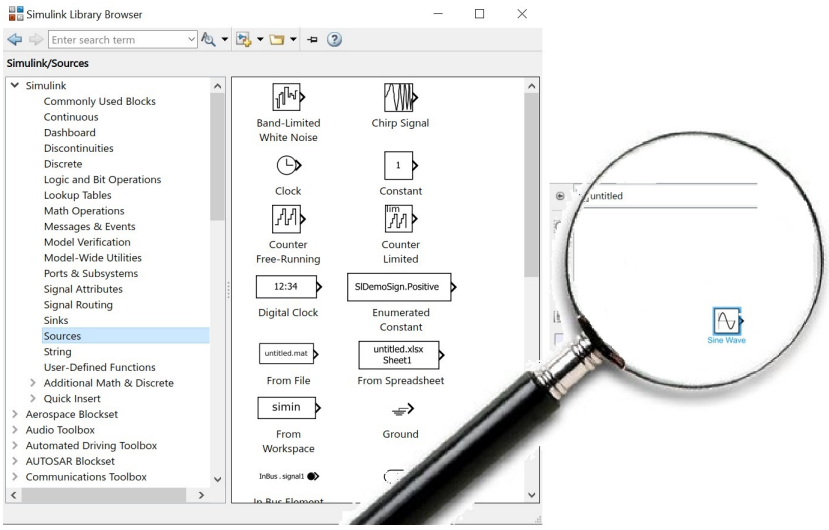


Figura 111: Selección de bloque.

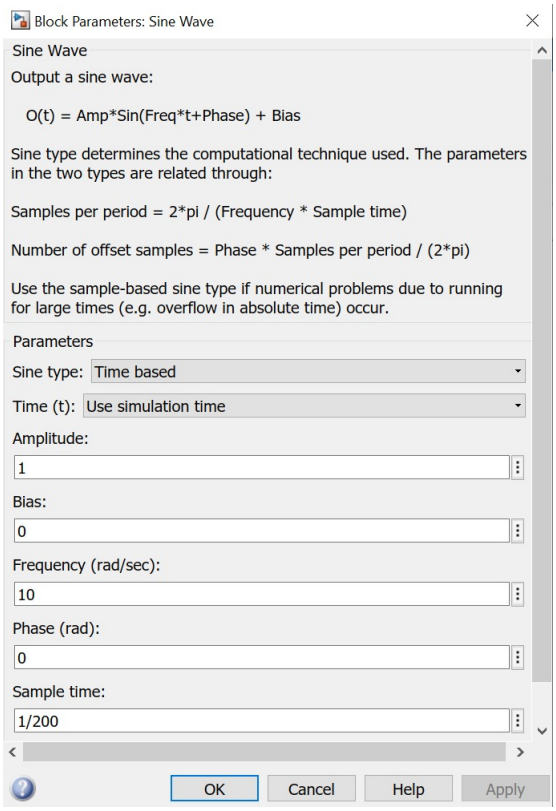


Figura 112: Configuración de características.

En la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Sources* y en esta buscar y elegir *Pulse Generator*, y configurar las características para que la duración del pulso sea muy pequeña, como se muestra en la **Figura 113**.

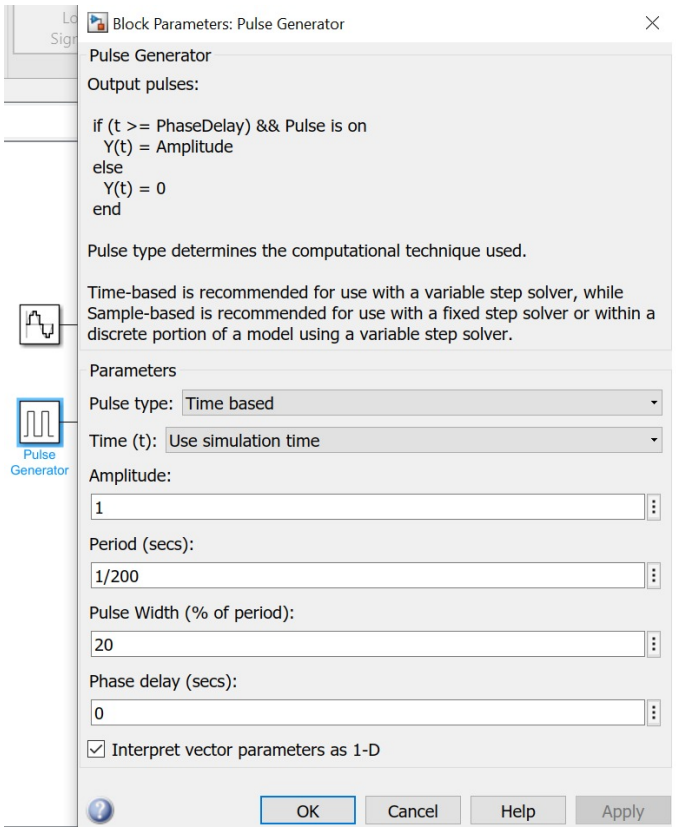


Figura 113: Configuración de características.

En la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Math Operations* y en esta buscar y elegir *Product*, como se muestra en la **Figura 114**.

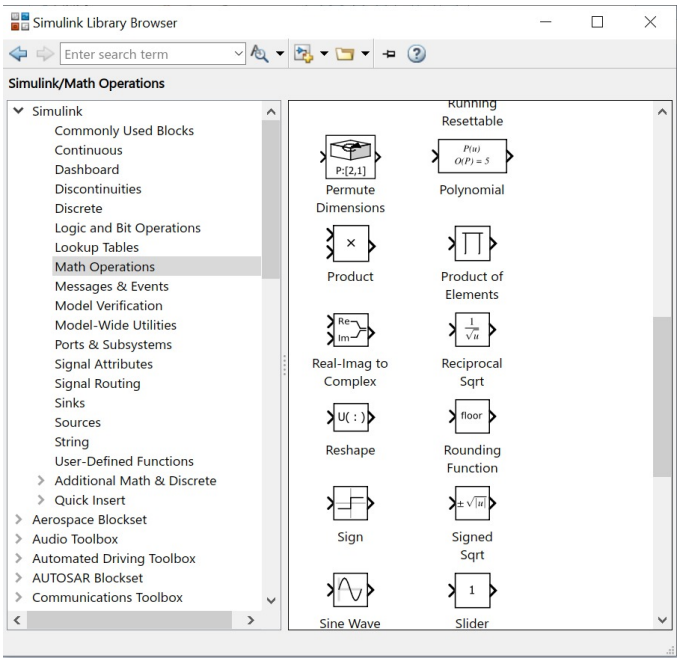


Figura 114: Selección de bloque.

Lo que resta es agregar un bloque para presentar los resultados, para esto, en la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Sinks* y en esta buscar y elegir *Scope*, como se muestra en la **Figura 115**.

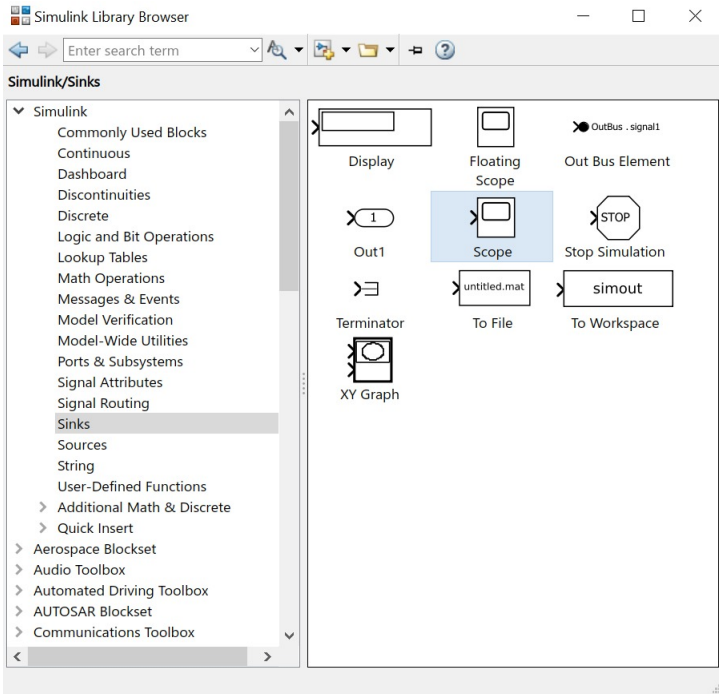


Figura 115: Selección de bloque.

Ya que tenemos estos bloques en el fichero, lo que sigue es la interconexión de estos bloques. Conectar estos bloques como se muestra en la **Figura 116**.

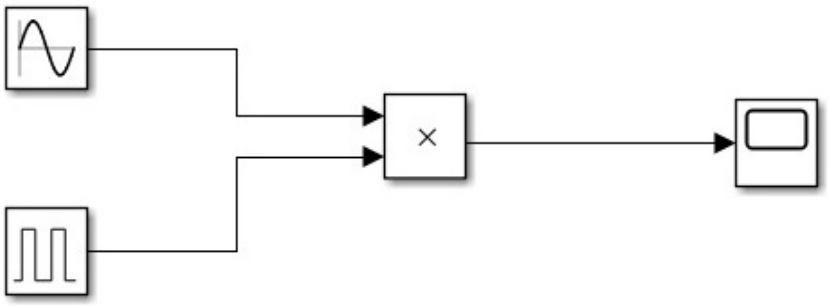


Figura 116: Conexión de bloques.

Teniendo conectado los bloques el siguiente paso es iniciar la simulación como se muestra en la **Figura 117**.

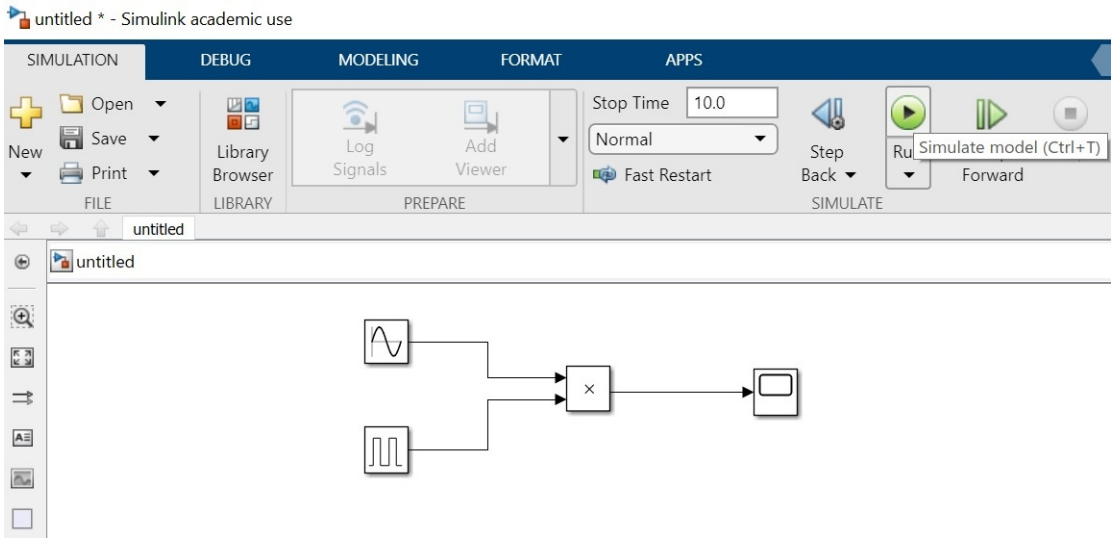


Figura 117: Simulación.

Para observar los resultados de la simulación, debemos hacer un doble clic sobre el bloque *Scope*, el cual arroja el resultado, como se observa en la **Figura 118**.

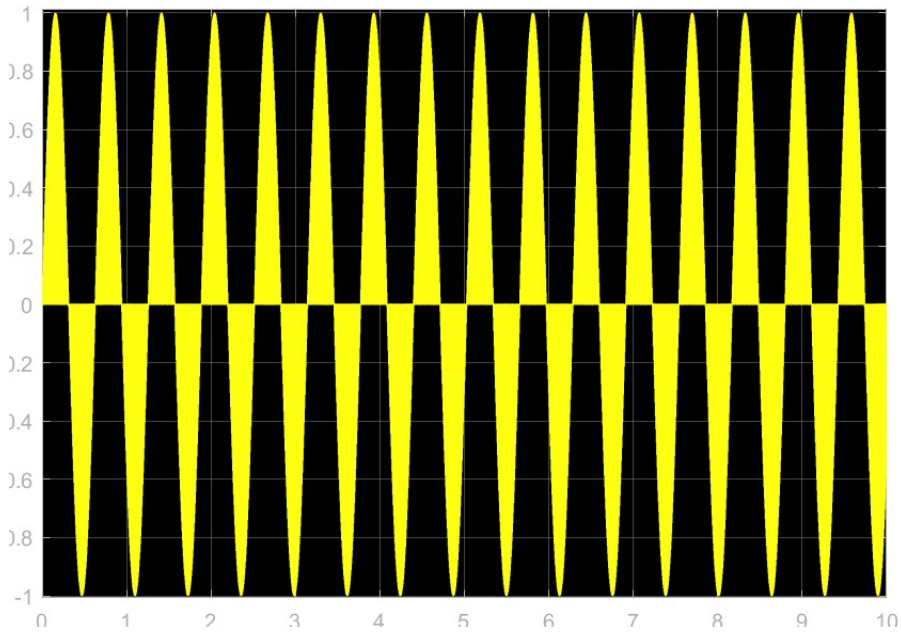


Figura 118: Resultado de simulación.

Se observa en la **Figura 118** el muestreo de la señal analógica. En la **Figura 118**, en donde se despliega el resultado, podemos encontrar *opciones de figura*, en las cuales podemos darle zoom a la figura tanto en el eje x como en el eje y. Utilizando estas opciones obtenemos la **Figura 119**.

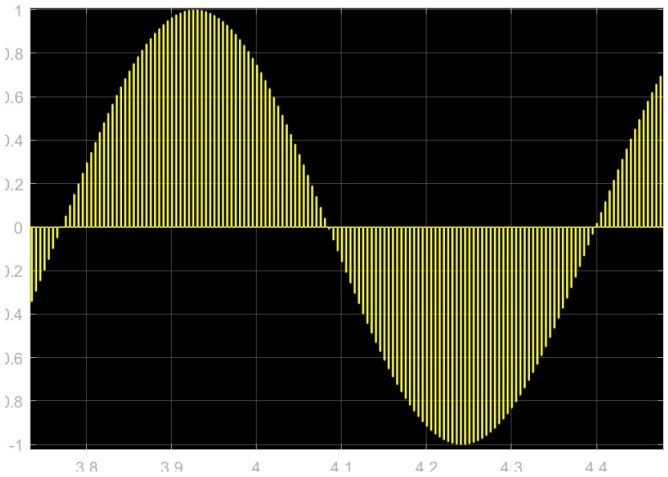


Figura 119: Resultado de simulación.

Para el ejemplo de cuantización, se siguen los mismos pasos, en la ventana de librerías elegir la *simulink*, dentro de la cual se busca *Discontinuities*, y elegir *Quantizers*, en la ventana derecha elegir y arrastra el bloque *Quantizer*, como se muestra en la **Figura 120**. Este bloque tiene como entrada el bloque que genera la señal analógica (*Sine Wave*) y como salida un bloque *Scope*.

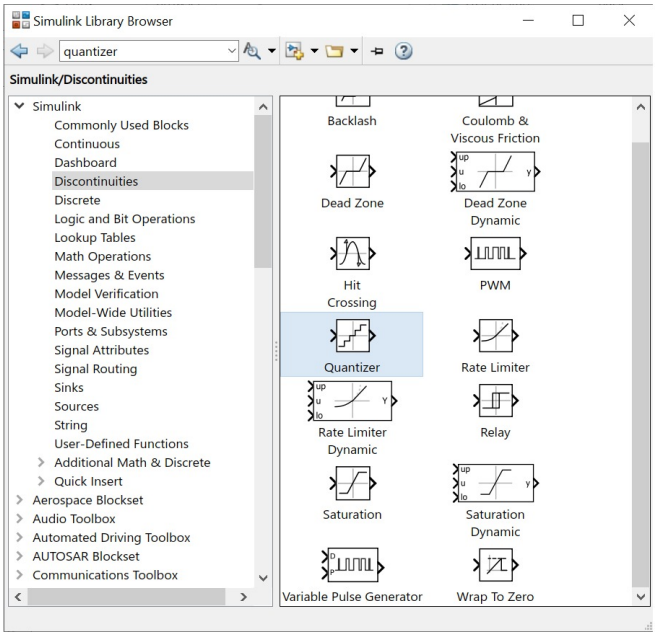


Figura 120: Selección de bloque.

Se siguen los mismos pasos explicado para el ejemplo anterior, para la simulación del fichero, y se obtiene el resultado mostrado en la **Figura 121**.

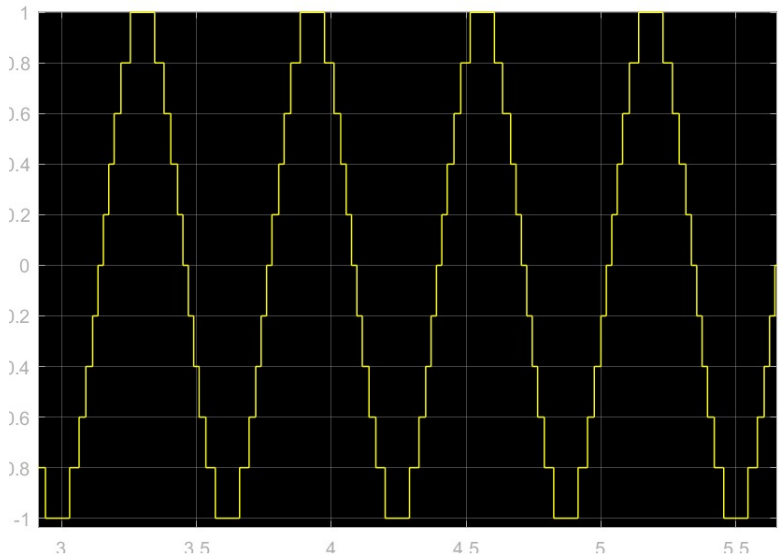


Figura 121: Cuantización.

Por último se guarda el archivo con la extensión *.mdl*, como se muestra en la **Figura 122**.

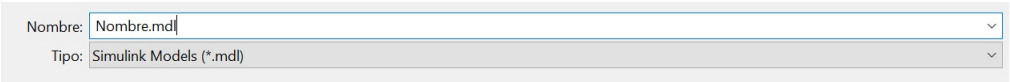


Figura 122: Guardar archivo.

Referencias

Aguilar, H. J., y cols. (2002). *Fundamentos de los sistemas modernos de comunicación* (Vol. 7). Alfaomega.

Bellamy, J. C. (2000). *Digital telephony*.

Beucher, O., & Weeks, M. (2008). *Introduction to matlab & simulink (a project approach)*. Laxmi Publications, Ltd.

Borja-Benítez, M. A., Vasquez-Toledo, L. A., Tirado-Méndez, J. A., Borja-Benítez, B., & Marcelin-Jiménez, R. (2020). A novel mathematical teletraffic method to evaluate the interoperation of different standards with noma systems using order statistics. *International Journal of Communication Systems*, *33*(11), 4406.

Butt, M. M., Popovski, P., Shakir, M. Z., López-Pérez, D., Quek, T. Q., & Guizani, M. (2017). Ieee access special section editorial: physical and medium access control layer advances in 5g wireless networks. *IEEE Access*, *5*, 27845–27849.

Gilat, A. (2008). *Matlab: An introduction with applications* (Vol. 3). Wiley New York.

Haykin, S. S. (2002.) *Sistemas de comunicaci*. Mco :: Limusa Wiley,. (Traducido de : Communication systems.)

Kamen, E. W., & Heck, B. S. (2008). *Fundamentos de señales y sistemas usando la web y matlab*. Pearson Educación.

Moya, P. A. (2008). *Señales y sistemas. fundamentos matemáticos*. Pablo Alvarado Moya.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas*. Pearson Educación.

Papoulis, A., & Saunders, H. (2002). Probability, random variables and stochastic processes.

Proakis, J. G., Salehi, M., Zhou, N., & Li, X. (1994). *Communication systems engineering* (Vol. 2). Prentice Hall New Jersey.

Salema, C. (2002). *Microwave radio links: From theory to design*. John Wiley & Sons, Inc.

Stüber, G. L., & Stèuber, G. L. (2012). *Principles of mobile communication* (Vol. 2). Springer.

Vasquez-Toledo, L. A., & Lara-Rodríguez, D. (2017). A coordinated operation access scheme for 5g cellular systems. En *2017 ninth international conference on ubiquitous and future networks (icufn)* (pp. 604–606).

Luis Alberto Vásquez Toledo
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ingeniería Eléctrica.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-9276-4988`
e-mail: `lvasquezt@xanum.uam.mx`



TALLER DE OTOÑO METROPOLITANO DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

A principios de 2017, un grupo de profesoras y profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana, de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, nos propusimos crear un evento dirigido a estudiantes de licenciatura que tuviese el fin de fomentar el interés por cultivar y desarrollar las Matemáticas Discretas. Así surge el Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD).

Este es un taller de introducción a la investigación, que se realiza durante el periodo intertrimestral (para dar la oportunidad a los estudiantes de la UAM de asistir) y está dirigido a estudiantes de Matemáticas, Computación y disciplinas afines.

La primera edición del taller tuvo lugar en 2017, en la Casa de la Primera Imprenta en América. También se ha realizado en la Casa Rafael Galván y en Mineral del Chico, en Hidalgo. A lo largo de las cinco ediciones del TOMMAD, más de veinticinco profesores de distintas universidades del país han participado en él, impartiendo pláticas de investigación y divulgación, dirigiendo talleres de investigación y ofreciendo cursos en temas específicos.

La compilación de artículos que se presenta a continuación es el trabajo realizado durante los TOMMAD de 2024 y 2025, que se llevaron a cabo en Mineral del Chico, Hidalgo y en Ixtapan de la Sal, Estado de México, respectivamente, y son el fruto del trabajo colaborativo y del entusiasmo de nuestras y nuestros estudiantes y profesores participantes en este taller. Además de ser una fuente de conocimiento para estudiantes y académicos, esperamos que también inspire nuevas investigaciones y la participación y desarrollo de más talleres de investigación.

Agradecemos a todas las y todos los estudiantes y profesores que han participado en el TOMMAD y han contribuido a su desarrollo y a la realización de esta compilación. Su dedicación y entusiasmo son la base y motivación de este proyecto y estamos orgullosos de presentar los resultados en esta colección:

- *Coloraciones localizadoras*, de Narda Cordero-Michel y Diego González-Moreno.
- *Conjuntos de visibilidad mutua*, de Ilán A. Goldfeder, Nahid Yelene Javier Nol, Luis Josías López Barrios, Aldo Lozano Piña, Miryam Sophie Naomi Mielke Méndez y Raúl Vélez Limón.
- *Destruyendo gráficas*, de Juan Carlos García Altamirano.
- *Un modelo de propagación de VIH en una población*, Claudia Marlene de la Cruz, Julián Fresán-Figueroa, Bruno Graf-Romero, María Fernanda Pérez-Sánchez, Nancy Valeria Prado Martínez, Pablo César Sánchez-Silva.
- *Gráficas de re-coloración: ¿puedes transformar una coloración en otra sin romper las reglas?*, de Romina Barcena Morales, Emilio Yedidia Licea Mesino, David Dan López Contreras, Mika Olsen, Lizzeth Ariadna Sánchez Solis.

Comité organizador:

Julián Alberto Fresán Figueroa
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Diego Antonio González Moreno
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx

Ilán A. Goldfeder
e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

Nahid Yelene Javier Nol
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Mika Olsen
e-mail: olsen@cua.uam.mx

MIXBA' AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 235-242.
Recibido 30-05-2025. Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/nardie



COLORACIONES LOCALIZADORAS EN GRÁFICAS

NARDA CORDERO-MICHEL, DIEGO GONZÁLEZ-MORENO

RESUMEN. Las coloraciones localizadoras surgen de la combinación de dos nociones muy estudiadas en teoría de las gráficas: las coloraciones propias y los conjuntos localizadores. En una coloración localizadora, además de requerirse que vértices adyacentes reciban colores distintos, se pide que cada vértice sea identificable de manera única a partir de su vector de distancias a las clases cromáticas. Este artículo presenta una introducción accesible a este concepto. Se discuten ejemplos, propiedades básicas y algunas cotas del número cromático localizador, con el objetivo de ilustrar el interés teórico de esta noción.

1. INTRODUCCIÓN

Este texto aborda el estudio de las **coloraciones localizadoras**, un concepto que combina dos nociones de la teoría de las gráficas. Por un lado, la **coloración propia** de vértices, en la que se asignan colores a los vértices de una gráfica de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos. Por otro lado, los **conjuntos localizadores** (también conocidos como 'resolving sets'), que permiten distinguir los vértices de una gráfica a partir de sus distancias a un subconjunto fijo de vértices.

La idea es la siguiente: se busca una manera de colorear propiamente los vértices de una gráfica, de modo que cada vértice tenga una "huella digital" única. Esta huella está determinada por sus distancias a cada clase de color y recibe el nombre de **código de color**. Si ningún par de vértices comparte el mismo código, entonces es posible identificar unívocamente cualquier vértice a partir de sus distancias a los distintos colores.

Esta forma de codificación basada en colores y distancias resulta útil en diversas aplicaciones. Por ejemplo:

- En el *diagnóstico de redes*, nos permite detectar la ubicación de una falla a partir de señales recolectadas en distintos puntos.
- En el *diseño de etiquetas* o sistemas de localización, facilita distinguir ubicaciones de manera eficiente.
- En contextos como la *robótica* o la *navegación autónoma*, ayuda a que un agente determine su posición sin GPS, solo midiendo distancias a ciertos puntos de referencia.

Considera una gráfica G. Una **k-coloración propia** de los vértices de G es una función $\Gamma : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ tal que, si dos vértices u y v son adyacentes, es decir, $uv \in E(G)$, entonces $\Gamma(u) \neq \Gamma(v)$. En otras palabras, se asignan colores a los vértices de modo que los vértices adyacentes reciban colores distintos. Al mínimo número de colores para los cuales G admite una coloración propia, se le conoce como el **número cromático** de G y se denota por $\chi(G)$. En una coloración, a cada color $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ le corresponde una **clase cromática** $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, que consiste en el conjunto de vértices que reciben el color i. Diremos que una clase cromática es *singular* si contiene exactamente un vértice.

Dada una coloración Γ, podemos medir qué tan cerca está un vértice $v \in V(G)$ de cada clase cromática. Para ello, definimos la **distancia** de un vértice v a un conjunto $S \subseteq V(G)$ como

$$d(v, S) = \min\{d(v, u) : u \in S\},$$

donde $d(v, u)$ denota la distancia entre vértices en la gráfica.

Si tomamos una ordenación de las clases cromáticas $(C_1, C_2, \dots, C_k)$, podemos asociar a cada vértice v un vector de distancias a dichas clases. A este vector lo llamamos el **código de**

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 20F65.
Palabras clave. Gráficas, Coloraciones localizadoras.

color de v, y lo denotamos por

$$c_\Gamma(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)).$$

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** de G si Γ es una coloración propia y, para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, se cumple que $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$.

Obsérvese que una coloración en la que cada vértice recibe un color distinto es una coloración localizadora, por lo cual siempre se puede dar una coloración localizadora a una gráfica, sin embargo, es de interés encontrar coloraciones localizadoras que utilicen un número menor de colores. El **número cromático localizador** de una gráfica G, denotado por $\chi_L(G)$, se define como el mínimo número de colores para los cuales se puede dar una coloración localizadora de G.

En la figura 1 se muestra una coloración localizadora del ciclo de longitud 6 que utiliza el menor número posible de colores.

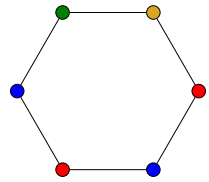


FIGURA 1. Una coloración localizadora de C_6 con 4 colores

Las coloraciones localizadoras fueron introducidas por Chartrand *et al.* [5] como una generalización del concepto de dimensión métrica en gráficas.

Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se presentarán las definiciones de las nociones y los conceptos que se abordarán en este texto, en las sección 3 se demostrarán algunos resultados generales sobre el número cromático localizador y, en la sección 4, se encontrará el número cromático localizador para dos familias de gráficas.

2. DEFINICIONES BÁSICAS

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple, conexa y no dirigida, donde $V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas, es decir, pares no ordenados de vértices adyacentes. El **orden** de G es el número de vértices que contiene, denotado por $|V(G)|$, mientras que el **tamaño** de G es el número de aristas, denotado por $|E(G)|$.

Una **subgráfica** de G es una gráfica $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $E(H)$ contiene todas las aristas de G cuyos extremos están en $V(H)$, entonces H se llama una **subgráfica inducida** de G.

Una **trayectoria** de longitud r en G es una sucesión de vértices distintos $(v_0, v_1, \dots, v_r)$ tal que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i = 1, \dots, r$. La **distancia** entre dos vértices u y v de G, denotada por $d(u, v)$, es la mínima de las longitudes de las trayectorias que los unen. A una trayectoria de u a v de longitud $d(u, v)$ se le llama uv**-geodésica**. El **diámetro** de una gráfica G, denotado por diám(G), es la mayor distancia entre pares de vértices de G:

$$\text{diám}(G) = \text{máx}\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

Dada una coloración $\Gamma : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ y una clase cromática $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, definimos la **distancia de un vértice** v **al conjunto** C_i como

$$d(v, C_i) = \text{mín}\{d(v, u) : u \in C_i\}.$$

A cada vértice $v \in V(G)$ se le asocia el **código de color**

$$c_\Gamma(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

donde $(C_1, C_2, \dots, C_k)$ es el orden fijado de las clases cromáticas.

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** si $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$ para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$.

El **número cromático localizador** de G, denotado por $\chi_L(G)$, es el mínimo número de colores que se requieren en una coloración localizadora de G. Dado que la coloración que asigna a cada vértice un color distinto es localizadora, es inmediato que $\chi_L(G) \leq |V(G)|$.

3. Resultados

En esta sección se presentan algunas propiedades básicas del número cromático localizador, así como cotas generales y resultados que permiten acotarlo en distintas clases de gráficas. Encontrar el valor exacto de $\chi_L(G)$ puede ser muy difícil, por esto, resulta útil establecer cotas, ejemplos representativos y construcciones que nos permitan comprender mejor su comportamiento.

Como las coloraciones localizadoras son, en particular, coloraciones propias, se tiene que

$$\chi(G) \leq \chi_L(G),$$

para toda gráfica G.

También es posible establecer una cota superior en términos del orden y de una subgráfica inducida de G.

Teorema 1. *Sea G una gráfica de orden n y sea H una subgráfica inducida de G. Entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - |V(H)| + \chi_L(H).$$

Demostración. Sea G una gráfica de orden n, y H una subgráfica inducida de G. Consideremos una coloración localizadora de H con $\chi_L(H)$ colores, a la cual denotaremos con φ. Ahora, definimos la coloración Γ de $V(G)$ como sigue:

$$\Gamma(v) = \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \in V(H), \\ \text{un color nuevo y singular} & \text{si } v \in V(G) \setminus V(H). \end{cases}$$

Se puede ver que Γ utiliza $n-|V(H)|+\chi_L(H)$ colores. Veamos ahora que Γ es un coloración localizadora de $V(G)$.

Supongamos por contradicción que hay dos vértices u y v que tienen el mismo código de color, es decir,

$$c_\Gamma(v) = c_\Gamma(u).$$

Como los colores de los vértices en $G - H$ son singulares, entonces necesariamente $u, v \in H$. Pero la coloración de H es localizadora, por lo que $c_\varphi(u) \neq c_\varphi(v)$. Como Γ coincide con φ en H, se sigue que $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$, lo cual contradice la suposición. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora de $V(G)$. □

Otra cota superior para el número cromático localizador puede darse en términos del diámetro y el orden de la gráfica.

Teorema 2. *Sea G un gráfica de orden n y diámetro d, entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - d + 2.$$

Demostración. Sea G una gráfica con n vértices y diámetro d. Sean $u, v \in V(G)$ tales que $d(u, v) = d$ y sea $T = (u = v_1, v_2, \ldots, v_{d+1} = v)$ una uv-geodésica. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}, v_{d+2}, \ldots, v_n\}$. Definimos la siguiente coloración Γ. Dado $v_i \in V(G)$,

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par y } 2 \leq i \leq d+1, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar y } 3 \leq i \leq d+1, \\ i & \text{si } i \in \{d+2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Obsérvese que Γ es una coloración propia y localizadora. □

Teorema 3. *Sea G una gráfica conexa de orden n y diámetro d y $\chi_L(G) = 3$. Entonces,*

$$n \leq 6(d-1) + 3.$$

Demostración. Sea G una gráfica como en la hipótesis. Sea Γ una coloración localizadora con 3 colores y sean C_1, C_2 y C_3 las clases cromáticas de Γ. Obsérvese que para todo $v \in V(G)$, el código de color de v tiene exactamente 3 entradas de las cuales exactamente una es 0, hay al menos un 1 y cada entrada vale a los más d.

Sea $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Procedemos por casos:

Caso 1. Existen dos entradas con valor 1 en $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Nótese que hay tres vectores que cumplen la condición.

Caso 2. Hay exactamente una entrada con valor 1. En este caso, la entrada restante x puede tomar los valores $\{2, \dots, d\}$. Por cada $x \in \{2, \dots, d\}$ hay $3! = 6$ vectores distintos. En total hay $6(d-1)$ vectores con exactamente un 1.

Uniendo ambos casos, tenemos que en total hay $6(d-1)+3$ vectores diferentes. Por lo cual, hay a los más $6(d-1)+3$ vértices, lo cual concluye la prueba.

4. Número cromático localizador de dos familias de gráficas

Como ya se mencionó, encontrar el número cromático localizador para una gráfica dada G es una tarea difícil. Sin embargo hay algunas familias de gráficas para las cuales es posible determinar este número. El procedimiento tiene dos etapas: la primera y más sencilla, es encontrar una coloración localizadora con el número propuesto de colores, digamos k colores, lo cual nos dice que k colores son suficientes para dar una coloración localizadora de G, es decir, obtenemos una cota superior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \leq k$); La segunda etapa y más laboriosa consiste en demostrar que ninguna coloración propia de G con $k-1$ colores (o menos) es localizadora, es decir, obtenemos una cota inferior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \geq k$).

Empezaremos por encontrar el número cromático localizador de una gráfica particular, la gráfica de Petersen, y después veremos cómo es ese número para dos familias de gráficas: las trayectorias y los ciclos.

Teorema 4. *Si P es la gráfica de Petersen, entonces*

$$\chi_L(P) = 4.$$

Demostración. Primero veamos que $\chi_L(P) \leq 4$.

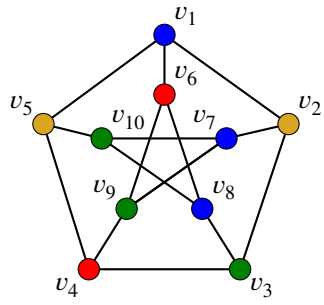


Figura 2. Una coloración localizadora de la gráfica de Petersen con 4 colores

Observa que, de acuerdo a la coloración Γ de P de la figura 2 y el orden de colores $(C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet)$, el código de color de cada vértice es diferente:

- Los vértices azules tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_1) = (0,1,2,1)$, $c_\Gamma(v_7) = (0,2,1,1)$ y $C_\Gamma(v_8) = (0,1,1,2)$.
- Los vértices rojos tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_4) = (2,0,1,1)$ y $c_\Gamma(v_6) = (1,0,1,2)$.
- Los vértices verdes tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_3) = (1,1,0,1)$, $c_\Gamma(v_9) = (1,1,0,2)$ y $c_\Gamma(v_{10}) = (1,2,0,1)$.
- Los vértices amarillos tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_2) = (1,2,1,0)$ y $c_\Gamma(v_5) = (1,1,1,0)$.

Todos los códigos de color son distintos, por lo cual $\chi_L(P) \leq 4$. Para ver que la gráfica de Petersen no se puede colorear con tres colores utilizamos el teorema 3. Como P tiene diámetro 2, si $\chi_L(P) = 3$, entonces $|V(P)| \leq 6(2-1)+3 = 9$, lo cual es una contradicción. □

TEOREMA 5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces $\chi_L(T_n) = 3$.*

Demostración. Sea $n \geq 3$ y consideremos la trayectoria $T_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Primero veamos que $\chi_L(T_n) \leq 3$, para ello consideremos la coloración localizadora con tres colores, $\Gamma : V(T_n) \to \{1,2,3\}$, dada por:

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par}, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

La entrada correspondiente al color 1 de $c_\Gamma(v_i)$ es igual a $d(v_i, C_1) = d(v_i, v_1) = i - 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la cual es diferente para cada vértice de la trayectoria. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora. De donde, $\chi_L(G) \leq 3$.

Ahora probemos que $\chi_L(T_n) \geq 3$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora φ con dos colores, digamos rojo y azul. Como φ es propia, entonces si v_1 tiene color rojo, se sigue que $\varphi(v_i)$ es rojo si y sólo si i es impar y $\varphi(v_i)$ es azul si y sólo si i es par. Entonces, obsérvese que $c_\varphi(v_i) = (1,0)$ para todo i par y $c_\varphi(v_i) = (0,1)$ para todo i impar. En ese caso, T_n tiene a lo más dos vértices, lo cual contradice la hipótesis $n \geq 3$. Por lo tanto, $\chi_L G \geq 3$ y, así, $\chi_L(G) = 3$.

□



FIGURA 3. Una coloración localizadora de T_9 con 3 colores

TEOREMA 6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces*

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3 & \textit{si } n \textit{ es impar}, \\ 4 & \textit{si } n \textit{ es par}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \geq 3$ un número natural. Supongamos que $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Procedemos por casos.

Caso 1. Si n es impar, tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (a)):

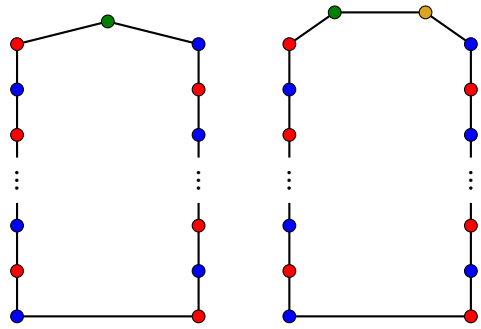
$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par}, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3) = (C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet)$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1. Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i - 1$ para $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $d(v_i, C_1) = n + 1 - i$ para $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n$. Por lo cual, dos vértices que tengan el mismo color tienen código de color diferentes pues difieren en la primera entrada.

Además, si los códigos de color de dos vértices distintos tienen su primera entrada igual, digamos los correspondientes a v_i y v_j con $2 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$. De donde se tiene que $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $\frac{n+1}{2} \leq j \leq n$, por lo cual $i - 1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n + 1 - j$. De este modo, $n + 2 = i + j$, por lo cual i y j tienen distinta paridad ya que $n + 2$ es impar. Así, v_i y v_j tienen colores distintos, por lo que sus códigos de color difieren.

Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y, así, $\chi_L(C_n) \leq 3$ si n es impar. Notemos, además, que como $\chi_L(C_n) \geq \chi(C_n)$ y $\chi(C_n) = 3$ cuando n es impar, se tiene que $\chi_L(C_n) = 3$ cuando n es impar.



(a) Ciclo impar (b) Ciclo par

FIGURA 4. Coloración distinguida de un ciclo

Caso 2. Si n es par. Tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (b)):

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i = 2, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3, \\ 4 & \text{si } i \text{ es par e } i \geq 4. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet})$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1 y el único vértice cuya segunda entrada es cero es el vértice v_2. Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i - 1$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_1) = n + 1 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$, y la segunda entrada es $d(v_i, C_2) = i - 2$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_2) = n + 2 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$.

De lo anterior, si los códigos de color de dos vértices distintos son iguales, digamos los correspondientes a v_i y v_j con $3 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$ y $d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2)$. Así, $3 \leq i \leq \frac{n}{2}+1$ y $\frac{n}{2}+2 \leq j \leq n$, por lo cual $i-1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n+1-j$ e $i-2 = d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2) = n+2-j$. De este modo, se tiene que $n+2 = i+j$ y $n+4 = i+j$, lo cual es imposible. Es decir, no hay dos vértices que tengan el mismo código de color. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y $\chi_L(C_n) \leq 4$ si n es par.

Veamos ahora que $\chi_L(C_n) \geq 4$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora $\Gamma \colon V(C_n) \to \{1, 2, 3\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática C_i con al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_1 = |C_1| \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Consideremos $C_1 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n_1}}\}$ donde $i_j < i_{j+1}$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$ y sean T_j la trayectoria contenida en C_n que inicia en v_{i_j} y termina en $v_{i_{j+1}}$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, y T_{n_1} trayectoria contenida en C_n que inicia en $v_{i_{n-1}}$ y termina en v_{i_1}. Tenemos entonces que $l(T_j) \geq 2$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ pues no hay dos vértices consecutivos en C_n que tengan el mismo color. Además, sólo los vértices extremos de T_j tienen color 1, por lo que los vértices interiores deben estar coloreados con los colores 2 y 3, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$.

Si para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, la trayectoria T_j tiene longitud mayor que 2, entonces el código de color del segundo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. De igual manera, el código de color del penúltimo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. Dado que Γ es localizadora, tendríamos que uno de esos vértices es de color 2 y el otro de color 3, y que T_j tiene longitud impar. Además, ninguna otra trayectoria T_l puede tener longitud $l(T_l) \geq 3$ pues, con el mismo razonamiento, habría otro vértice con el código de color $(1, 0, 1)$ o el código de color $(1, 1, 0)$, lo cual contradice que Γ sea localizadora.

Así, $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ con $l \neq j$. Como C_n es un ciclo par y $l(C_n) = \sum_{l=1}^{n_1} l(T_l) = 2(n_1 - 1) + l(T_j)$, se sigue que $l(T_j)$ debe de ser par, de donde, $l(T_j)$ no puede ser mayor que 2, es decir $l(T_j) = 2$.

Dado que $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, tenemos que $|C_1| = \frac{n}{2}$ y $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$ o $C_1 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Supongamos sin perder generalidad que $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$. Lo cual significa que $C_2 \cup C_3 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática C_i, $i \in \{2, 3\}$, con al menos $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_2 = |C_2| \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Como la distancia entre cualesquiera dos vértices en C_n es a lo más $\frac{n}{2}$, cualquier vértice en C_2 es adyacente a un vértice en C_1 y la distancia entre dos vértices con índice impar es par, se tiene que, para cada $v \in C_2$, $c_\Gamma(v) = (1, 0, a)$ donde a es un número par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$. Hay a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ de este estilo, por lo cual $|C_2| \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Dado que $\lceil \frac{n}{4} \rceil \leq |C_2| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, se sigue que n es un múltiplo de 4, $|C_2| = \frac{n}{4}$ y, también, $|C_3| = \frac{n}{4}$.

Observemos que los códigos de color de los vértices en C_2 son todos los vectores de la forma $(1, 0, a)$ donde a es par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$, los códigos de color de los vértices en C_3 son todos los vectores de la forma $(1, b, 0)$ donde b es par y $2 \leq b \leq \frac{n}{2}$. De modo que hay un vértice de color 2 y un vértice de color 3 que están a distancia 2, digamos $\alpha(v_1) = 2$ y $\alpha(v_3) = 3$. Entonces $\alpha(v_5) = 3$ pues si $\alpha(v_5) = 2$, entonces su código de color es $c_\Gamma(v_5) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$, lo cual es imposible. Siguiendo este razonamiento $\alpha(v_i) = 3$ para cada i impar con $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$, que son $\frac{n}{4} = |C_3|$ vértices. Necesariamente, $\alpha(v_{\frac{n}{2}+3}) = 2$ lo cual implica que $c_\Gamma(v_{\frac{n}{2}+3}) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$. Lo que contradice la hipótesis de que Γ sea una coloración localizadora. Por lo tanto, $\chi_L(C_n) \geq 4$ cuando n es par, lo cual concluye la prueba.

□

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a todas las instituciones que apoyaron la organización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD) 2025. Particularmente a la Sociedad Matemática Mexicana, a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. También agradecemos a Haniel Lamas, Brisa Guerrero Rosales, Raúl Arturo Gaytán Ruiz y Luis Macip Hernández, participantes del taller, con quienes se trabajaron los resultados aquí plasmados.

REFERENCIAS

[1] Albertson, M. O., K.L. Collins, K. L. *Symmetry Breaking in Graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 3, no. 1, R18, 1996. doi:10.37236/1242.

[2] Chan, M. *The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers*, Discrete Mathematics, vol. 308, no. 11, pp. 2330-2336, 2008. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.056

[3] Chartrand, G., L. Lesniak, L., Zhang, P. *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 6th ed., Boca Raton, FL, 2016.

[4] Rubin, F. Problem 729: The Blind Man's Keys, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, p. 128, 1979. Solution in vol. 12, 1980. As cited by Albertson & Collins (1996).

[5] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. *The locating-chromatic number of a graph*. Bull. Inst. Comb. Appl. 2002, 36, 89–101.

Narda Cordero-Michel
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: narda@ciencias.unam.mx, narda.cordero@cua.uam.mx

Diego González-Moreno
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 243-254.
Recibido . Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/Inlamr

CONJUNTOS DE VISIBILIDAD MUTUA

ILÁN A. GOLDFEDER, NAHID YELENE JAVIER NOL, LUIS JOSÍAS LÓPEZ BARRIOS, ALDO LOZANO PIÑA, MIRYAM SOPHIE NAOMI MIELKE MÉNDEZ, RAÚL VÉLEZ LIMÓN

Resumen. Dada una gráfica G, un subconjunto S de sus vértices es de visibilidad mutua si entre cualquier par de vértices del conjuntos S existe una trayectoria de longitud mínima que no contiene vértices de S, salvo por sus extremos. El número de visibilidad mutua es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad máximo. En este trabajo mostramos resultados al respecto en algunas familias de gráficas como son las trayectorias, árboles, ciclos, ruedas, k-partitas, rejillas y cilindros.

1. Introducción

Consideremos un conjunto de posiciones en las que podemos colocar dispositivos y en las que, entre algunas de ellas, existe una vía de comunicación directa. Un ejemplo de ello es la configuración de la figura 1. ¿Cuál es el número máximo de dispositivos que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos de ellos, exista una ruta mínima que les permita comunicarse? En particular, los puntos rojos de dicha figura representan el número máximo de dispositivos que se podrían ubicar en esta configuración cumpliendo la propiedad solicitada.

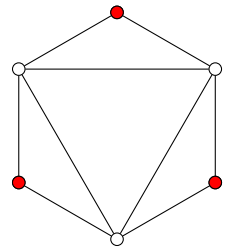


Figura 1. Configuración de posibles posiciones para dispositivos

Otro ejemplo relacionado es el siguiente. Consideremos un conjunto de localidades, como pueden ser ciudades y pueblos, algunas de ellas conectadas por carreteras. En ciertas locaciones se pueden colocar casetas de cobro de peaje; sin embargo, interesa evitar un número excesivo de ellas. ¿Cuál es el número máximo de casetas que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos locaciones, exista una ruta mínima que pase por *a lo más* dos casetas?

Los ejemplos anteriores constituyen problemas que se modelan en teoría de gráficas mediante los *conjuntos de visibilidad mutua*. A continuación, daremos las nociones básicas y presentaremos algunos resultados.

2. Definiciones básicas

Una *gráfica* es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío cuyos elementos son los *vértices* de la gráfica, y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices, que llamamos *aristas*. El *orden* de G es el número de vértices y el *tamaño* es el número de aristas.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C69, 05C12, 05C76, 05C38.
Palabras clave. Gráficas, rejillkas, visibilidad mutua.

Dados dos vértices $x, y \in V(G)$, diremos que x e y son *adyacentes* (o *vecinos*) si $\{x, y\} \in A(G)$. La *vecindad* de x se define como

$$N(x) = \{\, y \in V(G) \colon \{x, y\} \in A(G)\}.$$

El *grado* de x, denotado $\deg_G(x)$, es $|N(x)|$; el *grado mínimo* de G, $\delta(G) = \min_{z \in V(G)} \deg_G(z)$, y el *grado máximo*, $\Delta(G) = \max_{z \in V(G)} \deg_G(z)$. Si $|N(x)| = 1$, decimos que x es un *vértice hoja*.

Dados $x, y \in V(G)$, una *trayectoria* o (x, y)-trayectoria es una sucesión de vértices distintos

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_l),$$

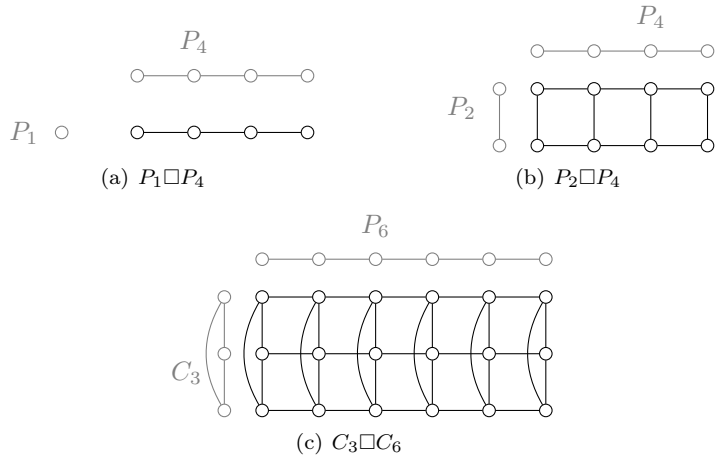
donde $x_1 = x$, $x_l = y$ y cada par de vértices consecutivos es adyacente. La *longitud* de P, denotada $l(P)$, es el número de aristas que contiene ($l(P) = l - 1$). Si P tiene orden n, escribiremos P_n. La *distancia* entre dos vértices x, y, denotada $d_G(x, y)$ o simplemente $d(x, y)$, es la longitud de una trayectoria de longitud mínima entre ellos. Un *ciclo* es una trayectoria $(x_1, \ldots, x_l)$ con $l \geq 3$ junto con la arista $\{x_l, x_1\}$. Una gráfica es *conexa* si entre cualquier de vértices x, y existe una (x, y)-trayectoria. Una *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos.

Dado $S \subseteq V(G)$, la *subgráfica inducida* $G[S]$ tiene como conjunto de vértices S y, para $x, y \in S$, $\{x, y\} \in A(G[S])$ si y sólo si $\{x, y\} \in A(G)$.

Una gráfica de orden n es *completa* si cualquier par de vértices es adyacente; la denotamos K_n. Decimos que G es *k-partita* si $V(G)$ se puede partir en conjuntos $V_1, \ldots, V_k$ tales que, para cada i, no hay aristas entre vértices de V_i. A cada uno de tales conjuntos se le llama una *parte* de la partición. Si $k = 2$, G es *bipartita*. Si además cada vértice de V_i es adyacente a todos los de V_j con $i \neq j$, decimos que es *k-partita completa*. Una gráfica se llama *multipartita* si es k-partita para algún $k \geq 2$.

El *producto cartesiano* $G \square H$ de dos gráficas G y H es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y en la que dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si $g_1 = g_2$ y $\{h_1, h_2\} \in A(H)$ o si $h_1 = h_2$ y $\{g_1, g_2\} \in A(G)$. Cuando no se preste a confusión al vértice (g_i, h_i) lo denotaremos como $g_i h_i$. A la gráfica $P_m \square P_n$ se le conoce como *malla* o *rejilla de m por n* y a la gráfica $C_m \square P_n$ se le conoce como *cilindro de m por n*.

Para ilustrar la definición de producto cartesiano de gráficas, mostramos los siguientes ejemplos. Consideremos $G_1 = P_1$ y $H_1 = P_4$ (véase la figura 2 (a)), y $G_2 = P_2$ y $H_2 = P_4$ (véase la figura 2 (b)). Obsérvese que $P_1 \square P_4$ coincide con P_4 y, en general, $P_1 \square P_m$ coincide con P_m. Consideremos $G_3 = C_3$ y $H_3 = P_6$ (véase la figura 2 (c)); en este caso, es el cilindro 3 por 6.



(a) $P_1 \square P_4$ (b) $P_2 \square P_4$ (c) $C_3 \square C_6$

FIGURA 2. Producto cartesiano de $P_1 \square P_4$, $P_2 \square P_4$ y $C_3 \square C_6$

Sean $G = (V(G), A(G))$ una gráfica y $S \subseteq V(G)$ un subconjunto de vértices de G. Diremos que dos vértices $x, y \in S$ son *mutuamente visibles* si existe una (x, y)-trayectoria de longitud mínima P tal que $V(P) \cap S = \{x, y\}$, cuando esto pasa diremos que los vértices x y y pueden *verse* entre sí. Diremos que S es un *conjunto de visibilidad mutua* si cada par de vértices en S es mutuamente visible. El *número de visibilidad mutua* de G, denotado $\mu(G)$, es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad mutua de orden máximo.

Para esclarecer las definiciones anteriores, considere la gráfica G que aparece en la figura 3 (a) y un subconjunto $S_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$. Los vértices v_1, v_3 y v_5 (véase la figura 3 (b)) son mutuamente visibles entre sí porque las trayectorias

$$(v_1, v_2, v_3), \quad (v_1, v_0, v_3) \quad \text{y} \quad (v_3, v_4, v_5)$$

son de longitud mínima y se tiene que $S_1 \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_3\}$, $S_1 \cap \{v_1, v_0, v_3\} = \{v_1, v_3\}$ y $S_1 \cap \{v_3, v_4, v_5\} = \{v_3, v_5\}$. Por tanto, S_1 es un conjunto de visibilidad mutua. ¿Será S_1 el conjunto de visibilidad mutua de mayor cardinalidad?

Ahora considere un conjunto $S_2 = \{v_0, v_2, v_4, v_6\}$. Los vértices v_0, v_2, v_4 y v_6 (véase la figura 3 (c)) son mutuamente visibles entre sí porque que las trayectorias

$$(v_0, v_1, v_2),\ (v_0, v_6),\ (v_0, v_5, v_4),\ (v_2, v_3, v_4),\ (v_2, v_6) \text{ y } (v_4, v_5, v_6)$$

son de longitud mínima y se tiene que $S_2 \cap \{v_0, v_1, v_2\} = \{v_0, v_2\}$, $S_2 \cap \{v_0, v_6\} = \{v_0, v_6\}$, $S_2 \cap \{v_0, v_5, v_4\} = \{v_0, v_4\}$, $S_2 \cap \{v_2, v_3, v_4\} = \{v_2, v_4\}$, $S_2 \cap \{v_2, v_6\} = \{v_2, v_6\}$ y $S_2 \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_6\}$. Por tanto, S_2 es un conjunto de visibilidad mutua de orden cuatro. Además, se puede probar que ningún conjunto con cinco o más vértices puede ser de visibilidad mutua. Por lo que, el número de visibilidad mutua de G es 4, es decir, $\mu(G) = 4$.

En nuestro ejemplo de las localidades y las casetas, podemos construir una gráfica en la que cada localidad sea un vértice y entre dos vértices hay una arista siempre que las localidades correspondientes haya una carretera (que no pasa por ninguna otra localidad). Observemos que si tenemos un conjunto de visibilidad mutua S en una gráfica G, entre cualesquiera dos vértices de la gráfica hay una trayectoria de longitud mínima que contiene a lo más dos vértices de S (pues si tuviese tres, los vértices de S más alejados en la trayectoria no serían de visibilidad mutua, véase el teorema 4). Por lo tanto, al poner casetas de cobro en un conjunto de visibilidad mutua de la gráfica de localidades y carreteras, entre cualesquiera dos localidades hay una trayectoria de longitud mínima que pasa por a lo más dos casetas de cobro.

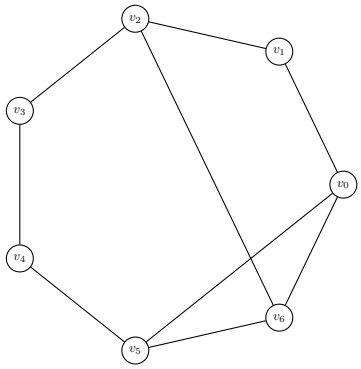
3. Primeros resultados

Teorema 1. *Sea G una gráfica con grado máximo $\Delta(G)$. Se satisface que $\mu(G) \geq \Delta(G)$.*

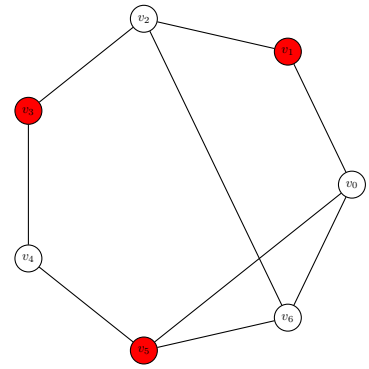
Demostración. Sea v un vértice de G tal que $\deg_G(v) = \Delta(G)$ y tómese el conjunto de vértices $S = N(v)$. Para cualquier par de vértices $x, y \in S$, ocurre que o bien son adyacentes o bien están a lo más a distancia dos mediante el camino $P = (x, v, y)$. Como v no está en S, en ambos casos los vértices x, y son mutuamente visibles; por lo tanto, S es un conjunto de visibilidad mutua. Así, $\mu(G) \geq \deg_G(v) = \Delta(G)$. □

Una consecuencia de este teorema es el caso de las ruedas (véase la figura 4), en las cuales el conjunto de visibilidad mutua máximo es el conjunto de todos sus vértices excepto el vértice central. Basta con fijarse en la prueba del teorema 1, y en una rueda tomar como conjunto de visibilidad mutua a la vecindad del vértice central, la cual tiene cardinalidad igual al grado máximo de la gráfica. Además, dicho conjunto es máximo, porque todos sus vértices están al menos a distancia dos de cualquier otro vértice, pasando por el vértice central.

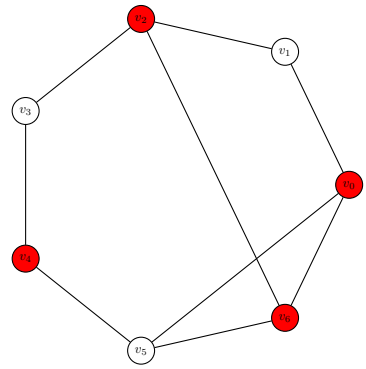
Corolario 2. *El número de visibilidad mutua de la rueda W_n, para $n \geq 4$, es $\mu(W_n) = \Delta(W_n)$.*



(a) Gráfica G



(b) $S_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$



(c) $S_2 = \{v_0, v_2, v_4, v_6\}$

FIGURA 3. Gráfica G y dos conjuntos de visibilidad mutua S_1 y S_2, $\mu(G) = 4$

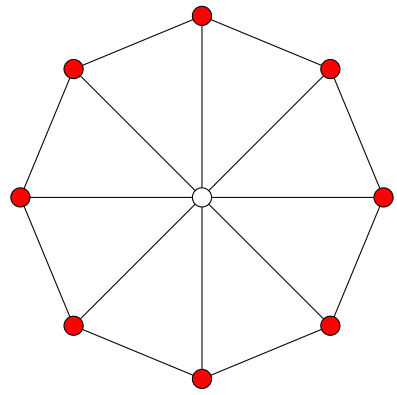


FIGURA 4. Conjunto máximo de visibilidad mutua en W_9

TEOREMA 3. *Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica conexa tal que $|V(G)| = n$. Entonces, $\mu(G) = n$ si y sólo si $G = K_n$, donde K_n es la gráfica completa de n vértices.*

Demostración. Primero probaremos la condición necesaria. Supongamos que $\mu(G) = n$. Por contradicción, supongamos que $G \neq K_n$, es decir, existen $u, v \in V(G)$ tales que $\{u, v\} \notin A(G)$. Esto implica que toda (u, v)-trayectoria de longitud mínima P tiene orden al menos tres. Sea $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_1 = u$ y $v_k = v$, una trayectoria de longitud mínima. Como $\mu(G) = n$, el conjunto $V(G)$ es el conjunto de visibilidad

mutua de G. Luego $|V(P)\cap V(G)| \geq 3$ lo cual contradice la definición de que $V(G)$ sea un conjunto de visibilidad mutua, pues P es cualquier trayectoria de longitud mínima. Por lo que $G = K_n$.

Ahora probaremos la condición suficiente. Supongamos que G es la gráfica completa de n vértices. Entonces, todos sus vértices son adyacentes entre sí, y la trayectoria de mínima longitud entre cualquier par es de longitud uno. Por lo tanto, todos los vértices de G son mutuamente visibles, y $\mu(G) = n$. □

TEOREMA 4. *El número de visibilidad mutua de la trayectoria P_n, $n \geq 2$, es $\mu(P_n) = 2$.*

Demostración. Sea $P_n = (x_1, \ldots, x_n)$ una (x, y)-trayectoria, donde $x_1 = x$ y $x_n = y$. Claramente, $S = \{x, y\}$ es un conjunto de visibilidad mutua. Para demostrar que es máximo, procederemos por contradicción, supongamos que existen al menos tres vértices x_i, x_j, x_k en P_n que son mutuamente visibles. Sin pérdida de generalidad, sea $i < j < k$. Entonces, x_j se encuentra en la trayectoria mínima entre x_i y x_k, por lo que $V(P)\cap\{x_i, x_j, x_k\} = \{x_i, x_j, x_k\}$, y no cumple la condición de visibilidad mutua. Esto prueba que no puede haber más de dos vértices mutuamente visibles en la trayectoria. Por lo tanto, $\mu(P_n) = 2$. □

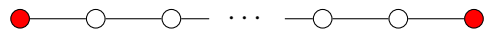


FIGURA 5. Conjunto máximo de visibilidad mutua en P_n

TEOREMA 5. *El número de visibilidad mutua del ciclo C_n, con $n \geq 3$, es $\mu(C_n) = 3$.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $\mu(C_n) > 3$. Se sigue que un conjunto máximo de visibilidad mutua S de C_n tiene al menos cuatro vértices, digamos v_1, v_2, v_3, v_4 y supongamos, sin pérdida de generalidad, que aparecen en ese orden en el ciclo. Observemos que entre v_1 y v_3 hay exactamente dos trayectorias, una pasa por v_2 y la otra pasa por v_4. Así, no pueden ser vértices mutuamente visibles. Por lo tanto, $\mu(C_n) \leq 3$.

Para probar que $\mu(C_n) = 3$, basta con tomar los vértices $v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$, $v_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1}$, v_{n-1} como el conjunto de vértices de visibilidad mutua (véase la figura 6). □

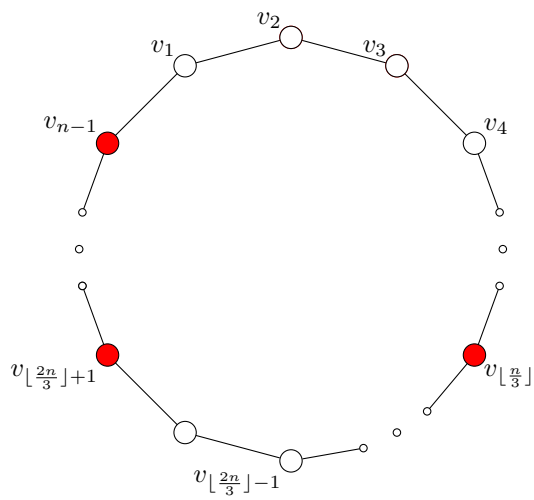


FIGURA 6. Conjunto máximo de visibilidad mutua en C_n

TEOREMA 6. *Sea G la gráfica bipartita completa $K_{i,n}$, con $n \geq 3$ e $i \in \{1,2\}$. El número de visibilidad mutua de G es $\mu(G) = n + i - 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica como en las hipótesis. Primero notemos que $|V(G)| = n + i$, con $i \in \{1,2\}$.

Primero supongamos que $i = 1$, por el teorema 3 se tiene que $\mu(G) \leq n + i - 1$ y por el teorema 1 se tiene que $\mu(G) \geq \Delta(G) = n + i - 1$. Por lo tanto, $\mu(G) = n + i - 1$.

Ahora supongamos que $i = 2$. Al igual que en el caso previo, tenemos por el teorema 3 que $\mu(G) \leq n + i - 1$. Sea $V_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y $V_2 = \{u, v\}$ la partición de la gráfica. Demostraremos que $S = V_1 \cup \{u\}$, que tiene cardinalidad $n + i - 1$, es un conjunto de visibilidad mutua. Para cualesquiera dos vértices w_i y w_j en V_1, se tiene que w_i, v, w_j es una trayectoria de longitud mínima tal que $S \cap \{w_i, v, w_j\} = \{w_i, w_j\}$ y para cualquier vértice w_i y u, se tiene $S \cap \{w_i, u\} = \{w_i, u\}$. Se sigue que S es un conjunto de visibilidad y, así, $\mu(G) \geq n + i - 1$. Por lo tanto, $\mu(G) = n + i - 1$.

Por lo que, el número de visibilidad mutua de la gráfica bipartita $K_{i,n}$, con $i \in \{1,2\}$, es $\mu(G) = n + i - 1$. □

El siguiente corolario es consecuencia del teorema 6, se sigue de que $S_{n+1} = K_{1,n}$ (véase la figura 7).

COROLARIO 7. *El número de visibilidad mutua de la estrella S_n, $n \geq 4$, es $\mu(S_n) = n - 1$.*

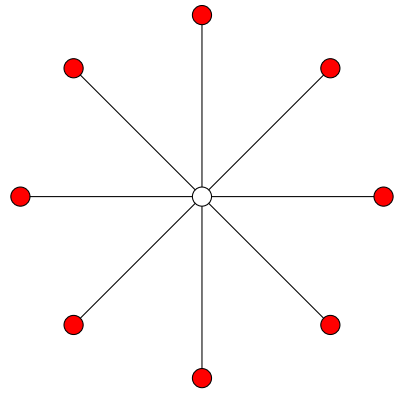


FIGURA 7. Conjunto máximo de visibilidad mutua en S_9

PROPOSICIÓN 8. *Cualquier trayectoria de una gráfica G está contenida en una trayectoria maximal.*

Demostración. Sean $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ una trayectoria en G. Si $\deg_G(v_0) = 1 = \deg_G(v_k)$, entonces P es maximal

En otro caso, tendríamos que $\deg_G(v_0) \geq 2$ o $\deg_G(v_k) \geq 2$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $\deg_G(v_k) \geq 2$. Así, existe un vértice $v_q \in N(v_k) \setminus \{v_{k-1}\}$, por lo que $P^q = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_q)$ es una trayectoria estrictamente más larga que contiene a P como subtrayectoria.

Repitiendo este procedimiento, y como la gráfica es finita, se obtiene una trayectoria P' que contiene a P como subtrayectoria y que es maximal. □

El siguiente es un resultado conocido sobre árboles.

PROPOSICIÓN 9 ([1]). *En un árbol T, para todo par de vértices $v_i, v_k \in V(T)$ existe una única trayectoria $P = (v_i, \ldots, v_k)$.*

COROLARIO 10. *Sea T un árbol. Dada una trayectoria $P = (v_x, \ldots, v_y)$ en T con v_x y v_y hojas de T, todo vértice de P distinto de v_x y v_y no es hoja.*

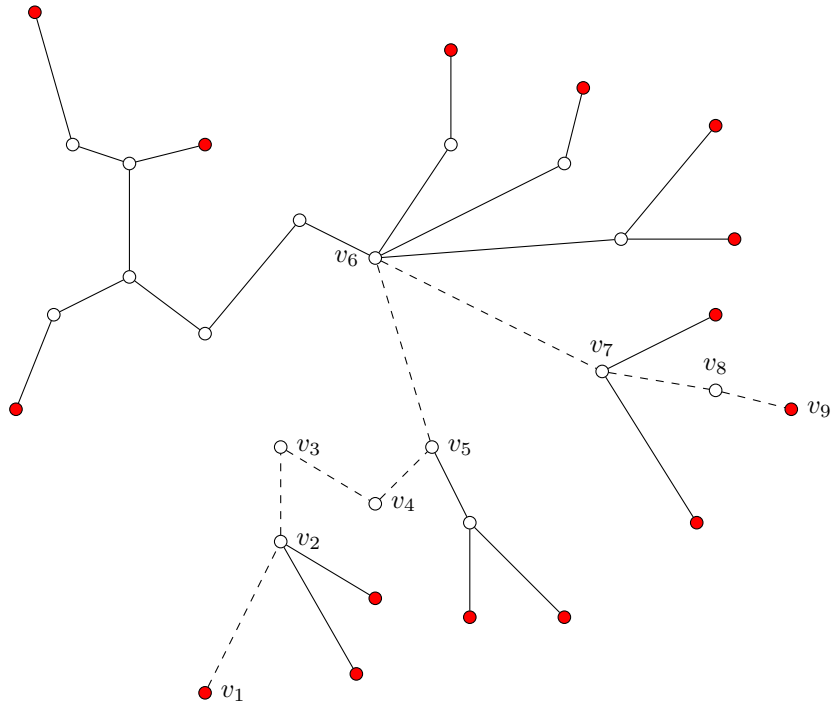


FIGURA 8. La trayectoria $P = (v_1, v_2, \ldots, v_9)$ que tiene como extremos las hojas v_1, v_9 es única y cualquier vértice interno no es una hoja

TEOREMA 11. *El número de visibilidad mutua de un árbol T es igual a su número total de hojas; es decir, $\mu(T) = |L(T)|$, donde $L(T)$ es el conjunto de hojas del árbol T.*

Demostración. Primero demostraremos que $\mu(T) \leq |L(T)|$. Por contradicción, supongamos que $\mu(T) > |L(T)|$. Entonces, existe un vértice $v_a \in V(T)$ que no es hoja y que está en el conjunto de vértices de visibilidad mutua. Tomemos una trayectoria $P = (v_1, v_2, \ldots, v_a)$ donde $v_1 \in L(T)$. Por la proposición 8, se tiene que P está contenida en una trayectoria $P^z = (v_1, v_2, \ldots, v_a, \ldots, v_z)$, donde $v_1, v_z \in L(T)$. Pero como la trayectoria entre v_1 y v_z es única, tendríamos que $V(P) \cap L(T) = \{v_1, v_a, v_z\}$ lo cuál es una contradicción, pues toda trayecyoria contiene a dos vértices de visibilidad mutua. Por lo tanto, $\mu(T) \leq |L(T)|$.

Ahora demostraremos que $|L(T)| \leq \mu(T)$. Sean cualesquiera $v_x, v_y \in L(T)$ con $v_x \neq v_y$. Por la proposición 9, tomamos la trayectoria $P^* = (v_x, \ldots, v_y)$. Además, por el corolario 10, para todo $v_k \in V(P^*) \setminus \{v_x, v_y\}$, se tiene que v_k no pertenece al conjunto de visibilidad mutua de T. Así, toda trayectoria mínima entre hojas está libre de intersección con otras hojas, por lo que $L(T)$ es un conjunto de visibilidad mutua. Por la maximalidad, $|L(T)| \leq \mu(T)$. Por lo tanto, $|L(T)| = \mu(T)$. □

Para ejemplificar el teorema 11, véase la figura 8.

TEOREMA 12. *Sea G la gráfica bipartita completa $K_{m,n}$, tal que $m, n \geq 3$. Entonces, el número de visibilidad mutua de G es $\mu(G) = m + n - 2$.*

Demostración. Primero, nótese que no todos los vértices pueden ser de visibilidad mutua. Esto se sigue del teorema 3, por lo que $\mu(G) \leq m + n - 1$.

Luego, supongamos que existe un único vértice v en G que no es de visibilidad mutua. Sin pérdida de generalidad, supongamos que v está en S_1, donde S_1, S_2 son los subconjuntos de vértices de $V(G)$ de cardinalidad m y n, respectivamente, y que S_2 es un conjunto de visibilidad mutua. Por hipótesis $m \geq 3$, entonces existen al menos otros

dos vértices $x, y \in S_1$ tales que no son adyacentes entre sí. Obsérvese que la trayectoria de longitud mínima entre x y y es $P = (x, w, y)$, donde w es cualquier vértice en S_2. Pero por hipótesis, w es un vértice de visibilidad mutua, lo cual contradice la definición, ya que w está en la trayectoria mínima entre x y y. El caso es análogo si v está en S_2.

Por lo tanto, debe haber al menos dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en S_1 y otro en S_2; esto es, $\mu(G) \leq n + m - 2$.

Para probar la desigualdad inversa, basta con tomar dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en cada subconjunto S_1 y S_2. Véase la figura 9. □

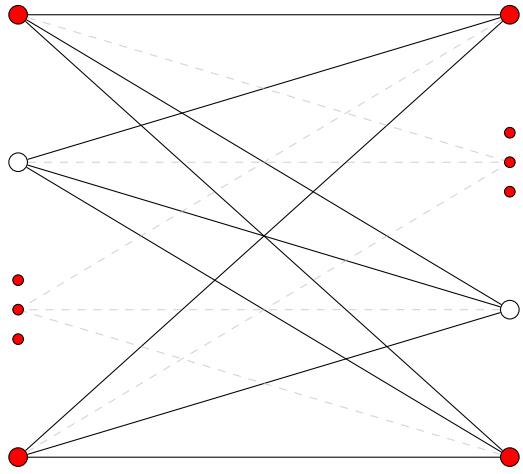


FIGURA 9. Conjunto máximo de visibilidad mutua en $K_{m,n}$

El teorema 13 es la generalización de los teoremas 6 y 12.

TEOREMA 13. *Sea G la gráfica k-partita completa $K_{S_1,S_2,\ldots,S_k}$. Se cumple que:*

1. *Si $|S_i| \geq 3$, para toda $1 \leq i \leq k$, entonces $\mu(G) = |V(G)| - 2$.*
2. *Si existe un $j \in [1, k]$ tal que $|S_j| \leq 2$, entonces $\mu(G) = |V(G)| - 1$.*

La demostración del teorema 13 es análoga a las demostraciones de los teoremas 6 y 12, respectivamente, basta con excluir del conjunto de visibilidad mutua a un vértice de cada conjunto de la partición (ver figura 10).

En rejillas $P_m \square P_n$, donde $m \leq 3$, nos encontramos con algunos casos particulares. Estos son:

1. $\mu(P_1 \square P_n) = 2$, con $n \geq 2$, pues en este caso la rejilla es una trayectoria, véase la figura 11.
2. Cuando $\min\{m, n\} = 2$, tenemos dos casos:
   a) $P_2 \square P_2$ es el ciclo C_4; por el teorema 5 se tiene que $\mu(P_2 \square P_2) = 3$, véase la figura 12 (a).
   b) $\mu(P_2 \square P_n) = 4$ con $n \geq 3$, véanse las figuras 12 (b) y (c).
3. Cuando $\min\{m, n\} = 3$, obtenemos dos casos, véase la figura 13:
   a) $\mu(P_3 \square P_3) = 5$, véase la figura 13 (a).
   b) $\mu(P_3 \square P_n) = 6$ con $n \geq 4$, véanse las figuras 13 (b) y (c).

Y para $m, n \geq 4$, podemos enunciar un caso general, véase figura 14.

TEOREMA 14. *Si $P_m \square P_n$ es una rejilla tal que $m > 3$ y $n > 3$ entonces*

$$\mu(P_m \square P_n) = 2 \cdot \min\{m, n\}.$$

Demostración. Consideremos las trayectorias $P_m = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ y $P_n = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$. Tomemos una trayectoria de la forma $(u_i v_0, u_i v_1, \ldots, u_i v_{n-1})$ en $P_m \square P_n$. Así, para cada $0 \leq i \leq m - 1$, tenemos que dicha trayectoria puede incluir a lo más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua; por lo

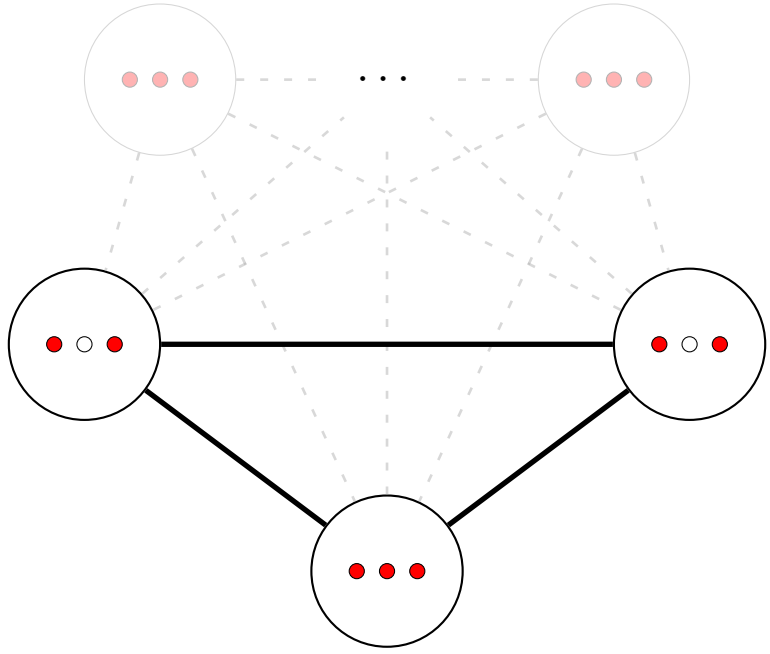


FIGURA 10. Conjunto máximo de visibilidad mutua en la gráfica k-partita completa



FIGURA 11. $\mu(P_1 \square P_2) = 2$ y $\mu(P_1 \square P_3) = 2$

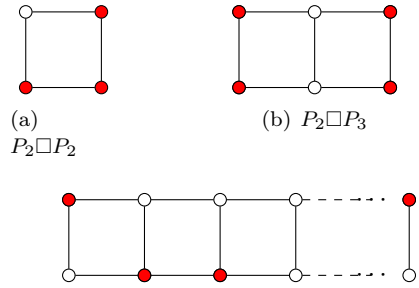


FIGURA 12. $P_2 \square P_2$, $P_2 \square P_3$ y $P_2 \square P_n$ y sus vértices de visibilidad mutua, los vértices en color rojo

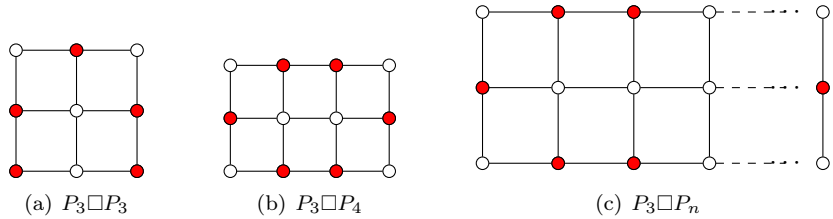


FIGURA 13. $P_3 \square P_3$, $P_3 \square P_4$ y$P_3 \square P_n$

que $\mu(P_m \square P_n) \leq 2m$. De igual manera, cada una de las trayectorias de la forma

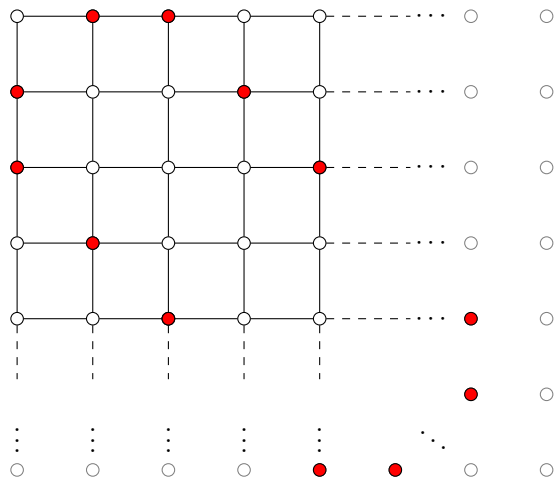


FIGURA 14. $P_m \square P_n$

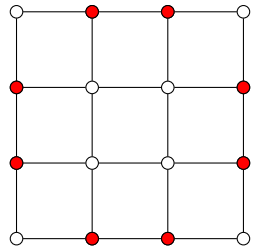


FIGURA 15. $P_4 \square P_4$

$(u_0v_j, u_1v_j, \ldots, u_{m-1}v_j)$, con $0 \leq j \leq n-1$, puede incluir a los más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua, así $\mu(P_m \square P_n) \leq 2n$.

Ahora, demostraremos que $\mu(P_m \square P_n) = 2\,\text{mín}\{m, n\}$. Tomemos $k = \text{mín}\{m, n\}$. Para $k = 4$, se puede considerar una subgráfica de la forma $P_4 \square P_4$, donde el único conjunto de visibilidad mutua máximo es:

$$\{u_0v_1, u_0v_2, u_1v_3, u_2v_3, u_3v_2, u_3v_1, u_2v_0, u_1v_0\}$$

(véase la figura 15). Así, $\mu(P_4 \square P_4) = 8$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m = 4$. Ya que hay dos vértices del conjunto de visibilidad mutua por cada trayectoria vertical u horizontal entonces $\mu(P_4 \square P_n) = 8 = 2\,\text{mín}\{4, n\}$.

Sea $k \geq 5$; consideremos la gráfica $P_k \square P_k$ y el conjunto de vértices

$$\{u_1v_0, u_2v_0, u_0v_1, u_3v_1, u_{j-2}v_j, u_{j+2}v_j\} \cup \{u_{k-4}v_{k-2}, u_{k-1}v_{k-2}, u_{k-3}v_{k-1}, u_{k-2}v_{k-1}\},$$

para $j \in \{2, \ldots, k-3\}$. Éste es conjunto de visibilidad mutua que tiene a lo más dos vértices de cada trayectoria, por lo que $\mu(P_m \square P_n) \geq 2\,\text{mín}\{m, n\}$. Así, $\mu(P_m \square P_n) = 2\,\text{mín}\{m, n\}$. □

Para el caso de los cilindros debemos considerar otros aspectos. Cada trayectoria vertical contiene a lo más dos vértices de un conjunto de visibilidad mutua y cada ciclo horizontal contiene a lo más tres vértices de un conjunto de visibilidad mutua. Obsérvese que el conjunto de visibilidad mutua de la figura 16 no parece tener simetrías evidentes, por lo que resulta más difícil demostrar que ese conjunto es máximo en el caso de los cilindros.

Por los teoremas 4 y 5 se tiene $\mu(P_s) = 2$ y $\mu(C_t) = 3$, para todo $t > s \geq 2$. Entonces:

TEOREMA 15. *Si* $s \geq 2$ *y* $t \geq 3$ *entonces* $\mu(P_s \square C_t) \leq \text{mín}\{3s, 2t\}$.

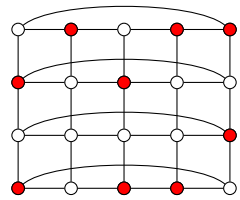


FIGURA 16. $P_4 \square C_5$

Demostración. Sea $(u_0v_i, u_1v_i, \ldots, u_{s-1}v_i)$ una trayectoria vertical contenida en el cilindro, con $0 \leq i \leq t-1$, entonces tiene a los más dos vértices del conjunto de visibilidad mutua. Como hay t trayectorias verticales en $P_s \square C_t$, se sigue que que $\mu(P_s \square C_t) \leq 2t$.

Ahora sea $(u_jv_0, u_jv_1, \ldots, u_jv_{t-1}, u_jv_0)$ un ciclo horizontal con $0 \leq j \leq s-1$, cada uno con a lo más tres vértices en el conjunto de visibilidad mutua. Ya que tenemos s ciclos, se sigue que $\mu(P_s \square C_t) \leq 3s$. Así, $\mu(P_s \square C_t) \leq \min\{2t, 3s\}$. □

TEOREMA 16. *Sean t, s y k enteros no negativos con $s > k$. Si M es un conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$, entonces M también es un conjunto de visibilidad mutua de $P_s \square C_t$.*

Demostración. Sea M el conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$ y supongamos que M no lo es en $P_s \square C_t$. Así, existen dos vértices $u, v \in M$ tales que toda trayectoria mínima entre ellos contiene al menos otro vértice de M. Pero como $s > k$, se tiene que $P_k \square C_t$ es una subgráfica de $P_s \square C_t$, por lo que $P_k \square C_t$ contiene tanto a u, v, y al menos otro vértice en M. Esto contradice que M sea un conjunto de visibilidad mutua en $P_k \square C_t$. Por lo tanto M no es conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$. □

AGRADECIMIENTOS. Las y los autores agradecen al Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas, llevado a cabo en mayo de 2025, por abrir los espacios que permitieron este trabajo de colaboración, en el que también participó el estudiante Raúl Arturo Gaytán Ruiz de la Unidad Cuajimalpa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

La organización del Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas fue posible gracias a los recursos aportados por las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

REFERENCIAS

[1] Chartrand, G., Zhang, P., *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, 2012.
[2] Korže, D., Vesel, A., *Mutual-visibility sets in Cartesian products of paths and cycles*, University of Maribor, Slovenia, 2023.

Ilán A. Goldfeder
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

Nahid Yelene Javier Nol
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Aldo Lozano Piña
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2252800438@xanum.uam.mx

Luis Josías López Barrios
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2203009967@izt.uam.mx

Raúl Vélez Limón
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2223045914@izt.uam.mx

Miryam S. N. Mielke Méndez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2193053291@izt.uam.mx

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas
Vol.16, No.1, páginas 255-267.
Recibido 30-05-2025. Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/jucgal

DESTRUYENDO GRÁFICAS

JUAN CARLOS GARCÍA ALTAMIRANO

Resumen. En este artículo, se expone un juego que se puede implementar sobre cualquier gráfica. Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente en el menor número de tiradas, bajo ciertas reglas que estimulan el razonamiento matemático y son acompañadas, en buena medida, por el azar, encarnado por un dado que dicta el *valor de ataque*.

Si bien la intención principal es proponer un juego didáctico y divertido, nacido en las entrañas de la teoría de gráficas, su implementación sugiere algunas preguntas teóricas interesantes, que incitan a realizar una investigación un poco más rigurosa.

Introducción

La teoría de gráficas tiene innumerables aplicaciones en diversas áreas del conocimiento y problemas de la vida cotidiana [1] y, a pesar de ser una disciplina relativamente reciente, posee un amplio acervo teórico. Por ello, es pertinente hacer divulgación científica matemática en donde se aborden temas correspondientes a esta asignatura para alentar a las nuevas generaciones de científicos a comprender y realizar investigaciones al respecto o incluso al público en general para que tenga una mejor noción de los temas que ahí se abordan.

La manera más didáctica y divertida de introducir a alguien al mundo de la teoría de gráficas es por medio de juegos en donde no sea absolutamente necesario conocer los conceptos fundamentales y jugar con ellos sin darse cuenta: jugar con *vértices y aristas* a través de "bolitas y palitos".

En este artículo se establecen las bases para implementar un juego sobre cualquier gráfica y se da un ejemplo concreto de cómo aplicarlo en la gráfica más famosa que existe: la gráfica de Petersen. El juego de "Destruyendo la gráfica de Petersen", descrito en la sección 4, es un juego por parejas; aunque con unas pequeñas modificaciones, se puede jugar con más integrantes o de manera individual. Es una herramienta eficiente para ser presentada en talleres de divulgación matemática, ya que, implícitamente, en él se trabajan conceptos como "gráficas", "digráficas", "algoritmos", "isomorfismos", "combinaciones", "probabilidad", entre otros. Además de ejercitar la toma de decisiones basadas en el análisis matemático, aunque estas dependan del azar.

En pocas palabras, el juego de "Destruyendo gráficas" consiste en lo siguiente: ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente, con valores de ataque determinados por un dado, en la menor cantidad de tiradas. Los detalles del juego se exponen en la sección 2.

Si quitamos al azar de la ecuación, una pregunta teórica natural es: dada una gráfica con una asignación de pesos a sus vértices establecida, ¿cuál es la menor cantidad de tiradas para destruir a esta gráfica si nosotros podemos decidir el valor de ataque en cada tirada? En su versión más sencilla, cuando los pesos son iguales a 1 para

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C20, 05C21, 05C22, 05C35, 05C57, 05C85.
Palabras clave. Gráficas, digráficas, algoritmos, automorfismos, combinaciones.

todos los vértices y el valor de ataque es $d = 2$, contestar esta pregunta es equivalente a encontrar un conjunto dominante independiente de orden mínimo [2, 3]; mientras que si el valor de ataque es una constante $d \geq 2$, el problema consiste en obtener un d-conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes de orden mínimo [4]; los cuales son problemas del tipo NP-completo [5], es decir, no se conoce ningún algoritmo que encuentre una solución en *tiempo polinomial*. El problema de dominación es uno de los temas más estudiados en teoría de gráficas por su interés teórico, así como por sus diversas aplicaciones en temas como redes de comunicación, logística y transporte, optimización de recursos, redes neuronales, entre muchos otros [6].

Este trabajo se divide en 5 secciones. Si el lector ya conoce los conceptos básicos de teoría de gráficas, bien puede omitir la sección 1. Por el contrario, si el lector quiere profundizar en algún concepto de los que están expuestos en dicha sección, puede consultar el siguiente libro [7], que es muy accesible. A alguien que solamente le interese saber cómo se juega y ver al juego en acción, se le invita a ver la subsección 2.1 y la sección 4 que son en donde se exponen las reglas del juego y se ve un ejemplo concreto, respectivamente. Aunque es recomendable revisar toda la sección 2, ya que ahí se encuentran los resultados principales de este artículo y el análisis de las posibles *estrategias ganadoras* que ahí se realiza, es lo que permite comprender la complejidad de este juego. Es importante mecionar que el ejemplo de la sección 4 fue desarrollado en el sexto Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD24), en colaboración con alumnos de la UAM-Cuajimalpa y UAM-Iztapalapa. En la sección 3, tomando en cuenta el análisis realizado en la sección 2, se sugieren las familias de gráficas más adecuadas para implementar el juego y, finalmente, en las conclusiones se plantean algunas posibles líneas de investigación.

1. Preliminares

Una **gráfica** G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto de elementos llamados **vértices** y $E(G)$ un conjunto de elementos llamados **aristas** que consiste de parejas *no ordenadas* de vértices. Una **gráfica simple** es una gráfica en la que pedimos que los vértices de una arista sean diferentes y que $E(G)$ no tenga aristas repetidas. La cantidad de vértices de una gráfica G es el **orden** de G y se denota por n. La cantidad de aristas de G se llama **tamaño** de G y se denota por m. Una gráfica es **nula** si su conjunto de vértices es vacío (por ende, también su conjunto de aristas). Una gráfica es **vacía** si $m = 0$ y es **trivial** si $n = 1$. Una gráfica simple es **finita** si su conjunto de vértices es finito. En este artículo, consideraremos únicamente gráficas simples finitas, así que para nosotros el término "gráfica" siempre significará gráfica simple y finita.

Cada arista $\{u, v\}$ de $E(G)$ es regularmente denotada como uv o vu. Si $e = uv$ es una arista, decimos que e une a u y v; en el mismo contexto, los vértices u y v son llamados **extremos** de la arista e. A los extremos de una arista se dice que son **incidentes** con la arista y viceversa. Dos vértices incidentes con la misma arista decimos que son **adyacentes** y dos vértices que son adyacentes son **vecinos**.

El **grado** de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas incidentes con v, es decir, en gráficas simples, el grado de v es el número de vecinos de v en G. Un vértice de grado cero es llamado **vértice aislado**. El máximo entre todos los grados de los vértices de G es llamado **grado máximo** de G. Análogamente, se define el **grado mínimo** de G. Si todos los vértices de una gráfica G tienen el mismo grado, entonces G es una **gráfica regular**. Si cada vértice de G tiene grado k, entonces G es **k-regular**.

Una gráfica $H(V(H), E(H))$ es llamada **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En tal caso, decimos que G **contiene** a H o H está **contenida** en G. Cuando

$H \subseteq G$ pero $H \neq G$, llamamos a H **subgráfica propia** de G. Si v es un vértice de una gráfica $G = (V(G), E(G))$, podemos obtener una subgráfica de G con $|V(G)| - 1$ vértices eliminando a v de G y a todas las aristas que inciden en v; el resultado lo denotamos por $G - v$. Una subgráfica obtenida a partir de la eliminación de vértices es llamada **subgráfica inducida**. Si X es el conjunto de vértices eliminados, la subgráfica resultante es denotada por $G - X$.

Dos gráficas $G = (V(G), E(H))$ y $H = (V(H), E(H))$ son **isomorfas**, escrito $G \cong H$, si existe una biyección $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$, tal que, para $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$; tal función es llamada **isomorfismo** entre G y H. Cuando $H = G$, decimos que φ es un **automorfismo** de G.

Una subgráfica P de una gráfica G es una **trayectoria** en G si los vértices de P pueden ser etiquetados en una sucesión lineal (sin repetir vértices) de tal manera que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. Para dos vértices distintos u y v en una gráfica G, una $u - v$ trayectoria es una trayectoria con vértice inicial u y vértice terminal v. De manera similar, una subgráfica C de G es un **ciclo** en G, si tiene tres o más vértices, los cuales pueden ser etiquetados en una sucesión cíclica (sin repetir vértices) de tal forma que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. El número de aristas contenidas en una trayectoria o en un ciclo es su **longitud**. Un ciclo de longitud $k \geq 3$ es llamado k-**ciclo**. El **cuello** de una gráfica G es la longitud más pequeña entre todos sus ciclos.

Decimos que un conjunto de vértices de una gráfica G es **independiente** si ninguna pareja de vértices en el conjunto es adyacente. Dos vértices u y v están **conectados** si G contiene una $u - v$ trayectoria. Una gráfica G es **conexa** si cualquier par de vértices está conectado. Una gráfica que no es conexa es una **gráfica inconexa**. Una subgráfica conexa H de una gráfica G es una **componente conexa**, o simplemente una **componente** de G, si esta no es una subgráfica propia de una subgráfica conexa de G.

Sean u y v vértices en una gráfica conexa G. La **distancia** entre u y v es la mínima de las longitudes entre todas las $u - v$ trayectorias en G. Un subconjunto de vértices S de una gráfica G es **dominante** si todo vértice de G está a distancia a lo más uno de algún vértice del conjunto S. Un conjunto dominante es de **cardinalidad mínima** si tiene la menor cardinalidad de entre todos los conjuntos dominantes de G (más información en [2]). En general, un subconjunto de vértices S de una gráfica G es d-**dominante en distancia** si todo vértice de G está a distancia a lo más d de algún vértice del conjunto S (para más detalles, consultar [3, 4, 5, 8, 9]).

Una **digráfica** D es un conjunto finito de vértices $V(D)$ y un conjunto de pares de vértices *ordenados* $A(D)$, llamados **arcos**. Si $(u, v) \in A(D)$, lo denotamos como uv. En este caso, dado que son parejas ordenadas, $uv \neq vu$. Decimos que $uv \in A(D)$ es un **arco simétrico** si también $vu \in A(D)$. Una digráfica es **acíclica** si no tiene ciclos dirigidos.

Ahora, ya contamos con todas las herramientas para describir y analizar nuestro juego.

2. Juego: Destruyendo gráficas

Pasemos directamente a la descripción de las reglas del juego; luego vemos un ejemplo y después analizamos cada uno de sus detalles.

2.1. Reglas del juego. Consideremos una gráfica G y sea w una función de asignación de peso a los vértices de G, con $w : V(G) \to \mathbb{Z}^+$.

Digamos, en virtud del juego, que cada vértice $v \in V(G)$ es una **bomba explosiva**, y que $w(v)$ determina su **resistencia** a explotar.

Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica con la misma asignación de peso a los vértices. El objetivo es destruir la gráfica del oponente en la menor cantidad de **tiradas** bajo las siguientes condiciones:

1. Un jugador **tira**: lanza un dado y al valor d que le salga, le llamaremos **valor de ataque** en ese turno. Escoge algún vértice v_0 de la gráfica de su oponente para ser **detonado** o **atacado**. La **detonación** o **ataque** se realiza por medio de una sucesión de **pasos** descritos en el siguiente

   Algoritmo:

   Paso 1: Sea $t : V(G) \to \mathbb{Z}$, con $t(v) = 0$ para todo $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ y $t(v_0) = d$. Definimos $r_0 = w(v_0) - t(v_0)$:

   - Si $r_0 > 0$, entonces actualizamos el peso de v_0 por r_0 y es el turno del otro jugador.
   - Si $r_0 = 0$, entonces decimos que v_0 **explota** y es el turno del otro jugador.
   - Si $r_0 < 0$, entonces v_0 **explota**. Si u es vecino de v_0, entonces a $t(u)$ le sumamos $-r_0$. En este caso, decimos que $-r_0$ es el **potencial transferido** de v_0 a u.

   Si $r_0 < 0$, existe un

   Paso 2: Para cada vecino u de v_0, sea $r_u = w(u) - t(u)$:

   - Si $r_u > 0$, entonces actualizamos el peso de u por r_u y nuevamente $t(u) = 0$.
   - Si $r_u = 0$, entonces u explota.
   - Si $r_u < 0$, entonces u explota. Si v es vecino de u, con $v \neq v_0$ y v no explota en este paso, entonces a $t(v)$ le sumamos $-r_u$. Decimos que $-r_u$ es el potencial transferido de u a v.

   En general: Si en el **paso n**, con $n \geq 2$, $r_u < 0$ para algún vértice u explotado en este paso, donde $r_u = w(u) - t(u)$; existe un

   Paso n+1: Para cada uno de los vértices v a los que les transfirieron potencial en el paso anterior, sea $r_v = w(v) - t(v)$:

   - Si $r_v > 0$, entonces actualizamos el peso de v por r_v y nuevamente $t(v) = 0$.
   - Si $r_v = 0$, entonces v explota.
   - Si $r_v < 0$, entonces v explota. Si z es vecino de v y z no explota en este paso ni ha explotado en ningún paso anterior, entonces a $t(z)$ le sumamos $-r_v$ y decimos que $-r_v$ es el potencial transferido de v a z.

2. En el siguiente turno de este mismo jugador, atacará a la gráfica inducida que resulta de eliminar a los vértices explotados y con la asignación de pesos actualizados de los vértices que aún no explotan.

3. El juego concluye cuando ambos jugadores realizan la misma cantidad de tiradas y al menos una gráfica ha sido **destruida**, es decir, todos los vértices de la gráfica han explotado. Gana el jugador que haya destruido la gráfica de su contrincante y aún conserve algún vértice sin explotar; en su defecto, se declara empate.

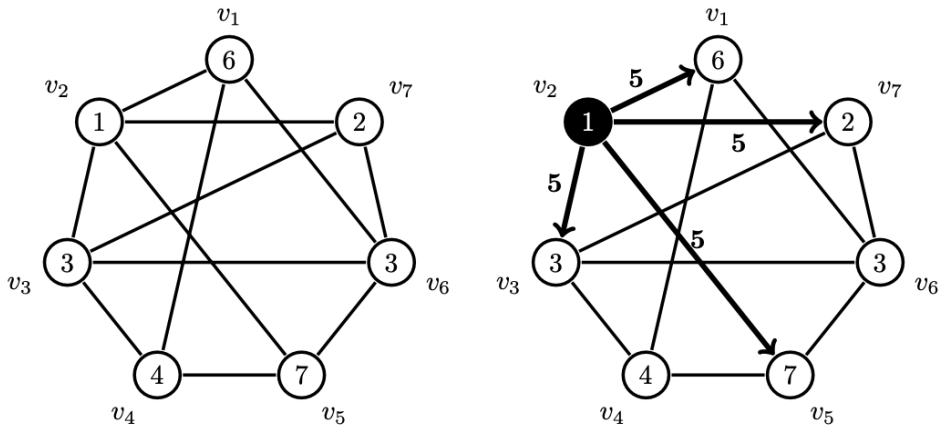
Veamos un ejemplo concreto de cómo se realiza una tirada. Consideremos a la gráfica G correspondiente a la figura 1(a)con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ y pesos $6, 1, 3, 4, 7, 3, 2$, respectivamente. Supongamos que el valor de ataque es $d = 6$:

- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_5; el peso de v_5 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_1; v_1 explota y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_2; v_2 explota y le transfiere a sus vecinos (v_1, v_3, v_5 y v_7) un potencial de 5; ver figura 1(b). Hay un segundo paso.
- En el segundo paso: el peso de v_1 se actualiza a 1; el peso de v_5 se actualiza a 2; v_3 y v_7 explotan; v_3 le transfiere un potencial de 2 a v_4 y v_6; v_7 le transfiere un potencial de 3 a v_6; v_3 y v_7 no se transfieren potencial, a pesar de ser vecinos, ya que ambos explotan en el mismo paso; ver figura 1(c). Hay un tercer paso.
- En el tercer paso: v_6 explota; v_6 le transfiere un potencial de 2 a v_1 y v_5; v_6 no le transfiere potencial a v_3 y v_7 porque ya explotaron en un paso anterior; ver figura 1(d). Hay un cuarto paso.
- En el cuarto paso: v_1 y v_5 explotan; v_1 le transfiere un potencial de 1 a v_4; v_5 ya no transfiere ningún potencial a v_4; ver figura 1(e). Hay un quinto paso.
- En el quinto paso: el peso de v_4 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador, ver figura 1(f).
- La gráfica resultante es únicamente el vértice v_4 con peso 1.

2.2. Análisis del juego. Olvidémonos por un momento de que es un juego de parejas. Supongamos que es un juego individual para analizar sus principales características y comprender su complejidad.

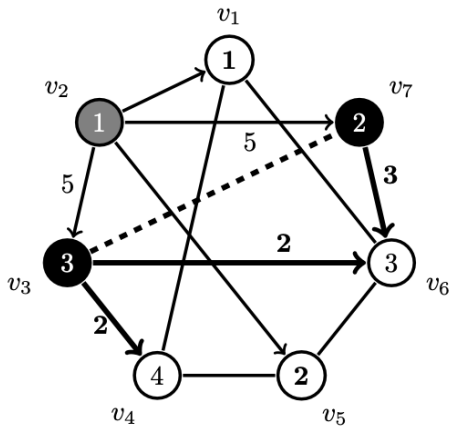
Sea G una gráfica con función w de asignación de peso a los vértices de G. Sea d un valor de ataque y sea $v \in V(G)$. Definimos a la **digráfica de transferencia** con valor de ataque d desde v, $D_G(d, v)$, como la digráfica que tiene el mismo conjunto de vértices de G y ab es un arco de $D_G(d, v)$ si a le transfirió algún potencial a b al momento de atacar a v con el valor de ataque d; etiquetamos a cada arco de $D_G(d, v)$ con el respectivo potencial transferido. En este contexto, definimos a la **gráfica resultante** como la gráfica que se obtiene desde G al remover a los vértices explotados, con la función de asignación de peso actualizada. Por ejemplo, sea G la gráfica de la figura 2(a) con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ y pesos $1, 1, 2, 3, 2, 1$, respectivamente. En la figura 2(b) podemos apreciar a $D_G(4, v_1)$ y en la figura 2(c) la gráfica resultante (con los pesos actualizados).

Notemos que la digráfica de transferencia está bien definida, ya que, en cada paso, los vértices que explotan no se transfieren potencial entre ellos y únicamente le transfieren potencial a vértices que aún no han explotado. Es decir, es una digráfica sin ciclos dirigidos, en particular, sin arcos simétricos. Si $D_G(d, v)$ es una digráfica de transferencia, definimos su **potencia** como la suma de las etiquetas de todos sus arcos y la denotamos por $\mathcal{P}[D_G(d, v)]$. Por ejemplo, la digráfica de transferencia de la figura 2(b) tiene potencia igual a 9. Más aún, si para destruir a una gráfica G fue suficiente con detonar, sucesivamente, a los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con los valores de ataque $d_1, d_2, \ldots, d_k$, respectivamente; denotamos a esta **sucesión de detonaciones** como $[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \ldots, v_k^{d_k}]$ y decimos que su **carga explosiva** es la suma de todos sus valores de ataque; cuando el valor de ataque es constante, a la sucesión de detonaciones la denotamos por $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Definimos a la **digráfica de transferencia total**, correspondiente a esta sucesión, como la digráfica $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \ldots, v_k^{d_k}]$ que se obtiene de unir a todas las digráficas $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$; dicha digráfica es acíclica.

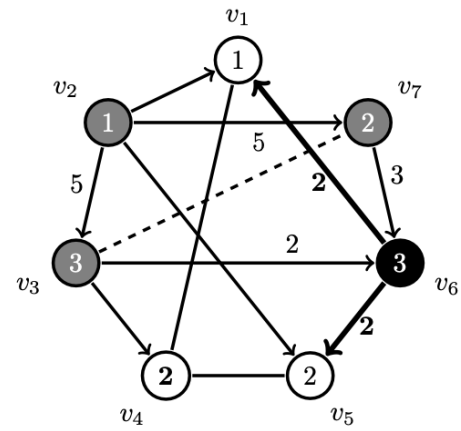


(a) G

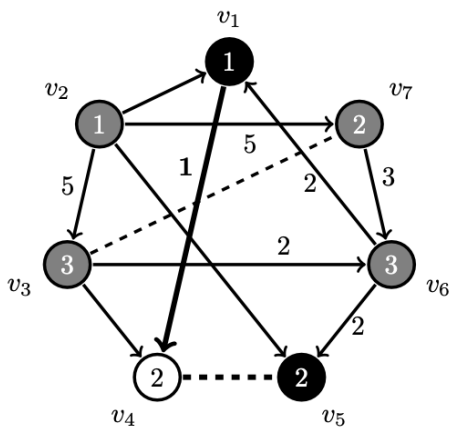
(b) Paso 1



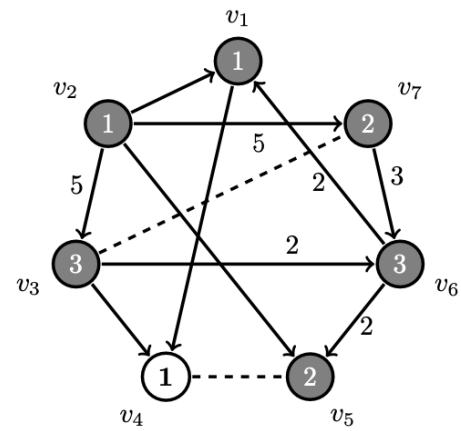
(c) Paso 2



(d) Paso 3



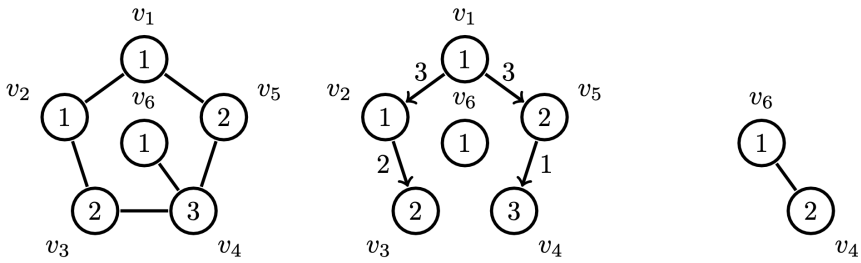
(e) Paso 4



(f) Paso 5

FIGURA 1. En color negro, los vértices que explotan en el respectivo paso, y en color gris, los vértices explotados en pasos anteriores. Las flechas con etiquetas son auxiliares para indicar los potenciales transferidos

Llamamos **potencia destructiva** de $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \ldots, v_k^{d_k}]$ como la suma de potencias de $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es decir, la suma de las etiquetas de todos sus arcos.



(a) Gráfica G (b) Digráfica de transferencia $D_G(4, v_1)$ (c) Gráfica resultante

FIGURA 2

Cabe mencionar que si el valor de ataque fuera una constante d y todos los vértices tuvieran peso igual a 1, este problema sería equivalente a obtener un d-conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes mínimo [2, 3]. Como no es el caso, el *éxito* en este juego depende del azar y de la habilidad del jugador para desarrollar una *estrategia ganadora*.

2.3. "Estrategias". Intuitivamente, buscamos al *mejor* vértice para ser atacado en cada turno, dependiendo de alguna particularidad de este. Veamos algunas de estas posibles características y mostremos que, a veces, la intuición puede fallar.

2.3.1. Grado máximo. Se podría considerar que, si tenemos dos vértices con el mismo peso, convendría atacar al de mayor grado. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 2(a), si en la primera y segunda tirada tenemos los valores de ataque $d_1 = 5$ y $d_2 = 1$, respectivamente. Si atacamos a v_1 (de grado 2) y después a v_6, destruimos a la gráfica. Por otro lado, si comenzamos atacando a v_6 (de grado 1), necesitamos al menos 3 tiradas para destruir a G. Sin embargo, considerando la gráfica H de la figura 3, si en todas las tiradas los valores son iguales a 4, si comenzamos atacando a v_2 (de grado 4), destruimos la gráfica en 5 tiradas ($[v_2, v_1, v_4, v_6, v_3]$). Mientras que, si comenzamos por v_1 (de grado 1), la destruimos en 3 tiradas ($[v_1, v_2, v_3]$). Así que el grado de los vértices no es determinante para destruir una gráfica en el menor número de tiradas, aun cuando estos tienen el mismo peso asignado.

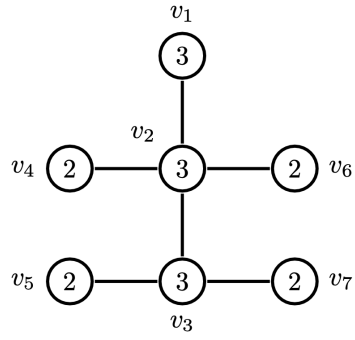


FIGURA 3. Gráfica H

2.3.2. Potencia máxima. De manera parecida al caso anterior, podríamos suponer que, entre dos vértices, conviene atacar al vértice cuya digráfica de transferencia tenga mayor potencia. Como sucede en la gráfica G de la figura 2(a), donde $\mathcal{P}[D_G(4, v_1)] = 9$ y $\mathcal{P}[D_G(4, v_6)] = 3$. De manera contraria, en la gráfica H de la figura 3, $\mathcal{P}[D_H(4, v_2)] = 4$ mientras que $\mathcal{P}[D_H(4, v_1)] = 1$. Por lo que esta tampoco es una peculiaridad

determinante. De hecho, podríamos profundizar un poco más y darnos cuenta de que tampoco depende de la potencia destructiva de las digráficas correspondientes a dos sucesiones de vértices que destruyen la gráfica (ver sección 4).

2.3.3. Valor de ataque máximo. Algo que sin duda es importante para explotar un vértice es el valor de ataque con el que lo detonemos. Pensaríamos que "a mayor carga explosiva, mayor destrucción". En la gráfica H de la figura 3, si el valor de ataque es constante, igual a 6, destruiríamos la gráfica en al menos 3 tiradas; por ejemplo, $[v_1, v_2, v_3, v_6], [v_2, v_5, v_7], [v_3, v_1, v_4, v_6], [v_4, v_1, v_3, v_6]$ o $[v_5, v_2, v_7]$. Por otro lado, si el valor de ataque es constante e igual a 5, lo podemos hacer en 2 tiradas, atacando a v_3 seguido de v_2. Esto sí es algo verdaderamente sorprendente.

2.3.4. El orden de las detonaciones. A la gráfica H, de la figura 3, la podemos destruir si el valor de ataque sobre v_3 es 5 y después el valor de ataque sobre v_2 es 4. No obstante, si primero atacamos a v_2 con un valor de ataque igual a 4 (o incluso 5), ya no destruimos la gráfica aplicándole un valor de ataque de 5 a v_3. Esto es: "A pesar de que ya sepamos qué vértices hay que detonar, importa el orden en el que lo hagamos".

2.3.5. Toma de decisiones "a ciegas". Supongamos que en la gráfica H de la figura 3 el peso de v_3 es 4. Si en la primera tirada el valor de ataque sale 1 y, por alguna razón, sabemos que en la tercera tirada caerá 4 o más. Entonces, ¿a quién conviene atacar en la primera tirada? Si atacamos a v_3 y en la segunda tirada sale 6, como vimos en el punto 2.3.3, necesitaríamos al menos 3 tiradas más para destruir la gráfica, por lo que convendría atacar a cualquier vértice distinto de v_3 y v_2. Ahora bien, si en la segunda tirada sale 5, para terminar el juego en la tercera tirada, en la primera sí se debió atacar a v_3. Por lo tanto, dado que no sabemos qué saldrá en las tiradas posteriores, no tenemos certeza de cuál es la mejor tirada en cada turno, aunque bien podemos recurrir a la probabilidad.

El problema principal, en todos los casos anteriores, es que se generan nuevas componentes, lo que, en principio, aumenta la cantidad de tiradas.

2.3.6. Menor número de componentes. Si el valor de ataque es constante, igual a 5. En la gráfica F de la figura 4, los únicos vértices que no aumentan la cantidad de componentes son v_1 y v_{11} que, por simetría, son equivalentes. Si detonamos a v_1, la gráfica resultante se destruye con al menos 3 detonaciones extra ($[v_9, v_6, v_{11}]$ por ejemplo). En cambio, si detonamos a v_6, obtenemos 2 componentes que se destruyen con una tirada cada una. Por lo que mantener el mínimo número de componentes tampoco es una estrategia *ganadora* en este juego.

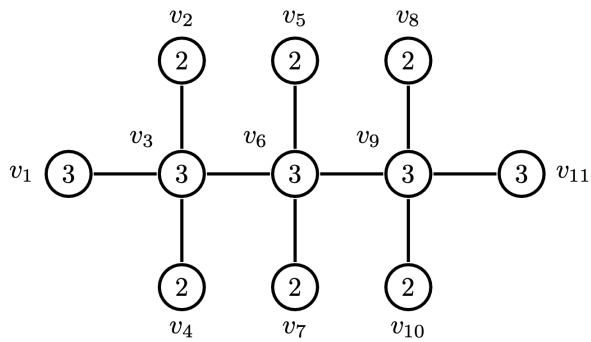


FIGURA 4. Gráfica F

Luego de este análisis, ya podemos dimensionar un poco más la complejidad de este juego. También podemos notar que el azar (del dado) juega un papel muy importante.

3. Gráficas para jugar

En principio, este juego se puede implementar en cualquier gráfica, pero para que el juego sea interesante, debemos hacer algunas consideraciones:

Gráfica regular: Pedimos regularidad, para que, desde el principio, no haya preferencia por algún vértice debido a su grado.

Función balanceada de asignación de peso: De manera similar a la petición anterior, sería conveniente que la cantidad de valores distintos que toma la función de asignación de peso a los vértices dividiera (en la medida de lo posible) a la cantidad de vértices.

Cuello adecuado: Tomando en cuenta la obtención de las digráficas de transferencia, para que dos o más vértices no le transfieran *mucho* potencial a un solo vértice en el mismo paso y el juego termine muy rápido, requerimos que la gráfica tenga un cuello de longitud impar lo suficientemente holgado.

Dado acotado: Relacionado con el punto anterior, los valores del dado no deberían ser demasiado grandes. Como recomendación, si se complica mucho conseguir un dado de cierta cantidad de valores posibles, también se puede usar una pirinola con la cantidad de caras deseadas.

Con estas condiciones, podríamos pensar en las gráficas asociadas a los polígonos platónicos, gráficas circulantes o en *jaulas*.

Una (k, g)-**jaula** es una gráfica k-regular de cuello g de orden mínimo. Si se desea introducirse un poco más en el tema de jaulas, es recomendable ver [10]. Si se desea conocer algunos de los resultados más recientes, ver [11].

Veamos cómo implementar nuestro juego en la única $(3, 5)$-jaula [11], conocida como la **gráfica de Petersen**; ver figura 5.

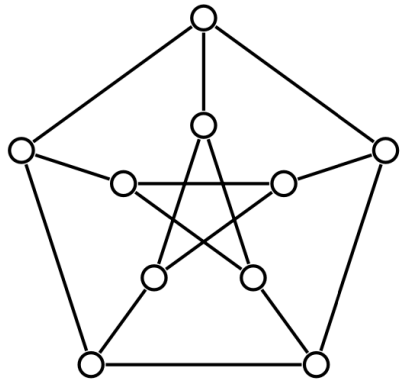


Figura 5. Gráfica de Petersen

4. Destruyendo la gráfica de Petersen

Tomando en cuenta las consideraciones de la sección anterior, dado que la gráfica de Petersen es de orden $n = 10$ y cuello $g = 5$, la función que le asigna peso a los vértices debe tomar valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor se repite una vez. Por ejemplo, un *tablero* de juego podría ser la gráfica de Petersen con la función de asignación de pesos como se muestra en la figura 6, que denotaremos por P_0.

Para que el juego sea más dinámico, usamos un dado común de 6 caras, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aprovechando que tenemos este ejemplo específico, tenemos la oportunidad de hacer algunas observaciones interesantes:

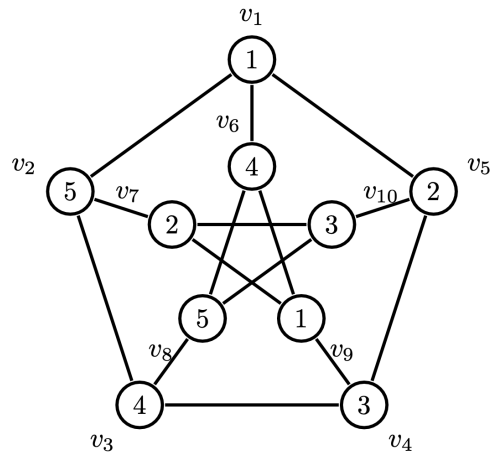
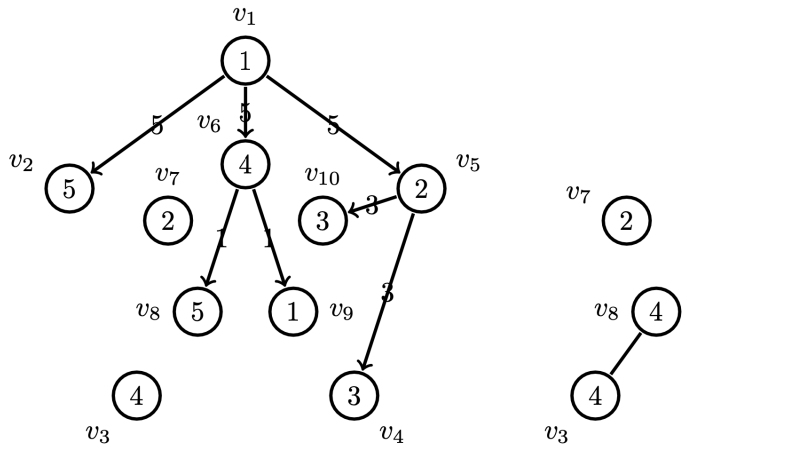


FIGURA 6. Gráfica de Petersen con pesos asignados P_0

Supongamos que en todas las tiradas obtenemos 6.

- Si comenzamos detonando al vértice v_1, de peso 1, destruimos a la gráfica en 4 tiradas, $[v_1, v_3, v_7.v_8]$, ver figura 7. Por otro lado, si comenzamos detonando al vértice v_9, de peso 1, destruimos a la gráfica en 2 tiradas, $[v_9, v_3]$,ver figura 8.
- Si nuestra sucesión de detonaciones es $[v_8, v_9, v_2]$, destruimos a la gráfica en 3 tiradas y obtenemos una potencia destructiva de 36 (ver figura 9). Mientras que si la sucesión de detonaciones es $[v_9, v_3]$, destruimos a la gráfica en 2 tiradas a pesar de que obtengamos una potencia destructiva de 35 (ver figura 8). En otras palabras, confirmando lo que se mencionó en el punto 2.3.2, la potencia destructiva de una digráfica no determina la menor cantidad de detonaciones para destruir una gráfica.

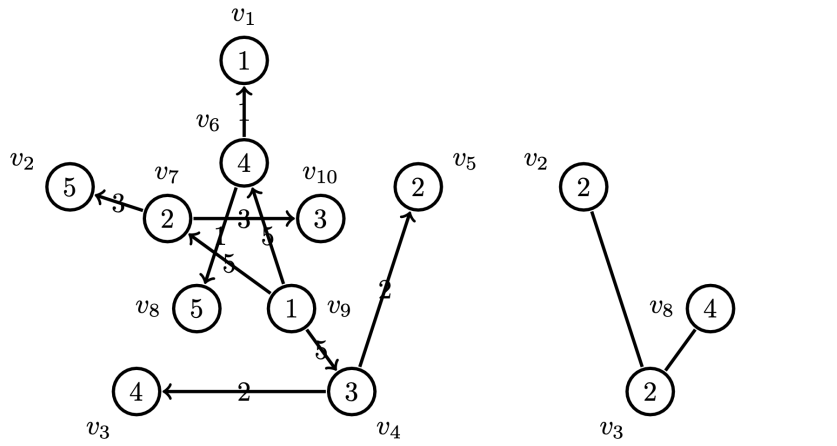


(a) $D_{P_0}(6, v_1)$ (b) Gráfica resultante

FIGURA 7

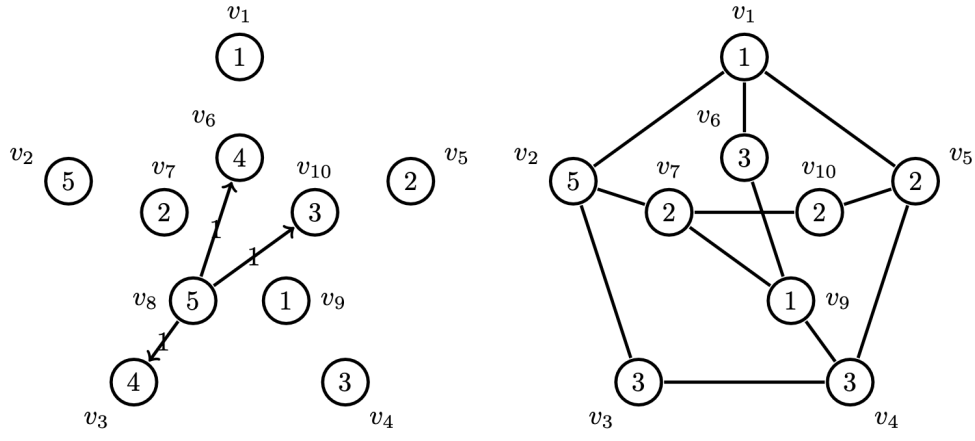
Si dos personas juegan a destruir la gráfica de Petersen bajo estas condiciones, entre ambas podrían colocar los pesos sobre los vértices de manera aleatoria, pero ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

4.1. Cantidad de tableros distintos. Digamos que cada asignación de peso a los vértices de la gráfica de Petersen, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor

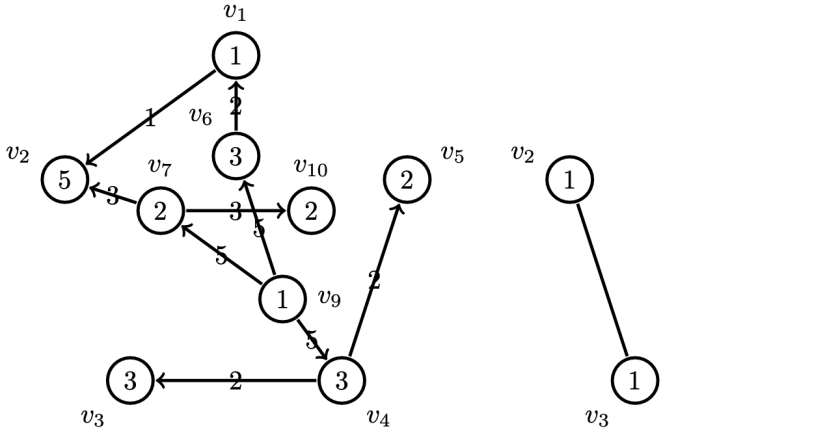


(a) $D_{P_0}(6, v_9)$ (b) Gráfica resultante

FIGURA 8



(a) $D_{P_0}(6, v_8)$ (b) Gráfica resultante P_1



(c) $D_{P_1}(6, v_9)$ (d) Gáfica resultante P_2

FIGURA 9

se repite una vez; es un **tablero de Petersen** en donde podemos jugar. Dado que el grupo de automorfismos de la gráfica de Petersen es isomorfo al *grupo simétrico*

$Sym(5)$ [11], y este tiene $5! = 120$ elementos, entonces la gráfica de Petersen tiene 120 automorfismos, es decir, 120 maneras de permutar sus vértices de tal manera que veamos el mismo dibujo que la representa. Por lo que la estructura de cada tablero representa a 120 de entre todos los posibles tableros. Ahora bien, para contar a todos los posibles tableros, debemos considerar todas las combinaciones de que a 2 de los 10 vértices se les asigne el peso 1; luego, que 2 de los 8 vértices restantes tengan peso 2; 2 de los 6 vértices restantes tengan peso 3; 2 de los 4 vértices restantes tengan peso 4; y por último, los 2 vértices que tengan peso 5. Es decir,

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113,400.$$

Por lo tanto, existen $\frac{113,400}{120} = 945$ tableros de Petersen distintos *bajo isomorfismo*. Muchos como para memorizarse una estrategia ganadora para cada uno, sin contar con la capacidad de reconocer qué estructura *representante* es si esta está bajo un automorfismo.

5. Conclusiones

Sería deseable ampliar la lista de ejemplos concretos de gráficas en las cuales implementar nuestro juego, especificando la imagen de función de asignación de peso a los vértices, la cantidad de vértices en cada conjunto que tendrán el mismo valor y los posibles valores del dado. Sin dejar de lado que el juego tiene que ser ágil y divertido.

En cualquier tablero de Petersen (3-regular, sin 3 y 4-ciclos), dado que tenemos dos 5 y dos 4, ninguno de ellos puede destruirse en una tirada. Vimos que el tablero de la figura 6 sí es posible destruirlo en 2 tiradas. Una pregunta teórica interesante es, de entre todos los tableros de Petersen que se pueden destruir en dos tiradas, ¿cuál es la menor carga explosiva necesaria?

En general, para una gráfica G con una asignación de peso a sus vértices *fija*:

1: ¿Cuál es la menor cantidad de tiradas que necesitamos para destruir a G?

2: De entre las sucesiones de detonaciones que destruyen a G en la menor cantidad de tiradas, ¿cuál es la carga explosiva mínima?

Ahora bien, para una gráfica G, ¿cuáles son los valores menores de las preguntas 1 y 2 de entre todas las funciones balanceadas de asignación de peso a sus vértices que toman valores de un conjunto W y un rango de valores de ataque dentro de un conjunto D? Una línea de investigación sería responder la interrogante anterior para gráficas concretas con conjuntos W y D determinados.

Decimos que una sucesión de detonaciones que destruye a G es **mínima** si no se puede destruir a G con la misma sucesión de vértices detonados, pero con una carga explosiva menor. Sería interesante saber si, entre dos sucesiones de detonaciones mínimas (no necesariamente de la misma longitud) que destruyen a G, ¿la carga explosiva menor implica una mayor potencia destructiva de la respectiva digráfica de transferencia total? Nótese que el ejemplo de la figura 9 visto en la sección 4 no es contraejemplo, ya que la gráfica de la figura 9(d) se puede destruir con un valor de ataque igual a 2. Más aún, entre dos sucesiones de detonaciones que destruyen a G, ¿la carga explosiva mayor implica una menor o igual cantidad de detonaciones para destruir a la gráfica?

agradecimientos. El autor expresa su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2024; en particular a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. En especial, agradezco a los organizadores que me recibieron como profesor invitado y a los alumnos que participaron en el taller.

Referencias

[1] Majeed, Abdul, and Ibtisam Rauf. *Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks*. Inventions, 5.1 (2020): 10.

[2] Allan, R. B., & Laskar, R. *On domination and independent domination numbers of a graph*. Discrete mathematics, 23(2) (1978), 73-76.

[3] Gimbel, J., & Henning, M. A. *Bounds on an independent distance domination parameter*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 20 (1996), 193-205.

[4] Meir, A., & Moon, J. *Relations between packing and covering numbers of a tree*. Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975), 225-233.

[5] Fricke, G. H., Hedetniemi, S. T., & Henning, M. A. *Distance independent domination in graphs*. Ars Combinatoria, 41(3995) (1995), 33-44.

[6] Dreyer Jr, P. A. *Applications and variations of domination in graphs*. Rutgers The State University of New Jersey, School of Graduate Studies, 2000.

[7] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

[8] Beineke, L. W., & Henning, M. A. *Some extremal results on independent distance domination in graphs*. Ars Combinatoria, 37 (1994), 223-233.

[9] Henning, M. A. *Distance domination in graphs*. Topics in Domination in Graphs, (2020), 205-250.

[10] Wong, P. K. *Cages—a survey*. Journal of Graph Theory, 6(1) (1982), 1-22.

[11] Exoo, G., & Jajcay, R. *Dynamic cage survey*. The electronic journal of combinatorics, DS16-Jul (2012).

Juan Carlos García Altamirano
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, Ciudad de México, México.
e-mail: `carlosg@cua.uam.mx`

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 269-276.
Recibido 30-05-2025. Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/cjbmnp

UN MODELO DE PROPAGACIÓN DE VIH EN UNA POBLACIÓN

CLAUDIA MARLENE DE LA CRUZ, JULIÁN FRESÁN-FIGUEROA, BRUNO GRAF-ROMERO, MARÍA FERNANDA PÉREZ-SÁNCHEZ, NANCY VALERIA PRADO MARTÍNEZ, PABLO CÉSAR SÁNCHEZ-SILVA

Resumen. En este artículo trabajamos en un modelo dinámico, propuesto por Simon Mukwembi, para la propagación del VIH en una población discreta y finita de tamaño n, representada mediante una gráfica, donde los vértices son individuos y las aristas indican relaciones sexuales entre los individuos; a esta representación la llamamos gráfica sexual. El modelo toma en cuenta la estructura de dicha gráfica, la densidad de población infectada entre las parejas sexuales de cada individuo, y una cantidad razonable de la influencia que pueden tener los individuos VIH positivos no infecciosos sobre sus parejas sexuales que sí son infecciosas. Exploramos distintas posibles redes sexuales y los comportamientos dinámicos del modelo, como la estabilización, propagación sostenida o extinción del virus, en función de la estructura de la gráfica.

1. Introducción

Uno de los desafíos más urgentes en salud pública, en México y en muchos lugares del mundo, sigue siendo, en ausencia de una cura definitiva, diseñar estrategias efectivas para frenar la propagación del VIH (Virus de Inmunodeficiencia Humana). aúnque el acceso a tratamiento antirretroviral ha mejorado significativamente en los últimos años, los nuevos casos no han dejado de aparecer. Según datos de CENSIDA [1], en México más de 160,000 personas han sido diagnosticadas con VIH en los últimos 10 años, cada año se suman en más de 10,000 nuevos diagnósticos, y mas del 70 % de los diagnósticos se dan entre los 20 y 40 años.

Para entender cómo se propaga el virus y diseñar políticas públicas eficaces, los modelos matemáticos se han vuelto herramientas de gran utilidad. Estos modelos permiten hacer simulaciones y predicciones que ayudan a explicar el comportamiento de enfermedades infecciosas. Durante décadas, los más usados han sido los llamados modelos compartimentales, que dividen a la población en grupos como "susceptibles", "infectados" y "tratados", y usan ecuaciones diferenciales para representar cómo las personas cambian de un grupo a otro con el tiempo.

aúnque estos modelos han sido útiles, tienen limitaciones cuando se trata de enfermedades como el VIH, que se transmite mayormente por contacto sexual. Su principal problema es que suponen que todas las personas tienen la misma probabilidad de tener relaciones sexuales entre sí, y que hay muchas interacciones. Pero en la realidad, y particularmente en México, las relaciones sexuales no son aleatorias ni ocurren de manera homogénea. Factores como la edad, el género, la orientación sexual, la clase social y los estigmas culturales influyen en con quién, cuándo y qué tanto se tiene sexo.

En México, el VIH afecta de forma desigual a ciertos grupos: hombres que tienen sexo con hombres, mujeres trans, trabajadores sexuales y personas que se inyectan drogas. En estos grupos, el número de parejas sexuales puede variar mucho, desde relaciones monógamas hasta redes sexuales muy densas. Algunos individuos tienen un número muy elevado de parejas, lo que los convierte en superpropagadores capaces de generar brotes, mientras que otros pueden no contagiar a nadie. Suponer que todos se comportan igual es una simplificación que puede llevar a errores importantes.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05, 05C07.
Palabras clave. VIH, gráfica, propagación.

Además, algunos estudios han mostrado que aúnque el número de reproducción básica (R_0) sea mayor a 1 (lo que normalmente indicaría una epidemia), no siempre ocurre un brote. Esto se debe a que lo más importante no es sólo cuántas personas están involucradas, sino cómo están conectadas entre sí.

Frente a estas limitaciones, ha surgido una nueva generación de modelos llamados modelos de redes. En estos modelos, cada persona es representada como un vértice en una gráfica, y las relaciones sexuales como conexiones (aristas) entre estos vértices. Así se puede representar mejor cómo ocurren los contactos en la vida real. Para construir estos modelos, se han usado herramientas de análisis de redes que también se aplican en sociología o antropología.

Sin embargo, muchos de estos modelos se basan en redes estáticas o con estructuras muy específicas (como las redes de Erdős–Rényi o Barabási–Albert), que no reflejan bien cómo cambian las relaciones sexuales en la vida diaria. Por ejemplo, en la Ciudad de México, el uso de aplicaciones de citas, la movilidad social y la desigualdad económica cambian constantemente las redes sexuales. También se han usado simulaciones por computadora para representar redes más complejas y dinámicas. Estas simulaciones permiten incluir muchos comportamientos distintos, pero a veces son difíciles de interpretar porque usan muchos parámetros, lo que complica identificar qué aspectos del modelo son responsables de ciertos resultados. En otras palabras, al haber tantas variables involucradas, es difícil aislar el efecto de una sola decisión o suposición sobre la propagación del virus.

En este trabajo presentamos un modelo más general y dinámico, propuesto por Mukwembi [2] que evita esas limitaciones. No asumimos que la red de contactos sea igual para todos ni que esté fija. Representamos a las personas y sus relaciones sexuales mediante una gráfica general, y estudiamos cómo se propaga el virus a lo largo del tiempo. Los resultados se basan en pruebas matemáticas claras, no en simulaciones, lo que ayuda a entender mejor los mecanismos de contagio.

Este tipo de modelo podrían ayudarnos a responder preguntas importantes para México: ¿Qué hace que algunas redes sexuales sean más susceptibles a los contagios? ¿Cómo influye la desigualdad de género o el acceso desigual a los servicios de salud? ¿Qué tipo de acciones pueden cortar más eficazmente las cadenas de contagio? Entender cómo son realmente las relaciones entre personas, sin suposiciones simplistas, es clave para diseñar políticas públicas que sí funcionen. Porque para combatir el VIH, lo primero es dejar de pensar que el sexo es aleatorio y homogéneo.

2. El modelo

Similar a los modelos SIR en epidemología matemática, para el caso del VIH se dividirá la población en 3 clases: los individuos *susceptibles* que son individuos que son VIH negativos; los individuos *infecciosos*, que son individuos que portan el virus y pueden contagiarlo, estos individuos incluyen, por ejemplo, a las personas que aún no cuentan con un diagnóstico o a las personas que aún no son indetectables; y por último los individuos *no infecciosos* que son los invidivuos portadores del virus, pero que no pueden contagiarlo. En esta última clase se incluyen, por ejemplo, los individuos con carga viral indetectable. La propagación entre individuos se dará, en tiempos discretos, de acuerdo a las siguientes reglas de transición:

Regla 1: Un individuo susceptible se infecta en el siguiente paso de tiempo si la densidad de sus parejas sexuales VIH positivas infecciosas entre todas sus parejas sexuales supera una fracción α; de lo contrario, el individuo permanece susceptible. Llamaremos a α el parámetro de infectividad.

Regla 2: Un individuo infeccioso v se vuelve no infeccioso si al menos la mitad de sus parejas son no infecciosas; de lo contrario, permanece infeccioso.

Regla 3: Los actores no infecciosos permanecen no infecciosos.

Para más información sobre la justificación de estos supuestos se puede revisar [2]. Modelamos la situación anterior, es decir, la comunidad y sus relaciones sexuales,

mediante una gráfica G de la siguiente manera. El conjunto de vértices de G, denotado por $V(G)$ representa a las personas, y dos vértices están conectados por una arista si y sólo si los individuos correspondientes tienen una relación sexual. Así, por ejemplo, el número de vecinos de un vértice es simplemente el número de parejas sexuales que tiene el individuo correspondiente en un cierto intervalo de tiempo.

En cada paso de tiempo, de acuerdo con reglas mencionadas anteriormente, colorearemos los vértices de G utilizando los colores 0, 1 y 2, a los que nos referiremos como color azul, rojo y negro. Estos colores representan, respectivamente, a individuos susceptibles, un individuos infecciosos y un individuos no infecciosos. La dinámica del modelo está definida de la siguiente manera. Sea $N_{t,k}(v)$ el conjunto de vecinos de color k en el tiempo t del vértice v y sea $d_{t,k}(v) = |N_{t,k}(v)|$, entonces:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad f_{t,\alpha}(v) = 0 \text{ y } \frac{d_{t,1}(v)}{d(v)} < \alpha; \\ 1 \quad \text{si} \quad f_{t,\alpha}(v) = 0 \text{ y } \frac{d_{t,1}(v)}{d(v)} \geq \alpha, \text{ o}; \\ \qquad\quad f_{t,\alpha}(v) = 1 \text{ y } \frac{d_{t,2}(v)}{d(v)} < \frac{1}{2}; \\ 2 \quad \text{si} \quad f_{t,\alpha}(v) = 1 \text{ y } \frac{d_{t,2}(v)}{d(v)} \geq \frac{1}{2}, \text{ o}; \\ \qquad\quad f_{t,\alpha}(v) = 2. \end{cases}$$

El modelo de Mukwembi determina una sucesión de funciones que dependen de α, digamos $P_{f_0,\alpha}(G) = (f_{0,\alpha}, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \ldots)$.

3. Resultados

Diremos que dos valores del parámetro de infectividad α_1 y α_2 tienen la *misma dinámica* si para todo estado inicial f_0, $P_{f_0,\alpha_1}(G) = P_{f_0,\alpha_2}(G)$. Sea $\sigma(G) = \{k \mid k = d(v) \text{ para algún } v \in V(G)\}$. Sea $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \sigma(G) \text{ y } 0 \leq p \leq q \right\}$.

Teorema 1. *Sea $\lambda = (a_0, a_1, \ldots a_r)$ tal que $a_i \in A$ para $i = 1, 2 \ldots r$ y $a_i < a_j$ si $i < j$. Si $a_i < \alpha < a_{i+1}$, entonces α tiene la misma dinámica que a_i o que a_{i+1}.*

Demostración. Sea $\alpha \notin A$, tal que $a_i < \alpha < a_{i+1}$ y supongamos por contradicción que existe un estado inicial f_0 tal que $P_{f_0,\alpha}(G) \neq P_{f_0,a_{i+1}}(G)$. Sea t_0 el primer tiempo en el que $f_{t_0,\alpha}(G) \neq f_{t_0,a_{i+1}}(G)$, entonces existe al menos un vértice $w \in V(G)$ tal que $f_{t_0,\alpha}(w) \neq f_{t_0,a_{i+1}}(w)$. Observemos que $d_{t_0-1,\alpha}(w) = d_{t_0-1,a_{i+1}}(w)$ pues $f_{t_0-1,\alpha} = f_{t_0-1,a_{i+1}}$. Entonces $f_{t_0,\alpha}(w) \neq 2 \neq f_{t_0,a_{i+1}}(w)$, por lo que existe $w \in V(G)$ tal que $f_{t_0-1,\alpha}(w) = f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y:

1. $f_{t_0,\alpha}(w) = 1$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 0$ o
2. $f_{t_0,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 1$

En el primer caso, como $f_{t_0-1,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,\alpha}(w) = 0$ se cumple que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} < \alpha$. Por otro lado dado que $f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 0$, entonces tenemos que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \geq a_{i+1}$, lo cual contradiría que $a_{i+1} > \alpha$.

Para el segundo caso, $f_{t_0-1,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,\alpha}(w) = 1$ y se cumple que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \geq \alpha$. Por otro lado dado que $f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 0$, entonces tenemos que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} < a_{i+1}$, de donde $a_{i+1} > \frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} > a_i$. Sin embargo, $d(w) \in \sigma(G)$ y $0 \leq d_{t_0-1,1}(w) < d(w)$, por lo que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \in A$. Eso implicaría que existe un a_j tal que $a_i < a_j < a_{i+1}$ lo que contradice la construcción de λ. □

Usualmente en los modelos en ecuaciones diferenciales, usados para estudiar la propagación de enfermedades, se utiliza el supuesto de mezcla homogénea. Este supuesto implica que cualquier persona puede contagiarse de cualquier otra, y que el contagio ocurre con la misma probabilidad. Intentando trasladar este supuesto a nuestro modelo, como una persona está infecciosa, puede contagiar directamente a cualquiera de

las otras personas, entonces necesitaríamos que todas las aristas entre los vértices correspondientes a personas existieran por lo que la gráfica que usaríamos para modelar con este supuesto sería una gráfica completa K_n con n individuos. Por ello estudiamos la dinámica del contagio en las gráficas completas en el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Sea $G = K_n$ la gráfica completa de n vértices, sea $\alpha = \frac{i}{n-1}$ un umbral de contagio, con $i \geq 1$. En el tiempo t, sea S, I y N la partición de $V(G)$ en vértices en estado 0, 1 y 2, respectivamente:*

$$f_{t,\alpha}(S) = 0, \quad f_{t,\alpha}(I) = 1, \quad f_{t,\alpha}(N) = 2.$$

Entonces, la evolución del sistema en los siguientes pasos de tiempo cae en exactamente uno de los siguientes cuatro casos:

(A_1) Estabilidad sin contagio: *Si $|I| < i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$, entonces ningún cambio ocurre en el siguiente paso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = f_{t,\alpha}(v) \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

(A_2) Transición a no infecciosos sin contagio: *Si $|I| < i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$, entonces los vértices susceptibles permanecen igual, pero los infectados cambian de estado a no infecciosos:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N. \end{cases}$$

(A_3) Contagio sin transición a estado no infeccioso: *Si $|I| \geq i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$, entonces todos los susceptibles se infectan, pero los infectados no cambian a estado no infeccioso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \cup I, \\ 2 & \text{si } v \in N. \end{cases}$$

(A_4) Contagio total seguido de transición a no infecciosos: *Si $|I| \geq i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$, entonces en el tiempo $t+1$ todos los susceptibles se infectan, y en $t+2$ toda la población pasa al estado no infeccioso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N, \end{cases} \quad y \quad f_{t+2,\alpha}(v) = 2 \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Demostración. Dado que $G = K_n$, todos los vértices son adyacentes entre sí. Por lo tanto, cada vértice tiene exactamente $n-1$ vecinos. Así, cada vértice susceptible en el tiempo t tiene exactamente $|I|$ vecinos infecciosos.

La regla de contagio establece que un vértice susceptible cambia a estado 1 (infeccioso) en el siguiente paso si al menos una fracción $\alpha = \frac{i}{n-1}$ de sus vecinos están en estado 1. Es decir, si $|I| \geq i$.

Por otro lado, se considera que un vértice infeccioso cambia a estado 2 (no infeccioso) si al menos una fracción $\frac{1}{2}$ de sus vecinos están en estado 2. Es decir, si $|N| \geq \frac{n-1}{2}$.

Analizamos cada caso del teorema por separado:

(A_1) Supongamos que $|I| < i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$. Entonces, ningún vértice susceptible se infecta, ya que no se alcanza el umbral de contagio. Además, ningún vértice infeccioso cambia a estado no infeccioso, ya que tampoco se alcanza el umbral de transición. Por lo tanto:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = f_{t,\alpha}(v) \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

(A_2) Supongamos que $|I| < i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$. No hay contagio, porque $|I| < i$, pero el número de vértices en estado 2 es suficiente para provocar que todos los vértices en estado 1 cambien a estado 2. Entonces:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N. \end{cases}$$

(A$_3$) Supongamos que $|I| \geq i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$. En este caso, todos los vértices susceptibles se infectan, ya que el número de infecciosos alcanza el umbral. Sin embargo, no hay suficientes vértices en estado 2 para que los vértices en estado 1 cambien a estado 2. Por lo tanto:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \cup I, \\ 2 & \text{si } v \in N. \end{cases}$$

(A$_4$) Supongamos que $|I| \geq i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$. Aquí, todos los vértices susceptibles se infectan en el tiempo $t+1$ porque $|I| \geq i$, y el número de vértices en estado 2 es suficiente para que todos los vértices en estado 1 (tanto los anteriores como los recién infectados) cambien a estado 2 en el tiempo $t+2$. Es decir:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_{t+2,\alpha}(v) = 2 \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Finalmente, los cuatro casos son disjuntos y cubren todas las posibilidades para los valores de $|I|$ y $|N|$, ya que $|S| + |I| + |N| = n$. □

Como podemos ver, la dinámica de contagio en K_n depende sólo de cuántos individuos infecciosos, no infecciosos y susceptibles hay en la configuración inicial, y no de quién está conectado con quién.

Debido a que las vías de transmisión no necesariamente son masivas, otra gráfica en la que se podría aplicar el modelo es una trayectoria. Estudiar las trayectorias es similar a lo que en epidemiología se hace al rastrear el camino que sigue el virus de una persona a otra a lo largo del tiempo. Con estos estudios, denominados de *trayectorias de contagio*, se pretende no sólo contar cuántas personas están infectadas, sino de entender cómo se produjo cada transmisión e incluso pensar en escenarios como ¿qué habría pasado si una persona hubiese iniciado el tratamiento antes?

Como mencionamos antes, utilizaremos los colores 0, 1 y 2, y nos referimos a ellos como color azul, rojo y negro, para representar en la gráfica a los individuos susceptibles, infecciosos y no infecciosos, respectivamente. Obtuvimos resultados del tiempo que tarda una trayectoria en colorearse totalmente de negro, lo que en el modelo significaría que todos los individuos son no infecciosos. Estos resultados se obtuvieron considerando $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Observemos que para que una trayectoria cambie en cada tiempo, son necesarios un vértice negro y otro rojo, si sólo hay vértices azules entre dos vértices de color negro, o una cadena de vértices azules en un extremos adyacente a uno negro, entonces esta parte de la trayectoria no cambia.

Teorema 3. *Sea P una trayectoria con sólo dos vértices negros en los extremos y vértices rojos y azules entre ellos (al menos uno rojo). Entonces toda la trayectoria se torna totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos, donde i es la mayor de las distancias entre los vértices rojos más uno, s_1 es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente a un vértice negro y s_2 es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente al otro vértice negro.*

Demostración. Sea P una trayectoria como se menciona en el teorema. Vamos a dividir la demostración en tres casos de acuerdo al número de cadenas de vértices azules adyacentes a los vértices negros.

Caso 0) Cero cadenas de vértices azules adyacentes a algún vértice negro, es decir $s_1 = s_2 = 0$. Entonces los dos vértices negros de los extremos son adyacentes a un vértice rojo cada uno (si P es de orden 3, un sólo vértice rojo es adyacente a ambos vértices negros). En cada tiempo los vértices rojos adyacentes a los vértices negros se convertirán en negros y estos nuevos vértices negros tendrán un vértice rojo adyacente a ellos (si no sucede de esta manera es porque ya no hay vértices rojos en P, sólo vértices negros), pues si en el tiempo anterior, el vértice era azul, al ser adyacente a un rojo, este se convertirá en rojo, de manera que el orden de las cadenas de vértices

negros aumenta en cada tiempo, por lo tanto, la trayectoria se tornará totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos.

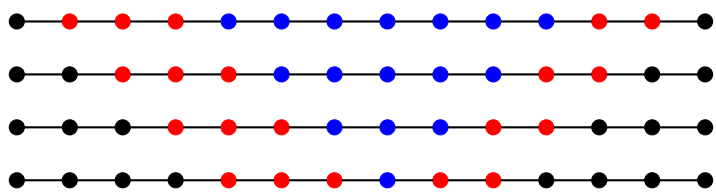


FIGURA 1. Trayectoria con $i = 12$ y $s_1 = s_2 = 0$.

Caso 1) Una sola cadena de vértices azules adyacente a un vértice negro de orden s_1, entonces $s_2 = 0$ y el otro vértice negro es adyacente a un vértice rojo. En s_1 tiempos la mayor de las distancias entre los vértices rojos más uno seguirá siendo i, además los vértices que tengan esta distancia serán adyacentes a un vértice negro cada uno, esto sucede pues en cada tiempo un vértice rojo adyacente al negro se transforma en negro, y un vértice azul adyacente a un rojo se transforma en rojo. En este momento podemos aplicar el caso anterior, pues los vértices negros son sólo adyacentes a otros vértices negros o a un rojo. Por lo que la trayectoria se vuelve totalmente negra en $\lceil i/2 \rceil + s_1 = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos.

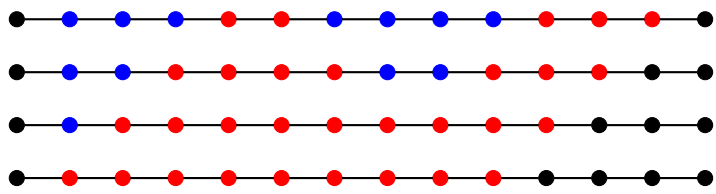


FIGURA 2. Trayectoria con $i = 9$, $s_1 = 4$ y $s_2 = 0$.

Caso 2) Dos cadenas de vértices azules cada una adyacente a un vértice negro. Supongamos que la longitud de una cadena es s_1 y la longitud de la otra cadena es s_2, supongamos también, sin pérdida de generalidad, que $s_1 \geq s_2$. Entonces, en s_2 tiempos habrá un vértice rojo adyacente a un vértice negro de un extremo, además, la longitud de la mayor de las distancias entre los vértices rojos será $i + 2s_2$, pues en cada tiempo un vértice azul adyacente a uno rojo, se convierte en rojo. Y en este momento podemos aplicar el resultado del caso 1, pues también sólo hay una cadena de vértices azules de longitud $s_1 - s_2$ adyacente a un vértice negro, por lo que en $\lceil (i + 2s_2)/2 \rceil + (s_1 - s_2) + s_2 = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos todos los vértices de la cadena serán de color negro.

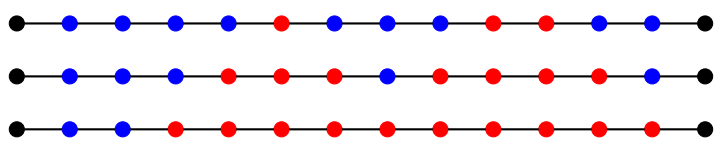


FIGURA 3. Trayectoria con $i = 6$, $s_1 = 4$ y $s_2 = 2$.

Por lo tanto, en cualquier trayectoria con dos vértices negros en los extremos y vértices rojos y azules entre ellos, se tornará totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos.

□

La trayectoria del teorema anterior es muy específica, pero este resultado se usa para cualquier otra trayectoria, como mostramos a continuación.

Corolario 4. *Sea P una trayectoria con un sólo vértice negro en un extremos y al menos un vértice rojo, entonces P se torna totalmente de color negro en $i + 2s$ tiempos, donde i es uno más la distancia entre el vértice rojo más cercano al vértice negro y el vértice del extremo de la trayectoria que no es de color negro, y s es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente al vértice negro.*

Demostración. Sea P una trayectoria como se menciona en el teorema. Unimos una trayectoria idéntica a ella, de manera que resulte una trayectoria simétrica con vértices extremos de color negro, aplicamos el teorema 3. Entonces esta trayectoria se tornará totalmente de color negro en $\lceil (2i)/2 \rceil + s + s = i + 2s$ tiempos, por lo tanto, la trayectoria P se tornará totalmente de color negro en ese mismo tiempo. □

Con los resultados anteriores, podemos saber si cualquier trayectoria se tornará totalmente de color negro y en cuánto tiempo, basta con tomar el tiempo de cada subgráfica de la trayectoria que sea como una de las trayectorias antes analizadas, y el tiempo de la trayectoria total será el mayor de los tiempos de las subgŕaficas.

En el caso de los ciclos, basta con tener al menos un vértice negro y otro rojo para que el ciclo se torne totalmente de color negro, y el tiempo que tarde también es fácil calcular, se considera una trayectoria con la misma sucesión de vértices, iniciando en un vértice negro, y si la trayectoria no termina en un vértice negro, automáticamente se agrega al extremo de la trayectoria, y entonces se calcula el tiempo de la trayectoria resultante, que será el mismo para el ciclo.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025.

Referencias

[1] Centro Nacional para la Prevención y el Control del VIH y el Sida (CENSIDA). (2025, 13 de mayo). Informe histórico Día Mundial del VIH-2024. Secretaría de Salud. https://www.gob.mx/salud/documentos/informe-historico-dia-mundial-vih-2024

[2] Mukwembi, S. (2011). Effects of density of infected population to the spreading of HIV epidemic in communities. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 390(21-22), 3915-3921.

Claudia Marlene de la Cruz Torres
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Doctorado en Matemáticas
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: clau_mar@ciencias.unam.mx

Julián Alberto Fresán Figueroa
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Bruno Graf Romero
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: bruno.graf@cua.uam.mx

María Fernanda Pérez Sánchez
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: perezmariafernanda29@gmail.com

Nancy Valeria Prado Martínez
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Licenciatur ´en Matemáticas,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,l Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: nancy.prado@cua.uam.mx

César Sánchez Silva
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: sanchezsilvapablocesar@gmail.com

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 277-288.
Recibido 05-30-2025. Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/redml

GRÁFICAS DE RE-COLORACIÓN: ¿PUEDES TRANSFORMAR UNA COLORACIÓN EN OTRA SIN ROMPER LAS REGLAS?

ROMINA BARCENA MORALES, EMILIO YEDIDIA LICEA MESINO, DAVID DAN LÓPEZ CONTRERAS, MIKA OLSEN, LIZZETH ARIADNA SÁNCHEZ SOLIS

Resumen. Los problemas de configuraciones, como el del cubo Rubik, inspiran preguntas matemáticas sobre cómo transformar una solución en otra paso a paso. Un ejemplo de ello es la gráfica de re-coloración, en donde cada vértice representa una coloración propia de una gráfica, y hay una arista si las coloraciones correspondientes difieren en un solo vértice. Analizamos propiedades como la conexidad, el grado mínimo y el grado máximo y el diámetro de estas gráficas para tres familias: completas, trayectorias y ciclos.

1. Introducción

Los problemas de configuración son clásicos en matemáticas. Un ejemplo muy conocido es el cubo Rubik, y aunque no todos sepamos resolverlo, comprendemos su objetivo: llegar a la configuración solución desde cualquier otra mediante movimientos válidos. Una de las primeras preguntas que se resolvieron sobre el cubo fue precisamente esta: ¿es posible alcanzar la solución desde cualquier configuración haciendo solo un cambio a la vez? En teoría de gráficas, surgen problemas análogos [3]. Uno de ellos es el de la gráfica de re-coloración, que aparece al estudiar las distintas maneras de colorear los vértices de una gráfica utilizando a lo más k colores. En este contexto, se construye una nueva gráfica cuya estructura refleja el espacio de todas las coloraciones propias: cada vértice representa una coloración válida, y se conectan dos vértices si las coloraciones correspondientes difieren únicamente en el color asignado a un solo vértice. La pregunta natural es entonces: ¿es posible transformar una coloración en otra mediante una secuencia de cambios válidos que modifiquen el color de un solo vértice a la vez? Este tipo de preguntas explora si cambios locales permiten alcanzar una transformación global, una idea fundamental en diversas áreas de las matemáticas.

El problema de colorear vértices es uno de los más estudiados en teoría de gráficas. Su formulación es sencilla, pero su resolución suele requerir creatividad, técnicas computacionales y análisis combinatorio. Este problema ha atraído tanto a matemáticos teóricos como a investigadores en ciencias de la computación, debido a su riqueza estructural y a sus numerosas aplicaciones en campos como redes, optimización, programación de tareas e informática. Más allá de encontrar una coloración óptima, en años recientes ha surgido un enfoque complementario: comprender la estructura del espacio de todas las coloraciones propias. Un aspecto central de este enfoque consiste en medir qué tan cercanas están dos coloraciones, es decir, si es posible pasar de una a otra mediante una secuencia de cambios pequeños, sin violar en ningún momento la condición de coloración propia. Esta dinámica está modelada por la gráfica de re-coloración, definida por L. Cereceda *et al.* en [1], y constituye el objeto central de estudio en este trabajo. Nos enfocamos en las coloraciones propias, es decir, asignaciones de colores a los vértices de una gráfica en las que vértices adyacentes reciben colores distintos. Además, se busca minimizar el número de colores utilizados;

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C76, 05C12, 05C38, 05C69.
Palabras clave. Coloraciones propias, gráfica de re-coloración, problemas de configuraciones.

este valor mínimo se conoce como el número cromático. Determinarlo no es sencillo: en general, se trata de un problema $\mathcal{NP}$-completo[1], si quieres saber más acerca de problemas $\mathcal{NP}$-completos puedes consultar [2]. Ante esta dificultad, se han propuesto numerosas heurísticas computacionales, como algoritmos greedy y técnicas de aproximación.

En este trabajo se presentan algunas propiedades básicas de la gráfica de re-coloración para tres familias fundamentales de gráficas: completas, trayectorias y ciclos, considerando distintos valores del parámetro k, que representa el número máximo de colores permitidos.

2. Definiciones y observaciones

Una gráfica $G = (V(G), A(G))$ consta de un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto de aristas $A(G)$, donde cada arista es un subconjunto de dos vértices distintos. En este trabajo sólo consideramos gráficas simples: no permitimos aristas que conecten un vértice consigo mismo (lazos), ni más de una arista entre dos vértices (aristas múltiples). Decimos que dos vértices $u, v \in V(G)$ son **adyacentes** si están conectados por una arista, es decir, si $\{u, v\} \in A(G)$. En caso contrario, decimos que son **independientes**. La **vecindad** de un vértice v se define como el conjunto de todos los vértices que son adyacentes a él: $N(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in A(G)\}$. El **grado** de un vértice v, denotado $d(v)$, es simplemente el número de vértices en su vecindad: $d(v) = |N(v)|$. Una gráfica es **r-regular** si todos los vértices de la gráfica tienen grado igual a r. Un **camino** en una gráfica es una sucesión de vértices $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ tal que cada par consecutivo está conectado por una arista: $\{v_i, v_{i+1}\} \in A(G)$ para $0 \leq i < k$. Si ningún vértice se repite, el camino se llama una **trayectoria**; denotamos por P_k a la trayectoria con k vértices. Un **ciclo** es una trayectoria al que le agregas una arista entre el primer vértice y el último vértice. El ciclo con k vértices se denota por C_k. La **longitud** de un camino es el número de aristas que contiene; por lo tanto, una trayectoria P_k tiene longitud $k-1$, y un ciclo C_k tiene longitud k. Si hay una trayectoria entre cualquier par de vértices, decimos que la gráfica es **conexa**. La **distancia** entre dos vértices u y w es la longitud de la trayectoria más corta que los conecta, y el **diámetro** de una gráfica conexa es la mayor de todas las distancias posibles entre pares de vértices: $\operatorname{diam}(G) = \max\{\operatorname{dist}(u, w) \mid u, w \in V(G)\}$. Si una gráfica G no es conexa, diremos que una subgráfica de G es una componente conexa si al agregar cualquier otro vértice o arista deja de ser una subgráfica conexa (una subgráfica conexa maximal). Una **coloración propia** de los vértices de una gráfica G es una función $\varphi : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que vértices adyacentes reciben colores distintos. Siempre es posible encontrar una coloración propia usando $|V(G)|$ colores, simplemente asignando un color diferente a cada vértice. Si una coloración usa a lo más k colores, la llamamos **k-coloración**. Dadas dos k-coloraciones φ_1 y φ_2 de una gráfica G, diremos que son distintas si existe al menos un vértice v tal que $\varphi_1(v) \neq \varphi_2(v)$. Una herramienta útil para estudiar coloraciones es el **polinomio cromático**, que cuenta cuántas coloraciones propias, con a lo más k colores, existen de una gráfica G y es denotado por $\mathcal{P}(G; k)$. Para poder construir el polinomio cromático, necesitamos definir dos operaciones llamadas borrar y contraer. Dado una gráfica G y una arista $a \in A(G)$, la operación **borrar** la arista a, denotado $G - a$, consiste en eliminar la arista a del conjunto de aristas de G, mientras que el resultdo de la operación **contraer** la arista $a = \{u, v\}$, denotado $G/\{u, v\}$ es la gráfica que se obtiene al reemplazar vértices u y v por un vértice nuevo w, y conectar w con todos los vecinos de u y v: $N(w) = N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$. Utilizando esta operación y la eliminación de aristas, se obtiene la siguiente versión del teorema del polinomio cromático, conocido como "**borrar y contraer**".

[1]Un problema es $\mathcal{NP}$-completo si su solución puede verificarse eficientemente, y si todos los problemas en $\mathcal{NP}$ pueden reducirse a él. Resolver uno de estos problemas eficientemente implicaría resolver todos los demás de forma eficiente.

La idea intuitiva de la prueba del siguiente teorema es que cuando eliminas la arista $\{u, v\}$ permites que los vértices u y v tengan el mismo color, por lo que debes restar el número de coloraciones en donde u y v comparten el mismo color, y eso lo puedes hacer identificando los dos vértices y así obligándolos a tener el mismo color.

TEOREMA 1. *Sea G una gráfica, $a = \{u, v\}$ una arista de G y k un entero positivo. Entonces el número de k-coloraciones de G es:*

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

Demostración. Sea $G = (V, A)$, $a = \{u, v\} \in A$, y k un entero positivo. Observa que en $G - a$, los vértices u y v ya no están conectados, por lo tanto, pueden tener el mismo color. Así, $\mathcal{P}(G - a; k)$ cuenta todas las coloraciones propias de G tanto las coloraciones donde u y v tienen colores distintos como aquellas en que tienen el mismo color.

Ahora bien, si forzamos que u y v tengan el mismo color, podemos representarlo mediante la contracción G/a. El número de esas coloraciones es $\mathcal{P}(G/a; k)$. Restando estas de las de $G - a$, obtenemos exactamente las coloraciones en donde u y v tienen colores distintos, que son justo las coloraciones propias de G:

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

□

Dada una gráfica H y un número de colores k, la **gráfica de re-coloración** de una gráfica H, denotada $G^k(H)$, es la gráfica cuyos vértices son todas las k-coloraciones propias de H. Por lo tanto, su número de vértices es exactamente $\mathcal{P}(H; k)$. Sean u_1 y u_2 vértices de $G^k(H)$ y sean φ_1 y φ_2 las coloraciones correspondientes de H. Los vértices u_1 y u_2 son adyacentes si las coloraciones φ_1 y φ_2 difieren en exactamente un vértice de la gráfica H. Dos coloraciones están conectadas por una arista en $G^k(H)$ si difieren en el color de un solo vértice. Para visualizar este concepto, en la figura 1 mostramos cuatro coloraciones distintas de la trayectoria P_5. Las primeras dos coloraciones, φ_1 y φ_2, usan sólo dos colores. La segunda coloración no es adyacente a ninguna de las otras tres coloraciones, mientras que la coloración φ_3 es adyacente tanto a φ_1 (difieren en el color de v_3) como a φ_4 (difieren en v_5).

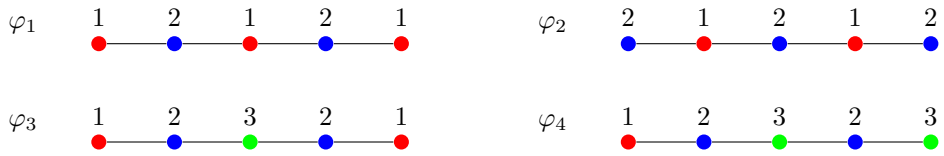


FIGURA 1. Coloraciones de una trayectoria con 2 o 3 colores

Si usamos tres colores, entonces en las coloraciones φ_1 y φ_2 de la figura 1, cada vértice puede cambiar su color al color 3 (verde) sin violar las condiciones de una coloración propia, mientras que en la coloración φ_3 de la figura 1, los dos vértices que tienen el color 2 (azul) no permiten ningún cambio válido de color, ya que son adyacentes tanto a un vértice de color 1 (rojo) como un vértice de color 2 (azul). De manera general, es fácil ver que podemos cambiar el color de un vértice $v \in V(H)$ si el número total de colores k es mayor que el número de colores distintos usados en v y sus vecinos. En particular, podemos asegurar que el color de un vértice v puede cambiar si $k > d(v)+1$. Definimos el conjunto de colores bloqueados de un vértice v, denotado $B(v)$, como el conjunto de colores que aparecen en v y en sus vecinos. Con esta definición, podemos establecer dos observaciones sencillas pero útiles.

Observación 1. Sea $v \in V(H)$. El vértice v permite exactamente $k - |B(v)|$ posibles cambios de color.

Dado que $|B(v)| \leq d(v)+1$, obtenemos la siguiente cota inferior, más simple de calcular pero menos precisa: el vértice v permite al menos $k - (d(v) + 1)$ cambios de color. Como en la gráfica de re-coloración dos vértices están conectados si las coloraciones que representan difieren en exactamente un vértice, la vecindad de un vértice en esta gráfica corresponde a todas las coloraciones que se pueden obtener cambiando el color de un solo vértice. Esto nos da la siguiente observación:

Observación 2. El grado de un vértice w en la gráfica de re-coloración es igual al número de cambios posibles en la coloración asociada a ese vértice.

$$d(w) = \sum_{v \in V(H)} k - |B(v)|.$$

3. La gráfica de re-coloración de una gráfica vacía o completa

Comenzamos con las dos estructuras más simples en teoría de gráficas: las gráficas vacías y las gráficas completas. Una gráfica con n vértices es una **gráfica vacía** si no tiene ninguna arista y la denotamos $\overline{K}_n$. Como la gráfica no tiene aristas, cualquier coloración de los vértices es una coloración propia, por lo que $\mathcal{P}(\overline{K}_n) = k^n$, además, podemos cambiar el color de un vértice a cualquier otro color sin violar la condición de coloración propia. Por la observación 2, cualquier vértice $w \in V(G^k(\overline{K}_n))$ tiene grado $n(k-1)$. Como el color de un vértice puede ser cambiado por cualquier otro, la distancia más grande entre vértices de la gráfica $G^k(\overline{K}_n)$ es igual a n y se alcanza justo entre dos coloraciones φ y φ' donde ningún vértice conserva su color, es decir, para todo $w \in V(\overline{K}_n)$, $\varphi(w) \neq \varphi'(w)$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2. *La gráfica de re-coloración $G^k(\overline{K}_n)$ es una gráfica $n(k-1)$-regular con k^n vértices y diámetro n.*

Una gráfica con n vértices es una **gráfica completa** si todo par de vértices está conectado por una arista, y la denotamos K_n. En una coloración propia de K_n, es necesario usar un color distinto para cada vértice, ya que cualquier par de vértices son adyacentes. Por lo tanto, si $k \geq n$, el número de coloraciones propias posibles de K_n con a lo más k colores es igual al número de formas de ordenar n colores tomados sin repetición de un conjunto de k colores, y la gráfica de re-coloración $G^k(K_n)$ tiene $\dfrac{k!}{(k-n)!}$ vértices.

Queremos demostrar que la gráfica de re-coloración de una gráfica completa es una gráfica regular. Recordemos, por la observación 2, que el grado de un vértice en la gráfica de re-coloración coincide con el número de cambios de color válidos que pueden hacerse en su coloración correspondiente.

Proposición 3. *Sea $k \geq n$. La gráfica de re-coloración $G^k(K_n)$ tiene $\dfrac{k!}{(k-n)!}$ vértices y es $n(k-n)$-regular.*

Demostración. Para probar que la gráfica es $n(k-n)$-regular, basta probar que $\delta(G^k(K_n)) = \Delta(G^k(K_n)) = n(k-n)$. Una coloración propia arbitraria de la gráfica K_n corresponde a un vértice arbitrario en $G^k(K_n)$. Como en toda coloración propia de K_n se usan n colores distintos, y hay k colores disponibles, entonces para cada uno de los n vértices hay $k-n$ colores disponibles para cambiar el color actual (evitando repetir alguno ya usado por los otros $n-1$ vértices). Como tenemos n vértices y para

cada uno hay $k-n$ opciones válidas de re-coloración, por la observación 2, el número total de coloraciones adyacentes, es decir, el grado de cualquier vértice, es $n(k-n)$. □

Si coloreamos K_n usando exactamente n colores, entonces, por la observación 1, no es posible cambiar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia, por lo que la gráfica de re-coloración $G^n(K_n)$ es la gráfica vacía con $n!$ vértices.

4. La gráfica de re-coloración de una trayectoria

En esta sección analizamos la gráfica de re-coloración de una trayectoria. En la sección 2 se mostraron algunos ejemplos de coloraciones propias de la trayectoria con 5 vértices y se mencionaron algunas de sus adyacencias. Comenzamos considerando el caso en que la trayectoria se colorea con sólo dos colores.

Proposición 4. *Sea $n \geq 2$. La gráfica de re-coloración de P_n con dos colores es una gráfica con dos vértices no adyacentes, es decir,*

$$G^2(P_n) \cong \overline{K}_2.$$

Demostración. Si coloreamos los vértices de la trayectoria P_n con únicamente dos colores, entonces existen exactamente dos coloraciones propias (véase φ_1 y φ_2 en la figura 1):

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2m+1; \\ 2 & \text{si } i = 2m, \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 2m+1; \\ 1 & \text{si } i = 2m. \end{cases}$$

En ambas coloraciones, cada vértice es adyacente a al menos un vértice del color opuesto, por lo que no es posible modificar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia. Así, la gráfica de re-coloración consta de dos vértices no adyacentes. □

El caso de colorear con sólo dos colores tiene un comportamiento atípico. A partir de aquí, asumimos que se dispone de al menos tres colores.

Para comprender mejor el caso general, consideramos primero la trayectoria P_3 con tres colores.

Ejemplo 1. Una coloración de P_3 con tres colores puede representarse como una terna (a, b, c) sin repeticiones consecutivas. En la figura 2, cada sucesión de números representa una coloración usando los colores $\{0, 1, 2\}$, donde la posición indica el vértice correspondiente.

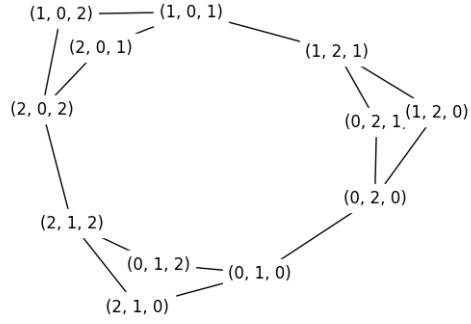


Figura 2. La gráfica de re-coloración de P_3 con $k = 3$

Antes de analizar la estructura de la gráfica de re-coloración, determinamos el número de vértices, así como su grado mínimo y máximo. Posteriormente, probamos que la gráfica es conexa si $k \geq 3$, y calculamos su diámetro.

El siguiente resultado nos ayuda a determinar el número exacto de vértices de la gráfica de re-coloración de una trayectoria.

PROPOSICIÓN 5. *El número de coloraciones propias de P_n con k colores es $k(k-1)^{n-1}$.*

Demostración. El primer vértice puede recibir cualquiera de los k colores. Cada vértice posterior sólo tiene un vecino previamente coloreado, por lo que hay $k-1$ opciones para cada uno. El resultado se obtiene multiplicando: $k(k-1)^{n-1}$. □

Para facilitar la comprensión del teorema 6, que establece el **grado mínimo** δ y el **grado máximo** $\boldsymbol{\Delta}$ de la gráfica de re-coloración de una trayectoria, probamos primero el caso particular en que $k = 3$. La gráfica $G^3(P_3)$ de la figura 2 puede servir como apoyo para visualizar los argumentos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. El grado mínimo y el grado máximo de la gráfica de re-coloración de P_n con tres colores es 2 y n respectivamente:

$$\delta(G^3(P_n)) = 2 \quad y \quad \Delta(G^3(P_n)) = n.$$

Sea $P_n = (v_1, \ldots, v_n)$ la trayectoria con n vértices y considera una coloración propia de los vértices con colores del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Por la observación 2, el grado de un vértice en $G^3(P_n)$ es la suma del número de cambios de color válidos de sus vértices.

Caso 1: Sea v un vértice de grado 1, entonces v tiene un solo vecino. Supongamos que su color es a y el del vecino es $b \neq a$. El único color posible para el cambio es $c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b\}$. Observa que siempre es posible cambiar el color del vértice v del color a al color c.

Caso 2: Sea v un vértice de grado 2 en P_n, entonces v tiene exactamente dos vecinos. Sea $a \in \{1, 2, 3\}$ el color de v y sean $x, y \in \{1, 2, 3\}$ los colores de los vecinos de v, como φ es una coloración propia, $a \neq x, y$. Si $x \neq y$, entonces no hay ningún color disponible para cambio de color de v. Si los vecinos tienen el mismo color, entonces hay exactamente un color disponible distinto de a y distinto del color $x = y$.

En el primer caso, el vértice de P_n siempre permite un cambio de color y en el segundo caso el vértice de P_n permite a lo más un cambio de color. Como la trayectoria tiene dos vértices de grado 1, el grado de un vértice (una coloración) en $G^3(P_n)$ es al menos 2 y a lo mas n. El vértice correspondiente a la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$ tiene grado 2, mientras que el vértice correspondiente a la coloración $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ tiene grado n y el resultado se sigue.

Ahora generalizamos el resultado del ejemplo 2 a cualquier $k \geq 3$:

TEOREMA 6. *Para P_n con $k \geq 3$, se cumple que*

$$\delta(G^k(P_n)) = n(k-3) + 2 \quad y \quad \Delta(G^k(P_n)) = n(k-2).$$

Demostración. Los vértices de grado 1 tienen $k-2$ opciones de cambio de color, mientras que los vértices de grado 2 tienen $k-3$ o $k-2$ opciones de cambio de color. Así, el número mínimo de cambios es: $2(k-2) + (n-2)(k-3) = kn - 3n + 2$ y el máximo número de cambios es $n(k-2)$ y se alcanza cuando todos los vértices admiten $k-2$ cambios.

Vamos a mostrar dos coloraciones en donde estos valores se alcanzan. En la coloración $(i, j, k, i, j, k, \ldots)$ donde i, j y k son colores distintos del conjunto de k colores, nos

aseguramos que cada vértice tenga su número mínimo de cambios: $kn-3n+2$, mientras que la coloración $(i, j, i, j, \dots)$, donde i y j son elementos distintos del conjunto de k colores, nos aseguramos que cada vértice tenga su número máximo de cambios: $(k-2)$. Por lo que $\delta(G^k(P_n)) = n(k-3)+2$ y $\Delta(G^k(P_n)) = n(k-2)$. □

Finalmente, establecemos una cota inferior para el diámetro de la gráfica de re-coloración, encontrando dos coloraciones que requieren un gran número de pasos para transformar una coloración en la otra.

TEOREMA 7. *Si $k \geq 3$, entonces*

$$\operatorname{diam}(G^k(P_n)) \geq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Demostración. Como el diámetro corresponde a la máxima distancia entre pares de vértices en la gráfica, para establecer una cota inferior, basta con exhibir dos coloraciones φ y φ' en $G^k(P_n)$ tales que $\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$. A continuación definimos ambas coloraciones y explicamos por qué se requieren exactamente $n+\lfloor n/2 \rfloor$ pasos para transformar una en la otra.

Sea t el índice del paso en la secuencia de re-coloraciones y sea φ_t la coloración en el paso t; así φ_0 corresponde a la coloración inicial. Consideramos la trayectoria $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y definimos las siguientes coloraciones:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi'(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Observamos que no es posible cambiar directamente el color de un vértice v_{impar} de 1 a 2 (pues sus vecinos tienen color 2), ni el de un vértice v_{par} de 2 a 1 (pues sus vecinos tienen color 1), es necesario introducir un color temporal, el color 3. Como no podemos cambiar directamente el color de la coloración φ al color de la coloración φ' en ninguno de los vértices de la trayectoria P_n, entonces hace falta cambiar el color en a coloración φ al color temporal (color 3) en al menos la mitad de los vértices de la trayectoria. Observamos que después de cambiar el color de un vértice al color 3, todavía falta cambiarle el color al color de φ'; por lo tanto, en $G^3(P_n)$ se cumple

$$\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor .$$

Queremos probar que en $G^3(P_n)$ se cumple $\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$. Como el número de vértices de índice par es a lo más igual al número de vértices de índice impar, para minimizar el número de pasos, colocamos el color temporal en los vértices pares. Sea $\varphi_0 = \varphi$. En el paso $t = \lfloor n/2 \rfloor$ obtenemos:

$$\varphi_{\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, cambiamos los vértices de índice impar del color 1 al color 2. Así, en el paso $t = n$, tenemos la coloración

$$\varphi_n(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Finalmente, en los pasos restantes, volvemos a colorear los vértices pares, ahora del color 3 al color 1, y en el paso $t = n + \lfloor n/2 \rfloor$ obtenemos la coloración

$$\varphi_{n+\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases}$$

que coincide con la coloración φ'.

Por lo tanto, transformar φ en φ' requiere exactamente $n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pasos, y como $\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$, concluimos que $\operatorname{diam}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor$. □

Este proceso ilustra cómo ciertos cambios globales requieren introducir colores temporales. Esta técnica se usará también para analizar ciclos y otras familias de gráficas.

5. La gráfica de re-coloración de un ciclo

Si el ciclo tiene longitud par, puede colorearse con dos colores. En este caso, se cumple el siguiente resultado. Omitimos su prueba ya que es análoga a la prueba de la proposición 4.

Proposición 8. *La gráfica de re-coloración de C_{2n} con dos colores es una gráfica con dos vértices independientes,*

$$G^2(C_{2n}) \cong \overline{K}_2.$$

Para determinar el número de vértices de la gráfica de re-coloración de un ciclo, calculamos su polinomio cromático.

Proposición 9. *El número de coloraciones propias de un ciclo C_n con k colores es*

$$\mathcal{P}(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de vértices del ciclo.

Caso base: Para $n = 3$ tenemos que $C_3 \cong K_3$. Por la proposición 3, se tiene que $\mathcal{P}(C_3; k) = k(k-1)(k-2)$, y como $(k-1)^3 + (-1)^3(k-1) = (k-1)((k-1)^2 - 1) = (k-1)k(k-2)$, el caso base satisface la propiedad.

Hipótesis inductiva: Supongamos que, para algún $n \geq 3$, se cumple que

$$\mathcal{P}(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Paso inductivo: Verificamos que la fórmula también se cumple para $n+1$. Aplicamos la regla de contracción-borrado del teorema 1, la cual establece:

$$\mathcal{P}(C_{n+1}, k) = \mathcal{P}(C_{n+1} - a, k) - \mathcal{P}(C_{n+1}/a, k),$$

donde a es una arista de C_{n+1}. Notamos que $C_{n+1} - a = P_{n+1}$ y $C_{n+1}/a = C_n$, por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C_{n+1}, k) &= \mathcal{P}(P_{n+1}, k) - \mathcal{P}(C_n, k) \\ &= k(k-1)^n - ((k-1)^n + (-1)^n(k-1)) \\ &= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, el resultado se sigue. □

Ya establecido el número de vértices de $G^k(C_n)$ procedemos a determinar el grado mínimo y máximo según el valor de k y la paridad del ciclo.

Proposición 10. *Sea $G^k(C_n)$ la gráfica de re-coloración del ciclo C_n con k colores. Si $k \geq 4$, entonces el grado mínimo es $\delta(G^k(C_n)) = n(k-3)$. Además, para $m \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\delta(G^3(C_n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 3m; \\ 1, & \text{si } n = 3m+1; \\ 2, & \text{si } n = 3m+2. \end{cases}$$

Demostración. Como cada vértice de C_n tiene grado 2, el vértice y sus vecinos usan a lo más 3 colores. Por la observación 1, cada vértice permite al menos $k-3$ cambios de color, y por la observación 2, el grado mínimo es al menos $n(k-3)$.

Caso 1: Sea $k \geq 4$. Si $n = 3m$, la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3)$ tiene grado $n(k-3)$, ya que cada vértice permite exactamente $k-3$ cambios. Si $n = 3m+1$, la coloración $(4, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3)$ cumple lo mismo. Si $n = 3m+2$, la coloración $(4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$ también tiene grado $n(k-3)$.

Caso 2: Sea $k = 3$. Si $n = 3m$, la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$ tiene grado 0, pues ningún vértice admite cambios. Si $n = 3m+1$, la coloración $(2, 1, 2, 3, \ldots)$ tiene grado 1, ya que sólo el segundo vértice permite un cambio. Si $n = 3m+2$, la coloración $(1, 2, 1, 2, 3, \ldots)$ tiene grado 2, con cambios posibles sólo en el segundo y en el tercer vértices. □

PROPOSICIÓN 11. *Sea $G^k(C_n)$ la gráfica de re-coloración del ciclo C_n con $k \geq 3$ colores. Entonces:*

$$\Delta(G^k(C_n)) = \begin{cases} n(k-2) & \text{si } n \text{ es par;} \\ (n-3)(k-2) + 3(k-3) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Dado que cada vértice tiene grado 2, el número de colores usados por él y sus vecinos es al menos 2 y a lo mas 3, por lo tanto, cada vértice admite a lo más $k-2$ cambios de color. Por la observación 2, el grado máximo de un vértices en $G^k(C_n)$ es a lo más $n(k-2)$.

Caso 1: Si n es par, la coloración $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ alcanza el grado máximo $n(k-2)$, pues cada uno de los n vértices del ciclo permite $k-2$ cambios.

Caso 2: Si n es impar, toda coloración propia requiere al menos tres colores. Tomemos una coloración donde sólo tres vértices consecutivos usan tres colores distintos, y el resto alterna dos colores $(3, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2)$. En esta coloración, los vértices que tienen vecinos del mismo color admiten $k-2$ cambios, y los que tienen vecinos de colores distintos admiten $k-3$. Hay al menos tres vértices en esta situación (el de color diferente y sus dos vecinos), es decir, 3 de los n vértices permiten sólo $k-3$ cambios y el resto permiten $k-2$ cambios. Por la observación 2, tenemos que:

$$\Delta(G^k(C_n)) = (n-3)(k-2) + 3(k-3).$$

□

De forma análoga al caso de las trayectorias (teorema 7), para establecer una cota inferior para el diámetro, basta encontrar dos coloraciones que están a distancia grande.

TEOREMA 12. *Sea C_n un ciclo. Si $k \geq 3$ cuando n es par, y $k \geq 4$ cuando n es impar, entonces*

$$\operatorname{diam}(G^k(C_n)) \geq \begin{cases} n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Sea C_n un ciclo y k el número de colores, con $k \geq 3$ si n es par y $k \geq 4$ si n es impar. Basta encontrar dos coloraciones φ, φ' tales que

$$\operatorname{dist}(\varphi, \varphi') = \begin{cases} n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Caso 1: Si n es par, el ciclo puede colorearse alternando dos colores. Sea

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ par,} \end{cases} \qquad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ par.} \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento análogo al de la trayectoria, llegamos a que requerimos cambiar el color en a coloración φ al color temporal en al menos la mitad de los vértices y siguiendo el proceso de re-coloración para la trayectoria podemos concluir que se requieren exactamente $n + \lfloor n/2 \rfloor$ pasos para transformar φ en φ'.

Caso 2: Si n es impar, se requiere al menos un vértice de un tercer color. Considere las coloraciones:

$$\varphi = (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2, 3), \quad \varphi' = (3, 1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2).$$

Los colores 3 de φ y φ' están asignados a vértices adyacentes. Además, todos los vértices con color 1 son adyacentes a vértices de color 2 y viceversa, por lo que inicialmente no se puede hacer ningún cambio directo. Aplicando un procedimiento similar al de la trayectoria (usando el color 3 como color temporal), se requieren exactamente $n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ pasos para transformar φ en φ', como se deseaba. □

5.1. Coloreando ciclos con tres colores. La gráfica de re-coloración de un ciclo con tres colores resulta ser disconexa. Primero observemos que, si la longitud del ciclo es múltiplo de 3, entonces, por la observación 1, en las siguientes coloraciones no es posible realizar ningún cambio de color en ninguno de los vértices:

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots, 1, 2, 3), \quad (3, 1, 2, 3, 1, 2, \ldots, 3, 1, 2), \quad (2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots, 2, 3, 1),$$

$$(1, 3, 2, 1, 3, 2, \ldots, 1, 3, 2), \quad (2, 1, 3, 2, 1, 3, \ldots, 2, 1, 3), \quad (3, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots, 3, 2, 1).$$

Por la proposición 9, el número de vértices de la gráfica de re-coloración crece rápidamente con n. A continuación, analizamos el caso del ciclo de longitud 5, y posteriormente presentamos una conjetura basada en los resultados de un análisis computacional para encontrar el número de componentes de la gráfica $G^3(C_n)$.

Ejemplo 3. Consideremos el ciclo C_5, es decir, un ciclo con 5 vértices. Por la proposición 9, el número de coloraciones propias es $2^5 - 2 = 30$; por lo tanto, la gráfica de re-coloración $G^3(C_5)$ tiene 30 vértices. De acuerdo con las proposiciones 10 y 11, la gráfica $G^3(C_5)$ es 2-regular, y por tanto consiste en una o varias componentes cíclicas.

Consideremos la coloración $\varphi_1 = (1, 2, 1, 2, 3)$. La subgráfica inducida por los cambios de color válidos desde φ_1 forma un ciclo de longitud 15. Las siguientes coloraciones son justo los vértices del ciclo de longitud 15, en cada coloración, el color en negritas indica el vértice cuyo color será modificado:

$$(1, 2, \mathbf{1}, 2, 3), \quad (1, 2, 3, \mathbf{2}, 3), \quad (1, 2, 3, 1, \mathbf{3}), \quad (\mathbf{1}, 2, 3, 1, 2), \quad (3, \mathbf{2}, 3, 1, 2),$$
$$(3, 1, \mathbf{3}, 1, 2), \quad (3, 1, 2, \mathbf{1}, 2), \quad (3, 1, 2, 3, \mathbf{2}), \quad (\mathbf{3}, 1, 2, 3, 1), \quad (2, \mathbf{1}, 2, 3, 1),$$
$$(2, 3, \mathbf{2}, 3, 1), \quad (2, 3, 1, \mathbf{3}, 1), \quad (2, 3, 1, 2, \mathbf{1}), \quad (\mathbf{2}, 3, 1, 2, 3), \quad (1, \mathbf{3}, 1, 2, 3).$$

Observamos que la coloración $\varphi_2 = (2, 1, 2, 1, 3)$ no aparece en este ciclo. Los cambios de color válidos desde φ_2 generan, de manera análoga, otro ciclo disjunto de longitud 15. Por lo tanto, $G^3(C_5)$ está compuesto por dos ciclos disjuntos de longitud 15.

Se realizó una exploración asistida por computadora para determinar el número de componentes conexas de la gráfica de re-coloración $G^3(C_n)$. Con base en los resultados observados, se propone la siguiente conjetura:

CONJETURA 13. *El número de componentes de $G^3(C_n)$ es:*

$$\#\textit{Componentes de } G^3(C_n) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{n-1}{3} \right\rceil, & \textit{si } n \not\equiv 0 \pmod 3; \\ \left\lfloor \dfrac{n-3}{3} \right\rfloor + 6, & \textit{si } n \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

6. DISCUSIÓN

Las trayectorias y los ciclos pares son ejemplos de gráficas bipartitas. Una gráfica es bipartita si y sólo si tiene número cromático igual a dos, los árboles son otra clase interesante de gráficas bipartitas. De la misma manera en que probamos que la gráfica de re-coloración de la trayectoria es $\overline{K}_2$, podemos probar el siguiente resultado general.

TEOREMA 14. *Sea H una gráfica bipartita conexa. Entonces $G^2(H) \cong \overline{K}_2$.*

Para el caso en que el número cromático de una gráfica sea igual a 3, determinamos que la gráfica de re-coloración de un ciclo con 3 colores es disconexa: es una gráfica vacía (sin aristas) en el caso del triángulo C_3, tiene vértices aislados si el número de vértices del ciclo es múltiplo de 3, sin importar si es un ciclo de longitud par o impar; y el número de componentes conexas de gráfica de re-coloración crece conforme va creciendo el número de vértices. Observemos que la gráfica de re-coloración de los ciclos de longitud $6n$ es disconexa tanto si usamos 2 como si usamos 3 colores, mientras que la gráfica de re-coloración de cualquier ciclo es conexa si usamos al menos 4 colores.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a las Unidades de Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025 así como al árbitro anónimo.

REFERENCIAS

[1] L. Cereceda, J. van den Heuvel, M. Johnson, Connectedness of the graph of vertex-colourings, Discrete Mathematics 308 (2008) 913–919.
[2] M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Company, 1979.
[3] J. van den Heuvel, The Complexity of Change, Surveys in combinatorics 409 (2013), 127–160.

Romina Barcena Morales
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: romina.barcena@cua.uam.mx

Emilio Yedidia Licea Mesino
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2213009504@izt.uam.mx

David Dan López Contreras
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2182018437@izt.uam.mx

Mika Olsen
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: olsen@cua.uam.mx

Lizzeth Ariadna Sánchez Solis
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: lizzeth.sanchez@cua.uam.mx

MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 289-345.
Recibido 27-02-2025. Aceptado 22-09-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/raadm



LA GEOMETRÍA DE LA MECÁNICA CLÁSICA. EL FORMALISMO GEOMÉTRICO CON UN ENFOQUE FÍSICO

RAFAEL LEONARDO AZUAJE HIDALGO
ADRIÁN MAURICIO ESCOBAR RUIZ

Resumen. El propósito de estas notas de clase es exponer el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica de manera accesible, pero sin comprometer la correspondiente rigurosidad matemática. Están dirigidas a estudiantes de posgrado y de los últimos años de nivel licenciatura en ciencias físico-matemáticas, así como a profesores e investigadores que busquen una introducción concisa a este formalismo. Para su comprensión, se requiere un conocimiento básico de álgebra lineal, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales. Estas notas son el resultado de los cursos (*i*) Mecánica y Caos (posgrado) y (*ii*) Temas Selectos de Mecánica Analítica (posgrado y licenciatura), impartidos por los autores en múltiples ocasiones durante el periodo 2023-2025, en la Licenciatura y Posgrado en Física de la UAM-I. El material incluye numerosos ejemplos desarrollados de forma explícita, así como referencias que contribuyen a una exposición clara y completa. Se incluyen algunos resultados originales.

Introducción

La Mecánica Clásica se centra en la descripción de la evolución temporal de sistemas físicos cuyo estado futuro y pasado está completamente determinado por sus condiciones iniciales, es decir, por las posiciones y velocidades iniciales de todos los puntos del sistema. A estos sistemas se les denomina sistemas mecánicos (clásicos). El espacio fase de un sistema mecánico es el conjunto de todas las configuraciones posibles de posiciones y velocidades del sistema [1]. Poincaré fue quien introdujo la visión de un sistema mecánico como un campo de vectores en el espacio fase, donde cada trayectoria es una curva diferenciable cuyo vector de velocidad en cada punto coincide con el vector asignado por el campo. Esta formulación lo llevó a la noción de variedad diferencial como estructura del espacio fase en Mecánica Clásica [2]. El enfoque geométrico de la Mecánica Clásica tiene una extensa trayectoria, iniciando con los trabajos de Arnold [3] y de Abraham y Marsden [2], y sigue siendo un área de investigación activa.

Los sistemas Hamiltonianos constituyen una clase particular de sistemas mecánicos en variedades diferenciales, donde la dinámica está gobernada por un campo vectorial Hamiltoniano. En este contexto, la función Hamiltoniana del sistema representa su energía mecánica total, y la evolución del sistema está determinada por la estructura geométrica del espacio fase. Estos campos vectoriales Hamiltonianos se construyen a partir de una estructura geométrica adicional en la variedad diferencial. En efecto, las estructuras geométricas en Mecánica Clásica se definen mediante herramientas tensoriales, aunque también pueden describirse en términos algebraicos a través de paréntesis o corchetes (operaciones algebraicas no asociativas en espacios vectoriales o módulos) en el espacio de funciones diferenciables. En particular, las estructuras de Poisson, y especialmente aquellas inducidas por formas simplécticas, proporcionan el marco geométrico natural para el espacio fase en Mecánica Clásica.

A lo largo de la historia, la física y la geometría han evolucionado de manera interdependiente. Desde la formulación de la mecánica newtoniana, el formalismo vectorial

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53D05, 53Z05, 53D22, 70G45, 70H06.
Palabras clave. Sistemas Hamiltonianos, estructuras geométricas, variedades simplécticas, campos vectoriales Hamiltonianos, transformaciones canónicas geométricas.

de la geometría euclidiana ha sido una herramienta esencial para la descripción de sistemas físicos. En su desarrollo moderno, la Mecánica Clásica adopta el lenguaje de la geometría diferencial, en particular de la geometría simpléctica. En la física relativista, muchos objetos físicos se representan matemáticamente mediante tensores, y los fenómenos que los involucran se describen a través de operaciones tensoriales. Los tensores juegan un papel fundamental en la teoría de la relatividad general de Einstein, donde el campo gravitatorio se modela geométricamente mediante una variedad pseudoriemanniana con una métrica definida por el tensor métrico, lo que da lugar a la noción de espacio-tiempo. Asimismo, la Mecánica Cuántica ha desarrollado formulaciones geométricas basadas en la geometría simpléctica. Debido a la relevancia geométrica del tema abordado, estas notas incluyen una introducción concisa a los principales objetos de la geometría diferencial aplicados a la Mecánica Clásica, tales como variedades diferenciales, vectores tangentes, campos vectoriales, tensores y formas diferenciales.

La estructura de estas notas es la siguiente: en la primera sección (1), se presenta un repaso de álgebra lineal y cálculo vectorial con el propósito de refrescar los conceptos clave y establecer la notación utilizada. Desde la sección 2 hasta la sección 7, se ofrece una revisión rigurosa de los principales objetos de la geometría diferencial, sin incluir demostraciones de resultados bien establecidos. A lo largo de este desarrollo, se destaca la profunda relación entre la física y la geometría diferencial, ilustrando mediante ejemplos y comentarios cómo la geometría diferencial encuentra aplicaciones en la física, y cómo la física ha influido en el desarrollo de la geometría diferencial. Un lector con conocimientos previos en geometría diferencial puede omitir estas secciones y dirigirse directamente a la sección 8, donde se introduce el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica Hamiltoniana. No obstante, en la subsección 3.5 se incluye una breve introducción al formalismo geométrico de la Mecánica Lagrangiana, en la subsección 5.3 se presentan formalmente los sistemas mecánicos en variedades diferenciales, y en la subsección 6.3 se ofrece una introducción a las estructuras geométricas de Poisson. En la sección 9, se estudian las transformaciones canónicas desde el enfoque geométrico, estableciendo la conexión con la descripción local en coordenadas, marco frecuentemente adoptado en la comunidad física. Finalmente, en la sección 10, se introduce de manera informal algunos formalismos geométricos más generales en Mecánica Clásica, que permiten la descripción geométrica de sistemas no autónomos o disipativos. Entre ellos, se incluyen las estructuras de Poisson definidas por estructuras cosimplécticas, las cuales constituyen un caso particular de las estructuras presimplécticas (de rango no máximo), así como las estructuras de Jacobi, que no satisfacen la regla de Leibniz. También en esta última sección se da una breve introducción a la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica.

Estas notas constituyen una herramienta educativa valiosa para estudiantes, docentes e investigadores en Mecánica Clásica. En general, los textos de geometría diferencial tienden a omitir los aspectos físicos, mientras que los libros de Mecánica Clásica rara vez presentan el formalismo geométrico de manera accesible para estudiantes de licenciatura. Por ejemplo, aunque el texto clásico de Arnold [3] es una referencia fundamental, su nivel de abstracción lo hace difícil de seguir sin una sólida preparación matemática. Además, en estas notas se incluyen desarrollos de investigaciones modernas, tal es el caso de las secciones 9 y 10. En la primera de estas secciones se ofrece una exposición unificada del enfoque geométrico y de la descripción en coordenadas de las transformaciones canónicas, proporcionando una visión integral tanto de los aspectos locales como globales de estas estructuras; y en la última sección se presentan de manera breve formalismos geométricos para estudios avanzados en Mecánica Clásica, dichos formalismos son objetos centrales en muchas investigaciones recientes.

Índice

Introducción 289
1. Preliminares 292
1.1. Repaso de álgebra lineal 292
1.2. Repaso de cálculo vectorial 293
2. Variedades diferenciales 294
2.1. Estructuras diferenciales 295
2.2. Funciones y mapeos diferenciables 297
2.3. Subvariedades 298
3. Vectores tangentes 299
3.1. Vectores tangentes en el espacio Euclidiano 299
3.2. Vectores tangentes en una variedad diferencial 299
3.3. Vector velocidad de una curva 300
3.4. Fibrado tangente y la diferencial de un mapeo diferenciable 301
3.5. Sistemas Lagrangianos 302
4. Grupos y álgebras de Lie 303
4.1. Grupos de Lie 303
4.2. Álgebras de Lie 305
5. Campos vectoriales 306
5.1. Campos vectoriales diferenciables 306
5.2. Curvas integrales 307
5.3. Sistemas mecánicos 309
6. Tensores 311
6.1. Tensores en un espacio vectorial 312
6.2. Campos tensoriales en una variedad 313
6.3. Estructuras de Poisson 315
7. Formas diferenciales 317
7.1. 0-formas 317
7.2. 1-formas 318
7.3. 2-formas 319
7.4. k-formas 320
7.5. Producto interior 321
7.6. Derivada de Lie 322
8. Mecánica Hamiltoniana 323
8.1. Geometría simpléctica 324
8.2. Campos vectoriales Hamiltonianos y el paréntesis de Poisson 325
8.3. Sistemas Hamiltonianos independientes del tiempo 326
8.4. Sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo 326
8.5. Sistemas integrables 327
9. Transformaciones canónicas y simetrías 329
9.1. Transformaciones canónicas: descripción clásica en coordenadas 329
9.2. Transformaciones canónicas: descripción geométrica 331
9.3. Simetrías y grupos de transformaciones de invarianza 335
10. Otros formalismos geométricos en Mecánica Clásica y la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica 340
10.1. Variedades de Jacobi y variedades de contacto 340
10.2. La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica 342
Referencias 343

1. Preliminares

En esta primera sección se ofrece un repaso conciso de los conceptos y técnicas fundamentales del álgebra lineal y el cálculo vectorial. Estos elementos son esenciales para el estudio de la geometría diferencial y constituyen la base para el desarrollo del formalismo geométrico en Mecánica Clásica. Los lectores con un conocimiento sólido en estas áreas pueden omitir esta sección y dirigirse directamente a la sección 2, donde se introducen los principales objetos de la geometría diferencial.

1.1. Repaso de álgebra lineal.

Definición 1. Espacio vectorial: Un espacio vectorial (real) es un conjunto V equipado con dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ que satisfacen las mismas propiedades que la suma vectorial y producto por un escalar en el espacio Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Ejemplos de espacios vectoriales:

- El propio espacio Euclidiano n-dimensional $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ con las operaciones suma de vectores y producto por un escalar.
- El espacio de matrices con m renglones y n columnas $(M_{m\times n}, +, \cdot)$ con las operaciones suma de matrices y producto por un escalar.
- El espacio de polinomios de grado n en una variable con coeficientes reales $(P_n, +, \cdot)$ con las operaciones suma de polinomios y producto por un escalar.
- El espacio de funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ $(C^\infty(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con las operaciones suma de funciones y producto por un escalar.

Sea V un espacio vectorial.

Definición 2. Combinación lineal: Un vector v en V es combinación lineal de los vectores $v_1, ..., v_k \in V$ si existen escalares $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$, tales que[1]

$$v = \alpha^i v_i. \tag{1}$$

Definición 3. Independencia lineal: Se dice que el conjunto $S = v_1, \ldots, v_k \subseteq V$ es linealmente independiente (li) si la única solución de la ecuación vectorial $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_v$ es la solución trivial $(\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0)$. O equivalentemente, ningún vector es combinación lineal de los otros.

Definición 4. Base: Un conjunto $S = v_1, \ldots, v_k \subseteq V$ es base de V si todo vector en V es combinación lineal de los vectores en $S\,(V = Gen(S))$ y S es linealmente independiente.

Cualquier base de V tiene el mismo número de elementos, lo que denomina dimensión de V.

Ejemplo 2. Bases de espacio vectoriales:

- El conjunto formado por los vectores $e_1, \ldots, e_n$, donde e_i es el vector de $\mathbb{R}^n$ con todas las componentes nulas excepto la i-ésima la cual es igual a 1, es una base de $\mathbb{R}^n$ llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
- El conjunto formado por las matrices $A^1_1, \ldots, A^n_1, \ldots, A^1_m, \ldots, A^n_m$, donde A^j_i es la matriz de orden $m \times n$ cuyas entradas son todas nulas excepto la entrada en la fila i y la columna j la cual es igual a 1, es una base de $M_{m\times n}$ llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de $M_{m\times n}$ es $m\,n$.
- El conjunto formado por los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ es una base de P_n llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de P_n es $n + 1$.

[1]En este texto se usa la convención de suma de Einstein, es decir, se asume la operación de suma sobre indices repetidos. Por ejemplo, la suma de productos $a^1b_1 + a^2b_2 + \cdots + a^nb_n$ se escribe simplemente como $a^i\, b_i$ entendiendo que el indice i varía desde 1 hasta n.

- El conjunto formado por los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ es una base de $C^\infty(\mathbb{R})$ llamada la base estándar o base canónica. $C^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 5. Transformación lineal: Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad y \quad T(\alpha u) = \alpha T(u),\ \forall\, u, v \in V\ y \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Ejemplo 3. Ejemplos de transformaciones lineales:

- $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (\sin(\pi)x + y, z - 3x)$.
- $T : M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(M) = traza(M)$.
- $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $T(f) = f'$.
- $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Su representación matricial es una matriz $A \in M_{m,n}$, tal que, $T(v) = Av$.

Ejemplo 4. Ejemplos de representaciones matriciales:

- $T(x, y, z) = (\sin(\pi/3)x - y, x + 3y + z)$, la representación matricial de T es

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

  Para obtener dicha matriz, se evalúa T en los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $T(1, 0, 0) = (\sin(\pi/3), 1)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 3)$ y $T(0, 0, 1) = (0, 1)$. Estas imágenes constituyen las columnas de la matriz de T, de modo que

$$[T] = \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

  la cual coincide con la expresión dada en (3). Nótese que cada columna representa la imagen de un vector base de $\mathbb{R}^3$, y por tanto aplicar esta matriz a un vector $(x, y, z)^t$ reproduce la acción de T.
- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la rotación en sentido antihorario por un ángulo θ. La representación matricial de T es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para más detalles ver [4, 5, 6] y [7] (Appendix B).

1.2. Repaso de cálculo vectorial. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto $U = B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$ o $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de varias variables $x^1, \ldots, x^n$.

Definición 6. Derivadas parciales: Para cada $a \in U$ la derivada parcial de f en a con respecto de x^i se define por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\hat{e}_i) - f(a)}{h}\ , \tag{5}$$

donde $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Para efectos prácticos, la derivada parcial de f en a con respecto de x^i se calcula considerando a la función f como una función solo de la variable x^i (las demás variables son constantes), se deriva como una función de una sola variable y se avalúa en $x = a$. Si $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ existe para todo $a \in U$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}$ es una función de varias variables.

Definición 7. Función escalar diferenciable: Se dice que $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable de clase $C^1(U)$ si sus derivadas parciales existen y son continuas.

Si f es diferenciable de clase C^1 podemos definir las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right). \tag{6}$$

Si las derivadas parciales de segundo orden existen podemos definir derivadas parciales de tercer orden y así podríamos definir derivadas parciales de orden superior.

Definición 8. Función infinitamente diferenciable: Se dice que $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable de clase $C^\infty(U)$ o infinitamente diferenciable si sus derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas.

Observación: En Mecánica Clásica, los observables se representan mediante funciones infinitamente diferenciables. Es común, especialmente en textos con enfoque físico, referirse a estas funciones simplemente como diferenciables. Siguiendo esta convención, en estas notas utilizaremos el término función diferenciable para referirnos exclusivamente a funciones infinitamente diferenciables. Cabe destacar que todas las funciones elementales, como las constantes, polinomiales, trigonométricas, exponenciales y sus inversas, pertenecen a esta categoría.

Definición 9. Función vectorial diferenciable: Sea $F : U \to \mathbb{R}^m$. Se denota $F(x^1, \ldots, x^n) = (F^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, F^m(x^1, \ldots, x^n))$ y $F^i : U \to \mathbb{R}$ se llaman las funciones componentes de F. Se dice que F es diferenciable si cada función componente F^i es diferenciable.

Sea $F : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable.

Definición 10. Derivada total: La derivada total de F en $a \in U$ es la transformación lineal $\mathbf{DF}(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya representación matricial es:

$$A = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(a)\right). \tag{7}$$

Ejemplo 5. Ejemplo de derivada total: Sea $F(x, y, z) = (\operatorname{sin} x + z^3, \sqrt{x^2 + y^2})$. Tenemos $F^1 = \operatorname{sin} x + z^3$ y $F^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. La derivada total de F en el punto $p = (\pi, 1, 1)$ está dada por:

$$A = \left.\begin{pmatrix} \cos x & 0 & 3z^2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}\right|_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Definición 11. Difeomorfismos: Sean U, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un difeomorfismo es una función $F : U \to V$ diferenciable invertible con inversa diferenciable.

Para más detalles ver [8, 9] y [7] (Appendix C).

2. Variedades diferenciales

En esta sección se introducen de manera concisa los conceptos fundamentales de la geometría diferencial necesarios para la formulación geométrica de la Mecánica Clásica. Quienes deseen pasar directamente a dicha formulación pueden consultar la sección 8. No obstante, puede resultar útil revisar la subsección 3.5, donde se ofrece una introducción al formalismo geométrico de la Mecánica Lagrangiana, así como la subsección 5.3, en la que se presentan formalmente los sistemas mecánicos en variedades diferenciales. Adicionalmente, en la subsección 6.3 se proporciona una visión general de las estructuras geométricas de Poisson.

De manera intuitiva, una variedad diferencial (smooth manifold) es un conjunto que, localmente, se asemeja a un abierto de $\mathbb{R}^n$, permitiendo así el desarrollo de cálculo diferencial e integral en su entorno. Para una exposición más detallada, se recomienda consultar [7, 10, 11].

Los ejemplos más familiares de variedades son $\mathbb{R}^n$, curvas diferenciables y superficies en $\mathbb{R}^n$ tales como esferas y toros. Las superficies son objetos dentro de un espacio ambiente, a saber $\mathbb{R}^n$, las variedades son superficies abstractas en las cuales no existe necesariamente un espacio ambiente.

2.1. Estructuras diferenciales. Sea M un conjunto no vacío.

Definición 12. Carta coordenada: Una carta coordenada en M es un par (U, φ) con $U \subseteq M$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva tal que $\varphi(U) = \widehat{U}$ en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Dado $p \in U$, denotamos

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \ , \tag{9}$$

y llamamos a $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas en U.

De manera intuitiva podríamos entender una carta coordenada como el pegado de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en un conjunto M, o dicho de otra forma, una carta coordenada dota de manera local de coordenadas (las de $\mathbb{R}^n$) al conjunto M (ver figura 1).

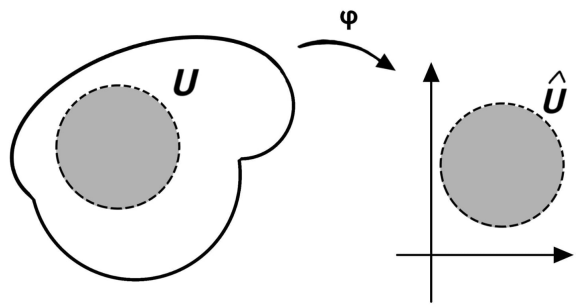


FIGURA 1. Una carta coordenada en un conjunto M es una función inyectiva φ definida en un subconjunto U de M a valores vectoriales tal que su imagen $\widehat{U}$ es un abierto del espacio Euclidiano.

Definición 13. Cartas compatibles: Dos cartas coordenadas (U, φ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$, son compatibles si $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos, y la función $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo (ver figura 2).

La idea la compatibilidad de las cartas es que los cálculos en las variedades diferenciales sean independientes de la elección de la carta (o de la elección de coordenadas). La condición de compatibilidad garantiza que el cambio de coordenadas sea invertible y diferenciable.

Definición 14. Variedad diferencial: Una variedad diferencial de dimensión n es un conjunto M equipado con una colección de cartas compatibles $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ que cubren M.

A la familia de cartas compatibles que cubren una variedad diferencial se le llama una estructura diferencial.

Por convenio, una variedad de dimensión 0 se define como un conjunto con un único elemento (un punto).

Formalmente, una variedad diferencial es un espacio topológico dotado de una estructura diferencial, donde las cartas están definidas en conjuntos abiertos. En estas notas, omitiremos los aspectos topológicos de las variedades diferenciales, tanto por su complejidad como por su poca relevancia dentro del enfoque físico que adoptamos.

Ejemplo 6. Algunos ejemplos de variedades diferenciales:

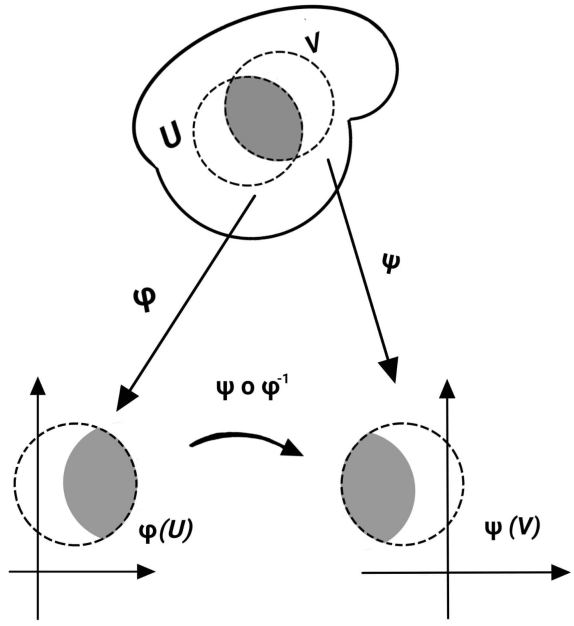


FIGURA 2. Dos cartas coordenadas φ y ψ, cuyos dominios tienen una intersección no vacía, se dicen compatibles si las imágenes de esta intersección bajo cada carta son conjuntos abiertos y la función de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$, definida en la imagen de la intersección bajo φ, es un difeomorfismo cuya imagen es precisamente la imagen de la intersección bajo ψ.

- $\mathbb{R}^n$ y cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferencial de dimensión n. La carta coordenada global es el mapeo identidad.
- Cualquier conjunto abierto de una variedad diferencial es una variedad diferencial de la misma dimensión. Este tipo de variedades se llaman subvariedades abiertas. Las cartas en la subvariedad abierta son la restricción de las cartas de la variedad original al subconjunto.
- El conjunto de matrices de orden $m \times n$, denotado por $M_{m,n}$, es una variedad diferencial de dimensión $m\,n$. Podemos definir una carta coordenada para, por ejemplo $m = 2$ y $n = 3$, por

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (a, b, c, d, e, f)\ . \tag{10}$$

- En general, cualquier espacio vectorial V de dimensión n es una variedad diferencial de dimensión n. Siempre es posible considerar la carta coordenada global $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(\alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{11}$$

  donde $e_1, \ldots, e_n$ es una base (cualquiera) de V.
- $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n} : \text{A es invertible}\}$, llamado el grupo (grupo de Lie) lineal general, es una variedad diferencial de dimensión n^2. $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de la variedad diferencial M_n (matrices de orden n) por lo tanto es una subvariedad abierta de la misma.
- La gráfica de una función diferenciable $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una variedad diferencial de dimensión n. Podemos definir una carta coordenada global por

$$\varphi(x, f(x)) = x. \tag{12}$$

- La n-esfera $s^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\right\}$ es una variedad diferencial de dimensión n. Para la estructura diferenciable de la n esfera ver [7, 10].
- Sean $M_1, \dots M_k$ variedades diferenciales de dimensiones $m_1, \dots, m_k$ respectivamente. Consideremos el producto cartesiano

$$M = M_1 \times \cdots \times M_k. \tag{13}$$

M es una variedad diferencial de dimensión $m = m_1 + \cdots + m_k$. Las cartas coordenadas son definidas como productos de cartas de cada una de las variedades M_i (para detalles ver [7, 10]).

- El toro n-dimensional es una variedad diferencial de dimensión n, a saber

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \,(\text{producto } n \text{ veces})\,. \tag{14}$$

Ver más ejemplos en [7, 10].

2.2. Funciones y mapeos diferenciables. Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 15. Función diferenciable: Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ se dice diferenciable si para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $p \in U$ y la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable (ver figura 3).

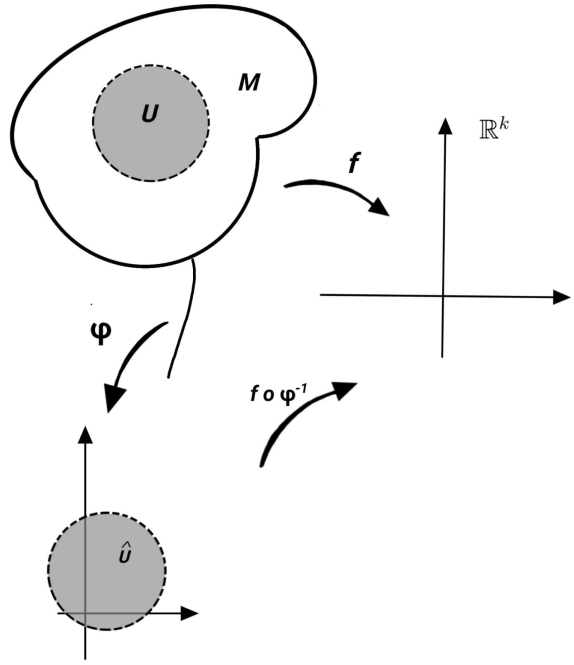


FIGURA 3. Una función en una variedad diferencial a valores vectoriales es diferenciable si su expresión en coordenadas para cada punto es una función (vectorial a valores vectoriales) diferenciable.

El conjunto de funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en M se denota por $C^\infty(M)$.

Definición 16. Mapeo diferenciable: Sea N una variedad diferencial. Una función $F : M \longrightarrow N$ es un mapeo diferenciable (es usual llamar mapeos a las funciones entre variedades diferenciales) si para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) que contiene a p y una carta (V, ψ) que contiene a $F(p)$ tales que $F(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable (ver figura 4).

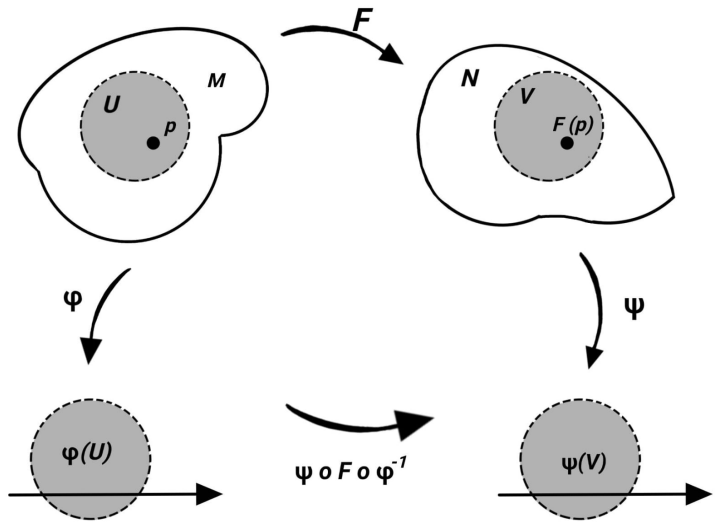


FIGURA 4. Un mapeo entre variedades diferenciales es diferenciable si su expresión en coordenadas para cada punto del dominio y para su imagen en el codominio, es una función (vectorial a valores vectoriales) diferenciable.

2.3. Subvariedades. En esta subsección se presentan de manera breve las llamadas subvariedades encajadas (embedded submanifolds), las cuales aparecen principalmente como conjuntos de nivel. En Mecánica Clásica, son fundamentales para entender la integrabilidad desde el punto de vista geométrico. En estas notas llamaremos a las subvariedades encajadas simplemente subvariedades.

Definición 17. Subvariedad: Una subvariedad diferencial de M es un conjunto $W \subseteq M$ que también es una variedad diferencial con la estructura diferencial heredada de la variedad ambiente M.

El siguiente teorema nos dice como construir subvariedades como conjuntos de nivel.

TEOREMA 18. *Teorema del conjunto de nivel* [7]*: Sea* $F : M \to \mathbb{R}^k$ *un mapeo diferenciable. Consideramos el conjunto de nivel.*

$$M_\alpha = \left\{ x \in M : F(x) = \alpha \in \mathbb{R}^k \right\}. \tag{15}$$

Si para cada $p \in M_\alpha$, $\nabla F^1(p), \ldots, \nabla F^k(p)$ *son linealmente independientes, entonces* M_α *es una subvariedad de* M *de dimensión* $n - k$.

En el Teorema 18, el gradiente $\nabla F^i(p)$ de la función $F^i : M \to \mathbb{R}$ en un punto $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ se entiende como

$$\nabla F^i(p) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial F^i}{\partial x_n}(p) \right),$$

esto es, la fila i-ésima de la matriz jacobiana $DF(p)$.

Ejemplo 7. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n} : det(A) = 1\}$ (el grupo de Lie especial lineal) es una subvariedad de $M_{n,n}$ de dimensión $n^2 - 1$. En efecto, consideremos $F = M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(A) = det(A)$, tenemos que F es diferenciable y $SL(n, \mathbb{R})$ es el subconjunto de nivel $F(A) = 1$.

PROPOSICIÓN 19. *Restricción de un mapeo diferenciable a una subvariedad: Si* $F : M \longrightarrow N$ *es un mapeo diferenciable y* S *es una subvariedad diferencial de* M *entonces* $F|_S : S \longrightarrow N$ *es un mapeo diferenciable.*

3. Vectores tangentes

3.1. Vectores tangentes en el espacio Euclidiano.

Definición 20. Vector tangente en $\mathbb{R}^n$: Un vector tangente a un punto $a \in R^n$ es el vector velocidad v_a de una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to R^n$ tal que $\gamma(0) = a$. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas en R^n y $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ entonces $v_a = \frac{d\gamma}{dt}(0) = (\dot{x}^1(0), \ldots, \dot{x}^n(0))$.

Sea $f \in C^\infty(R^n)$, la derivada direccional de f en la dirección de v_a es:

$$\begin{aligned} D_{v_a} f &= \nabla f(a) \cdot v_a \\ &= \dot{x}^1(0) \frac{\partial f}{\partial x^1}(a) + \cdots + \dot{x}^n(0) \frac{\partial f}{\partial x^n}(a). \end{aligned} \tag{16}$$

3.2. Vectores tangentes en una variedad diferencial.

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 21. Vector tangente: Un vector tangente a $p \in M$ es una función lineal $v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz:

$$v_p(fg) = f(p) v_p g + g(p) v_p f. \tag{17}$$

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Las funciones $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \to R$ definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,, \tag{18}$$

son vectores tangentes a $p \in M$.

Todo vector tangente a $p \in M$ es (localmente) combinación lineal de los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

$$v_p = v_p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + \cdots + v_p^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{19}$$

con $v_p^1, \ldots, v_p^n \in \mathbb{R}$.

Definición 22. Espacio Tangente: El conjunto de todos los vectores tangentes a $p \in M$ es un espacio vectorial de dimensión n cuya base local es $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$. Se llama espacio tangente a p en M y se denota por T_pM.

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor de $p \in M$, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}|_p = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_p\,. \tag{20}$$

Ejemplo 8. Sea $M = \mathbb{R}^2$ dotada de su estructura diferenciable estándar y consideremos coordenadas polares (r, θ) alrededor del punto $p = (2, \frac{\pi}{2}) \in M$.

Las bases locales del espacio tangente en p son

$$\frac{\partial}{\partial r}|_p\ ,\ \frac{\partial}{\partial \theta}|_p\,.$$

Pasamos de coordenadas polares a cartesianas con:

$$x = r\cos\theta\ \ y = r\sin\theta\,.$$

Así tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}|_p = \frac{\partial x}{\partial r}(p) \frac{\partial}{\partial x}|_p + \frac{\partial y}{\partial r}(p) \frac{\partial}{\partial y}|_p\,.$$

Sustituyendo la transformación de coordenadas se obtiene:

$$= \cos\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial x}|_p + \sin\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial y}|_p = \frac{\partial}{\partial y}|_p\,.$$

Realizamos el mismo procedimiento para la parcial de θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}|_p = \frac{\partial x}{\partial\theta}(p)\frac{\partial}{\partial x}|_p + \frac{\partial y}{\partial\theta}(p)\frac{\partial}{\partial y}|_p\,,$$

obteniendo:

$$= -2\sin\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial x}|_p + 2\cos\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial y}|_p = -2\frac{\partial}{\partial x}|_p\,.$$

Consideremos

$$v_p = 5\frac{\partial}{\partial r}|_p - 3\frac{\partial}{\partial\theta}|_p\,.$$

en coordenadas polares, ahora la expresión para coordenadas cartesianas es

$$v_p = 5\frac{\partial}{\partial y}|_p + 6\frac{\partial}{\partial x}|_p\,.$$

Tomando $f(x,y) = x^2 + y^2$ o en coordenadas polares como $f(r,\theta) = r^2$ obtenemos:

$$v_p(f) = 5(2r)|_{(2,\pi/2)} = 20\,.$$

y ahora para cartesianas

$$v_p(f) = 5(2y) + 6(2x) = 20\,.$$

Notemos que se llega al mismo resultado.

Proposición 23. *Espacio tangente a una subvariedad* [7]*: Sea S una subvariedad diferencial de M y $p \in S$. El espacio tangente a p en S es un subespacio vectorial de T_pM caracterizado por*

$$T_pS = \{v \in T_pM \,:\, vf = 0\,\forall f \in C^\infty(M) \;\; tal\ que\ f|_S = 0\}. \tag{21}$$

Teorema 24. *Vector tangente a una subvariedad de nivel* [7]*: Sea S una subvariedad de nivel definida por $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $F(x) = \alpha$. Un vector tangente $v_p \in T_pM$ es un vector tangente a p en S si y solo sí $v_pF^i = 0$ para cada función componente F^i de F.*

3.3. Vector velocidad de una curva. Dada una curva $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ en M con $\gamma(0) = p$ se tiene que

$$\dot\gamma(0) = \dot x^i(0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{22}$$

es un vector tangente a $p \in M$

Ejemplo 9. Tomemos nuevamente la variedad $M = \mathbb{R}^2$ del ejemplo anterior. Sea la curva

$$\gamma(t) = (t^2 - 5t + 2, \frac{\pi}{2}\cos t)\,,$$

con

$$\gamma(0) = (2, \frac{\pi}{2})\,.$$

Por lo que:

$$\gamma'(0) = (2t-5)|_0\frac{\partial}{\partial r}|_p - \frac{\pi}{2}\sin t|_0\frac{\partial}{\partial\theta}|_p\,,$$

cuyo resultado es:

$$= -5\frac{\partial}{\partial r}|_p\,,$$

que es el vector velocidad de la curva $\gamma(t)$ dada en la parte de arriba.

3.4. Fibrado tangente y la diferencial de un mapeo diferenciable.

Definición 25. Fibrado tangente: El fibrado tangente de M es la unión de todos los espacios tangentes, se denota por TM,

$$TM = \cup_{p\in M} T_p(M)\,, \tag{23}$$

es una variedad diferencial de dimensión $2n$.

Si $(x^1,\ldots,x^n)$ son coordenadas alrededor de $p \in M$ entonces $(x^1,\ldots,x^n,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ son coordenadas alrededor de $(p, v_p) \in TM$.

Definición 26. Diferencial de un mapeo diferenciable: Sea $F : M \longrightarrow N$ un mapeo diferenciable. Para cada $p \in M$ la diferencial de F en p es la transformación lineal $DF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ definida por $DF_p(v_p)(g) = v_p(F \circ g)$ para todo $v_p \in T_pM$ y para toda $g \in C^\infty(N)$.

Sean $(x^1,\ldots,x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$

$$F(x^1,\ldots,x^n) = (F^1(x),\ldots,F^n(x)). \tag{24}$$

La representación matricial de DF_p es:

$$[DF_p] = \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]\,. \tag{25}$$

Ejemplo 10. $dim(M) = 3$ y $dim(N) = 2$

$$F(x,y,z) = (3x^2 - 5\,xyz, z^3)\,.$$

Esta matriz es de 2×3 en $p = (1,0,-1)$

$$[DF_p] = \begin{pmatrix} 6x - 5yz & -5xz & -5xy \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En el punto $p = (1,0,-1)$ se considera el vector tangente

$$v_p \;=\; -\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 4\,\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 2\,\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p.$$

Los coeficientes que acompañan a las derivadas parciales son escogidos de manera arbitraria y corresponden a las coordenadas de v_p en la base natural $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\big|_p\right\}$ del espacio tangente T_pM. De este modo, la representación de v_p en dicha base es simplemente

$$v_p = (-1,\, 4,\, 2),$$

lo que permite tratarlo como un vector de $\mathbb{R}^3$ y aplicar el diferencial DF_p para determinar su imagen en $T_{F(p)}N$.

La acción del diferencial se obtiene mediante el producto matricial

$$DF_p(v_p) = [DF_p]\,[v_p] = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix},$$

lo cual muestra que en coordenadas locales (u,w) de N el vector tangente resultante se expresa como $DF_p(v_p) = 14\,\partial_u|_{F(p)} + 6\,\partial_w|_{F(p)} \in T_{F(p)}N$, con $F(p) = (3,-1)$. Este resultado coincide con la interpretación geométrica de $DF_p(v_p)$ como la derivada de la curva $F\circ\gamma$ en $t = 0$, para cualquier curva γ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v_p$.

3.5. Sistemas Lagrangianos. Un sistema Lagrangiano es un par (M, L) con M una variedad diferencial de dimensión n y $L : TM \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. M se llama el espacio configuración, L la función Lagrangiana y n el número de grados de libertad del sistema (ver más detalles en el libro de Arnold [3] capítulo 4).

Una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ es una trayectoria del sistema si su expresión en coordenadas $\gamma(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t))$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{26}$$

donde $(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ son coordenadas en TM. En el lenguaje físico las coordenadas $(q^1, \ldots, q^n)$ en M se llaman coordenadas generalizadas y se obtienen a partir de las constricciones holonómicas del sistema físico (constricciones de la forma $f(r_1, r_2, \ldots, t) = 0$ donde $r_1, r_2, \ldots$ son los vectores de posición de las partículas del sistema); las coordenadas $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$ se llaman velocidades generalizadas.

El cálculo variacional de funcionales constituye el marco matemático que fundamenta la dinámica de la Mecánica Lagrangiana. En efecto, las trayectorias físicas corresponden a los puntos críticos del funcional de acción

$$\Phi(\gamma) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt, \tag{27}$$

donde L es la función Lagrangiana del sistema [3].

El principio de mínima acción de Hamilton [3, 12] establece que la evolución de un sistema mecánico está determinada por aquellas curvas $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ tales que

$$\delta\Phi(\gamma) = 0, \tag{28}$$

lo cual conduce a las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

En particular, para un sistema mecánico con energía cinética T y energía potencial U, la función Lagrangiana está dada por

$$L = T - U. \tag{30}$$

En coordenadas generalizadas $(q^1, \ldots, q^n)$ se tiene

$$L(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, m_i\, (\dot{q}^i)^2 - U(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, t). \tag{31}$$

A continuación presentamos ejemplos de espacios configuración (variedades diferenciales) de sistemas físicos.

Partícula libre: La partícula libre es el ejemplo más sencillo. Lo interesante de ello, es que para una partícula que no se somete a ningún potencial viajando en 3 dimensiones (incluso puede ser en n dimensiones), su espacio configuración será de una dimensión.

Péndulo simple: El espacio de configuraciones del péndulo simple de dos dimensiones tan solo es S^1, pues a pesar que se mueve en 2 dimensiones, lo hace con una constricción, por lo que sus grados de libertad tan solo es uno, la dimensión del espacio configuración. Notar que el movimiento del péndulo simple solo describe una circulo máximo de radio l, por lo que no es tan difícil ver el espacio configuración esté caracterizado por una coordenada, que es el ángulo polar θ.

Péndulo esférico: Es fácil argumentar luego del péndulo simple que el espacio configuración del péndulo esférico es S^2, pues solo hay dos grados de libertad. Y pueden ser expresadas esos dos grados de libertad, en coordenadas esféricas por los ángulos azimutal ϕ y polar θ.

Péndulo doble: Dejemos por sentado que el péndulo doble solo se moverá en 2D, por lo tanto su espacio configuración será el producto de cada una de los péndulos simples en 2D, es decir $S^1 \otimes S^1 = T^2$, que es precisamente el toro 2-dimensional.

Péndulo doble esférico: El caso anterior, el péndulo doble solo se mueve en dos dimensiones. pero si le damos la libertad de que lo haga en 3 dimensiones físicas, entonces el péndulo tendrá el espacio configuración S^2, y el espacio configuración del péndulo doble esférico $S^2 \otimes S^2 = T^4$ será el toro 4-dimensional.

4. Grupos y álgebras de Lie

Las nociones de grupo de Lie y álgebra de Lie fueron introducidas por el matemático noruego Marius Sophus Lie (1842–1899), quien desarrolló estas nociones en un intento para resolver, o al menos simplificar ecuaciones diferenciales ordinarias. Al principio Lie basó su trabajo en analogías con la teoría de grupo desarrollada por Evariste Galois (1811–1832) para resolver ecuaciones algebraicas que fueran cuadráticas, cúbicas o cuárticas [13]. Las álgebras de Lie son la linealización de los grupos de Lie.

Los grupos de Lie son variedades diferenciales que tienen estructura de grupo compatible con la estructura diferencial [7, 14]. Los grupos de Lie se encuentran en Mecánica Clásica como grupos de simetrías [11, 15, 16]. Es bien sabido que la existencia de simetrías para un sistema mecánico, permite la reducción del sistema, o en otras palabras, permite una simplificación de las ecuaciones de movimiento, lo que facilita su solución. El célebre teorema de Noether relaciona simetrías de un sistema mecánico con cantidades conservadas (o constantes de movimiento) [7, 17, 18, 19]; una generalización de éste, relacionada con la noción de mapeo de momento, es una de las principales aplicaciones de los grupos de Lie en la Mecánica Clásica. El mapeo de momento es una generalización del momento lineal o angular, éste aparece cuando se tiene un grupo de Lie de simetrías actuando sobre un sistema mecánico. Varios teoremas de conservación, entre ellos el del momento lineal o angular, son casos particulares el teorema de conservación del mapeo de momento [15, 13, 16]. Por otro lado, las álgebras de Lie también juegan un rol importante en la Mecánica Clásica como queda en evidencia en el teorema de Lie sobre la integrabilidad de sistemas mecánicos; en este teorema la existencia de un álgebra de Lie soluble (o en particular Abeliana) de simetrías de un sistema mecánico permite encontrar trayectorias por cuadraturas [17, 20, 21].

4.1. Grupos de Lie.

Definición 27. Grupo: Un grupo es un conjunto no vacío G equipado con una operación binaria asociativa $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ llama multiplicación, tal que existe un elemento identidad e, i.e., $g \cdot e = g \ \forall g \in G$, y cada $g \in G$ tiene un elemento inverso denotado por g^{-1}, es decir, para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = e$.

Definición 28. Grupo de Lie: Un grupo de Lie es una variedad diferencial G que también es un grupo, con la propiedad de que la multiplicación $G \times G \longrightarrow G$ y la inversión $G \longrightarrow G$ son mapeos diferenciables.

En Mecánica Clásica los grupos de Lie más relevantes son los grupos de Lie de matrices. A continuación veremos algunos de ellos.

Ejemplo 11. Algunos grupos de Lie de matrices con entradas reales:

- El grupo lineal general: $GL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles de orden n. Es un grupo de Lie con la operación multiplicación de matrices. Este grupo representa el grupo de todas las transformaciones invertibles en $\mathbb{R}^n$.
- El grupo lineal especial: $SL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de orden n con determinante igual a uno. Es un grupo de Lie con la operación multiplicación de matrices.
- El círculo S^1 es un grupo de Lie con la operación multiplicación de números complejos.
- El grupo ortogonal: $O(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices ortogonales de orden n, i.e., matrices cuya transpuesta es igual a su inversa. Este grupo

representa al grupo de las transformaciones invertibles en $\mathbb{R}^n$ que preservan la distancia Euclidiana.

- El grupo especial ortogonal: $SO(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices ortogonales con determinante igual a uno. Este grupo es particularmente relevante en Mecánica Clásica ya que representa al grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^n$.

Definición 29. Acción de un grupo sobre una variedad: Sea M una variedad diferencial y G un grupo de Lie. Una acción izquierda (diferenciable) de G en M es un mapeo diferenciable $L : G \times M \longrightarrow M$, denotado por $L(g,p) \mapsto g \cdot p$, tal que

- $g_1 \cdot g_2 \cdot p = (g_1 g_2) \cdot p$, y
- $e \cdot p = p$.

Si $L : G \times M \longrightarrow M$ es una acción izquierda de G en M, entonces cada $g \in G$ induce un difeomorfismo L_g en M definido por

$$L_g(p) = L(g,p) = g \cdot p. \tag{32}$$

La inversa de L_g es $L_{g^{-1}}$.

De manera análoga se puede definir una acción derecha. En estas notas trabajaremos con acciones izquierdas y las llamaremos simplemente acciones.

Ejemplo 12. Acciones de grupos de Lie:

- Cualquier grupo de Lie G actúa de manera trivial sobre cualquier variedad diferencial M. $L(g,p) = p \, \forall g \in G \, \forall p \in M$ es la acción trivial.
- $GL(n,\mathbb{R})$ actúa de manera natural en $\mathbb{R}^n$ por la acción $L(A,x) = Ax$ (multiplicación de la matriz A por el vector x).
- $SL(n)$ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ por la misma acción $L(A,x) = Ax$.
- Consideremos un cuerpo rígido rotando alrededor de su centro de masa sin la influencia de fuerzas externas. Tenemos que las trayectorias del sistema son invariantes bajo la acción del grupo de Lie $SO(3)$, es decir, $SO(3)$ es el grupo de simetrías de dicho sistema, lo que nos lleva a la conservación del momento angular.

En Mecánica Lagrangiana, el Teorema de Noether establece que a cada grupo uno-paramétrico de difeomorfismos del espacio configuración de un sistema Lagrangiano que preserve la función Lagrangiana, lo cual representa la acción de un grupo de Lie en el espacio configuración, le corresponde una cantidad conservada [3]. Veamos los detalles de este resultado. Sea (M,L) un sistema Lagrangiano.

Definición 30. Se dice que el sistema Lagrangiano (M,L) admite un mapeo $h : M \longrightarrow M$ si

$$L(Dh_p v_p) = L(v_p), \, \forall v_p \in T_p M. \tag{33}$$

Ejemplo 13. Sea (M,L) un sistema Lagrangiano con 3 grados de libertad con coordenadas generalizadas (x,y,z) y $L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V(y,z)$. El sistema admite el mapeo $h(x,y,z) = (x+s,y,z)$ (traslación en la primera coordenada).

Teorema 31. *Teorema de Noether* [3]*: Si el sistema* (M,L) *admite el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos* $h_s : M \longrightarrow M$ *entonces*

$$I(q^1,...,q^n,\dot{q}^1,...,\dot{q}^n) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1},...,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) \cdot \left.\frac{dh_s(q^1,...,q^n)}{ds}\right|_{s=0}, \tag{34}$$

es una cantidad conservada, donde $\cdot$ *denota el producto escalar en* $\mathbb{R}^n$.

Todo campo vectorial diferenciable genera un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos, llamado el flujo del campo vectorial (ver la sección de campos vectoriales). Si un sistema Lagrangiano admite el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos generado por un campo vectorial diferenciable se dice que el campo vectorial es una simetría (infinitesimal) del sistema.

En términos locales un difeomorfismo puede ser visto como un cambio de coordenadas, así que el teorema de Noether puede ser planteado desde el punto de vista local de la siguiente manera: Si las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo un grupo uno-paramétrico de cambios de coordenadas entonces una cantidad conservada está asociada a dicha invarianza. En particular, si la Lagrangiana es invariante bajo un grupo uno-paramétrico de cambios de coordenadas, entonces se tiene una cantidad conservada asociada a tal invarianza.

Ejemplo 14. ▪ Supongamos que tenemos un sistema Lagrangiano con tres grados de libertad, coordenadas generalizadas (x, y, z) y potencial $V(x, y, z)$ invariante por traslaciones en la primera variable, es decir, traslaciones de la forma $h_s(x, y, z) = (x + s, y, z)$. Tenemos que

$$I(x, y, z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) \cdot (1, 0, 0) = m\dot{x} = p_x \,, \tag{35}$$

(el momento lineal en x) es una cantidad conservada. De manera análoga con traslaciones en las otras variables se obtiene la conservación de los respectivos momentos lineales.

- Supongamos ahora que tenemos un sistema Lagrangiano con tres grados de libertad, coordenadas generalizadas (x, y, z) y potencial $V(x, y, z)$ invariante por rotaciones en la tercera variable, es decir, rotaciones de la forma $h_s(x, y, z) = (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, z)$ donde s es el ángulo de rotación. Tenemos que

$$I(x, y, z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) \cdot (-y, x, 0) = mx\dot{y} - my\dot{x} \,, \tag{36}$$

(la componente z del momento angular) es una cantidad conservada.

4.2. Álgebras de Lie. Ahora repasaremos el concepto de álgebra de Lie y mencionaremos sus propiedades y aplicaciones más importantes.

Definición 32. Álgebra de Lie: Un álgebra de Lie es un espacio vectorial (real) $\mathfrak{g}$ equipado con una transformación llamada corchete de Lie (Lie bracket) y denotada por $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, que es bilineal (lineal en cada argumento), antisimétrica $[X, Y] = -[Y, X]$ y satisface la identidad de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Definición 33. Subálgebra de Lie: Una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie es un subespacio vectorial que es cerrado bajo el corchete de Lie.

Definición 34. Álgebra de Lie de un grupo de Lie: A cada grupo de Lie se le asocia un álgebra de Lie la cual representa la linealización del grupo. El álgebra de Lie de un grupo de Lie es el espacio tangente al elemento identidad.

La linealización de los grupos de Lie en una vecindad del elemento identidad captura la estructura local de los grupos y permite una simplificación en el estudio de los mismos.

Para construir el álgebra de Lie de un grupo de Lie debemos parametrizar el grupo de Lie (variedad diferencial) y encontrar los vectores tangentes bases en el elemento identidad. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices es un álgebra de Lie de matrices. Veamos la construcción del álgebra de Lie del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Primero parametrizamos el grupo.

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \} \,. \tag{37}$$

El elemento identidad de $SL(2, \mathbb{R})$ es la matriz identidad, cuyos parámetros son $(0, 0, 0)$, Así que los vectores tangentes base en el elemento identidad son

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial a}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \tag{38}$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial b}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

$$v_3 = \frac{\partial}{\partial c}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}, \tag{41}$$

Por lo tanto el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ es es conjunto de matrices de orden dos con traza cero. En general tenemos lo siguiente:

Ejemplo 15. Álgebras de Lie de grupos de Lie de matrices:

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de todas las matrices reales de orden n.
- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de matrices reales de orden n con traza cero.
- $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de matrices reales antisimétricas de orden n.

Es posible reconstruir, al menos localmente, un grupo de Lie a partir de su álgebra de Lie mediante el mapeo exponencial. En general, la definición de este mapeo puede ser algo compleja; sin embargo, en el caso de los grupos de Lie de matrices, su formulación resulta más intuitiva y accesible.

Definición 35. Mapeo exponencial: Sea G un grupo de Lie de matrices y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El mapeo exponencial $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ está dado por

$$exp(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}\,. \tag{42}$$

5. Campos vectoriales

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

5.1. Campos vectoriales diferenciables.

Definición 36. Campo vectorial: Un campo vectorial diferenciable (smooth vector field) en M es un mapeo diferenciable $V : M \longrightarrow TM$ tal que para cada punto $p \in M$ se tiene que $V(p) = v_p \in T_pM$, es decir, un campo vectorial asigna a cada $p \in M$ un vector tangente a p en M (ver figura 5).

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Los mapeos $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ definidos por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{43}$$

son campos vectoriales diferenciales en M llamados los campos vectoriales coordenados y se tiene que cada campo vectorial diferenciable V en M se escribe localmente como

$$V \;=\; V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{44}$$

con $V^i \in C^\infty(U \subseteq M)$, luego

$$V(p) \;=\; V^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p. \tag{45}$$

El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en M se denota por $\mathfrak{X}(M)$. Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor de $p \in M$, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\,. \tag{46}$$

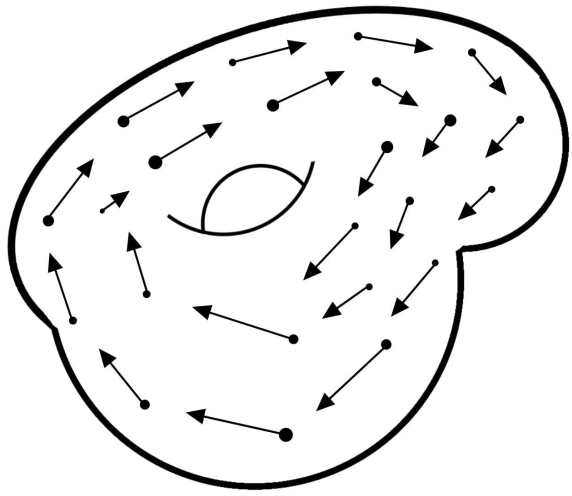


FIGURA 5. Un campo vectorial asigna a cada punto un vector tangente a dicho punto.

TEOREMA 37. *Derivación* [7]*: Todo campo vectorial diferenciable V en M es una derivación en M, es decir, es una transformación lineal $V : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ que satisface la regla de Leibniz*

$$V(fg) = fV(g) + gV(f)\,, \tag{47}$$

para todas $f, g \in C^\infty(M)$.

Dada $f \in C^\infty(M)$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$, con $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en coordenadas locales, tenemos

$$V(f) \;=\; V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(M). \tag{48}$$

$$V(f)(p) = \; V^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v_p(f). \tag{49}$$

Definición 38. Conmutador: Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. El corchete de Lie de V y W definido por

$$[V, W] = VW - WV\,, \tag{50}$$

es también un campo vectorial diferenciable en M. $(\mathfrak{X}(M), [,])$ es un álgebra de Lie.

Para coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ en M se tiene que

$$V \;=\; V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad y \qquad W \;=\; W^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{51}$$

luego

$$[V, W] = \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - \; W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{52}$$

5.2. Curvas integrales. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 39. Curva integral: Una curva integral de V es una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$, tal que $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$, donde I es un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$ que contiene al cero. Es decir, en cada punto sobre la curva el campo vectorial es el vector velocidad (ver figura 6).

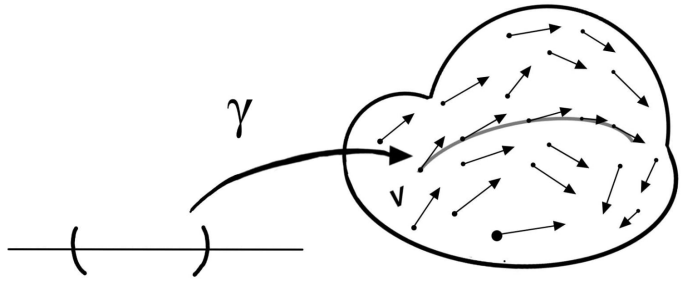


FIGURA 6. Una curva integral de un campo vectorial diferenciable es una curva cuyo vector velocidad en cada punto coincide en dicho punto con el vector tangente asignado por el campo vectorial.

Ejemplo 16. Sean (x, y) coordenadas en M. $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Una curva integral de V es una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $\dot{x} = -y$ y $\dot{y} = x$, así que $\gamma(t) = (a\,cos(t) - b\,sen(t), a\,sen(t) + b\,cos(t))$ donde a, b son constantes que se obtienen con las condiciones iniciales.

Definición 40. Flujo: Un flujo diferenciable (o solo flujo) en M es un mapeo diferenciable $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ con I un intervalo abierto que contiene al cero, tal que $\Psi(s, (\Psi(t, p))) = \Psi(s + t, p)$ y $\Psi(0, p) = p$.

Dado un flujo Ψ en M, para cada $p \in M$ podemos considerar la curva diferenciable $\Psi^p : I \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$, y el vector tangente $v_p \in T_pM$ dado por $v_p = \frac{d}{ds}\Psi^p(s)|_{s=0}$; tenemos que el mapeo $p \mapsto v_p$ es un campo vectorial diferenciable V en M llamado el generador infinitesimal del flujo. El siguiente teorema nos da una versión reciproca de este resultado.

TEOREMA 41. ***Teorema fundamental en flujos*** [7]***:*** *Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único flujo $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ tal que para cada $p \in M$ se tiene que la función $\Psi^p : I \subseteq R \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$ es una curva integral de V y la función $\Psi_s : M \longrightarrow M$ definida por $\Psi_s(p) = \Psi(s, p)$ es un (posiblemente local) difeomorfismo.*

Ejemplo 17. Ejemplos de flujos de campos vectoriales:

- El flujo de $V = \frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2$ es el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\Psi(s, x, y,) = (x + s, y). \tag{53}$$

- El flujo de $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2$ es el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\Psi(s, x, y,) = (x\ \cos(s) - y\ \sin(s), x\ \sin(s) + y\ \cos(s)). \tag{54}$$

Definición 42. Pushforward: Dado $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades diferenciales. El pushforward de V por F, denotado por F_*V es el único campo vectorial diferenciable en N tal que

$$F_*v_{F(p)} = DF_pv_p. \tag{55}$$

Definición 43. Derivada de Lie: Sea $W \in \mathfrak{X}(M)$. La derivada de Lie de W con respecto de V es el campo vectorial diferenciable en M definido por

$$L_VW = \frac{d}{ds}|_{s=0}\Psi_{s*}W, \tag{56}$$

donde Ψ es el flujo de V.

La derivada de Lie mide el cambio de W a lo largo del flujo del campo vectorial V. Si $L_VW = 0$ se dice que W es invariante bajo el flujo de V.

TEOREMA 44. *Se tiene que* [7]

$$L_V W = [V, W]. \tag{57}$$

5.3. Sistemas mecánicos. La Mecánica Clásica se centra en describir la evolución temporal de sistemas físicos cuyo movimiento futuro y pasado están completamente determinados por sus condiciones iniciales, es decir, las posiciones y velocidades iniciales de todas sus partículas. A estos sistemas se les conoce como sistemas mecánicos (clásicos).

El espacio fase de un sistema mecánico es el conjunto formado por todas las configuraciones posibles de posiciones y velocidades de sus partículas [1]. Henri Poincaré introdujo la idea de visualizar un sistema mecánico como un campo de vectores en el espacio fase, donde una trayectoria es una curva diferenciable cuya velocidad en cada punto coincide con el vector asignado por dicho campo. Esta concepción condujo a Poincaré a la noción de variedad diferencial como el marco geométrico natural para describir el espacio fase en Mecánica Clásica [2].

$V \in \mathfrak{X}(M)$ define un sistema mecánico (clásico) en M cuyas trayectorias son las curvas integrales de V [10]. Sean $(x^1, \cdots, x^n)$ coordenadas locales en M, la expresión local de V es $V = V^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$, y las curvas integrales $\gamma(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ de V satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = V^1(x^1, \cdots, x^n), \\ \qquad\vdots \\ \dot{x}^n = V^n(x^1, \cdots, x^n). \end{cases} \tag{58}$$

Consideremos un sistema mecánico (M, V), M es el espacio fase del sistema y V es el campo vectorial dinámico. El sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (58) es el sistema de ecuaciones (locales) de movimiento (el movimiento en Mecánica Clásica se describe usando ecuaciones diferenciales ordinarias [1]). La evolución de una función $f \in C^\infty(M)$ (un observable físico) a lo largo de las trayectorias del sistema está dado por

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df_{\gamma(t)}(\frac{d}{dt}\gamma(t)) = (\frac{d}{dt}\gamma(t))(f) = V_{\gamma(t)}(f) = (Vf)(\gamma(t)), \tag{59}$$

así que la evolución temporal de f queda determinada por

$$\dot{f} = Vf. \tag{60}$$

Una función $f \in C^\infty(M)$ se llama una constante de movimiento (o una integral de movimiento) del sistema mecánico (M, V) si f es constante a lo largo de las trayectorias del sistema (físicamente representa una cantidad conservada), lo cual es equivalente a $Vf = 0$. La existencia de constantes de movimiento permite construir un sistema mecánico cuya dinámica está contenida en la dinámica del sistema dinámico original, es decir, es posible construir un sistema reducido tal que sus trayectorias son trayectorias del sistema original. En términos de las ecuaciones de movimiento, la existencia de una constante de movimiento permite buscar trayectorias del sistema que son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales reducido; en efecto, supongamos que f es una constante de movimiento de (M, V), se tiene que el conjunto de nivel

$$M_f \;=\; \{\, x \in M :\; f(x) \;=\; c,\, c \in \mathbb{R}\} \;,$$

es una subvariedad diferencial de M de codimensión 1 para valores regulares de f [7] y, es cerrada bajo la dinámica de V, es decir, si $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V tal que $\gamma(t_0) \in M_f$ para algún $t_0 \in I$ entonces $\gamma(t) \in M_f$ para cada $t \in I$. La última afirmación puede ser probada como sigue: suponga que $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V tal que $\gamma(t_0) \in M_f$ para algún $t_0 \in I$, entonces $f(\gamma(t_0)) = c$ y, ya que f es constante a lo largo de la trayectoria, es decir, $f(\gamma(t)) = c$ para cada $t \in I$, se concluye que $\gamma(t) \in M_f$ para cada $t \in I$. Así es posible buscar trayectorias de (M, V) que viven en M_f. Es importante resaltar que las trayectorias de (M, V) que viven en M_f no son todas las trayectorias del sistema, pero ellas pueden ser encontradas

resolviendo un sistema de ecuaciones reducido; en efecto, si f es una constante de movimiento de (M, V) las curvas integrales de V que viven en M_f son curvas integrales de la restricción $V|_{M_f}$ del campo vectorial V a M_f, así si $(y^1, \cdots, y^{n-1})$ son coordenadas locales en M_f entonces tales curvas integrales son soluciones de la ecuaciones diferencial vectorial $\dot{Y} = V|_{M_f}(Y)$, donde $Y = (y^1, \cdots, y^{n-1})$, la cual es equivalente a un sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La noción de integrabilidad para sistemas Hamiltonianos es bien conocida por la comunidad física, a saber, el famoso teorema de Liouville establece que el conocimiento de una cantidad suficiente de funcionalmente independiente constantes de movimiento en involución, permite resolver las ecuaciones de Hamilton por cuadraturas [17, 22, 10, 20], es decir, realizando un número finito de operaciones algebraicas y calculando integrales de funciones conocidas. Una noción de integrabilidad local ha sido estudiada en [23], ahí la noción de integral de movimiento (constante de movimiento) ha sido generalizada a integral particular. Para sistemas mecánicos generales, Lie estableció un marco que permite resolver las ecuaciones de movimiento por cuadraturas, en cuyo caso se dice que el sistema es integrable por cuadraturas. Para esto Lie introdujo la noción de álgebra de Lie soluble de una manera análoga a la noción de grupo soluble empleada por Galois para resolver ecuaciones algebraicas; el resultado principal de ese trabajo es conocido como el teorema de Lie en integrabilidad de ecuaciones diferenciales vectoriales, el cual se detalla, con un lenguaje moderno, a continuación.

Definición 45. Se dice que un campo vectorial W en M es una simetría del campo vectorial V si $[W, V] = 0$, donde $[,]$ es el conmutador de campos vectoriales.

Sea W un campo vectorial diferenciable en M. Se sigue del teorema de rectificación (Straightening Out Theorem) [10, 1] que existen coordenadas locales $(y^1, \ldots, y^n)$ en M tales que $W(y) = \frac{\partial}{\partial y^n}$. Observe que si W es una simetría de V, esto es $[W, V] = 0$, entonces las funciones componentes $\overline{V}^1, \ldots, \overline{V}^n$ de V en términos de los campos vectoriales coordenados $\frac{\partial}{\partial y^i}$ no dependen de la coordenada y^n, en efecto,

$$0 = [W, V] = \left[\frac{\partial}{\partial y^n}, \overline{V}^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \frac{\partial \overline{V}^i}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{61}$$

por lo tanto $\frac{\partial \overline{V}^i}{\partial y^n} = 0$, i.e. $\overline{V}^i = \overline{V}^i(y^1, \ldots, y^{n-1})$ para $i = 1, \ldots, n$. Así que el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema dado por V es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \overline{V}^1(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \qquad \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = \overline{V}^{n-1}(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \dot{y}^n = \overline{V}^n(y^1, \ldots, y^{n-1}). \end{cases} \tag{62}$$

Esto quiere decir que el problema de resolver el sistema de ecuaciones de movimiento se reduce a resolver el siguiente sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \overline{V}^1(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \qquad \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = \overline{V}^{n-1}(y^1, \ldots, y^{n-1}), \end{cases} \tag{63}$$

y luego integrar la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{y}^n = \overline{V}^n(y^1, \ldots, y^{n-1}). \tag{64}$$

Observe que si fuera posible realizar el proceso anterior al sistema de ecuaciones diferenciales (63) entonces se tendría un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y dos ecuaciones diferenciales integrables. Lo anterior es posible si se tiene otra simetría Z de V tal que $[Z, W] = \lambda W$ con λ un escalar real no nulo; en efecto,

suponga que se tiene una segunda simetría Z de V satisfaciendo $[Z,W]=\lambda W$, se ve que las funciones componentes de Z no dependen de la coordenada y^n, en efecto

$$\begin{aligned}\lambda W=[Z,W] &\Longrightarrow \lambda\frac{\partial}{\partial y^n}=\left[Z^i\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^n}\right]\\ &\Longrightarrow \lambda\frac{\partial}{\partial y^n}=-\frac{\partial Z^i}{\partial y^n}\frac{\partial}{\partial y^i}\\ &\Longrightarrow \frac{\partial Z^i}{\partial y^n}=0,\quad \forall i\in\{1,\dots,n-1\},\end{aligned}\tag{65}$$

así que $Z^i=Z^i(y^1,\dots,y^{n-1})$ para $i=1,\dots,n-1$; por lo tanto el campo vectorial diferenciable $Z^1\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+Z^{n-1}\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ es una simetría del campo vectorial diferenciable $\overline{V}^1\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+\overline{V}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ y es posible aplicar el procedimiento previo para reducir el sistema (63) a un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y una ecuaciones diferencial ordinaria integrable, lo que lleva a un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y dos ecuaciones diferenciales ordinarias integrables. Repitiendo este proceso un número suficiente de veces, se obtendrían las soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento original solo integrando ecuaciones diferenciales ordinarias y haciendo algunas operaciones algebraicas (cambios de coordenadas); esto es posible si se tiene un álgebra de Lie soluble de simetrías.

Definición 46. Álgebra de Lie soluble: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

- Una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial L de $\mathfrak{g}$ tal que $[X,Y]\in L$ $\forall X,Y\in L$.
- Un subespacio vectorial I de $\mathfrak{g}$ se llama un ideal de $\mathfrak{g}$ si $[X,Y]\in I$ $\forall X\in I$ y $\forall Y\in\mathfrak{g}$. Observe que todo ideal es también una subálgebra de Lie.
- Se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble si existe una sucesión finita de subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$, digamos $L_1,\dots,L_n$ con $n=dim(\mathfrak{g})$, tal que $\{0\}=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_{n-1}\subset L_n=\mathfrak{g}$ y L_i es un ideal de L_{i+1} de codimension 1 para $i=0,1,\dots,n-1$.

Ejemplo 18.

- Toda álgebra de Lie Abeliana, es decir, donde todos sus elementos conmutan, es trivialmente un álgebra de Lie soluble.
- El álgebra de Lie formada por los campos vectoriales $V_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$, $V_2=z\frac{\partial}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial y}$, $V_3=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}-w\frac{\partial}{\partial w}\in\mathcal{X}(\mathbb{R}^4)$ es un álgebra de Lie soluble.

Tenemos el teorema de Lie a continuación.

Teorema 47. *Teorema de Lie* [17]*: Sean $W_1,\dots W_n$ campos vectoriales diferenciales linealmente independientes en M. Si $W_1,\dots,W_n$ son simetrías de V y generan un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie $[,]$ de campos vectoriales, entonces el sistema definido por V en M es integrable por cuadraturas.*

En la práctica buscamos simetrías que formen un álgebra de Lie Abeliana, es decir, simetrías que conmuten entre ellas. Para un ejemplo no trivial de un álgebra de Lie soluble no Abeliana de simetrías de un sistema mecánico ver [20].

La integrabilidad de un campo vectorial V es usualmente estudiada en matemáticas por medio de sus estructuras geométricas compatibles [24]. Estructuras geométricas son definidas por campos tensoriales, y se dice que son compatibles cuando son invariantes bajo el flujo del campo vectorial [25]. Como un caso particular se tiene el de una función invariante bajo el flujo de un campo vectorial, es decir, una constante de movimiento. En la siguiente sección se estudian los campos tensoriales.

6. Tensores

En el lenguaje matemático moderno, los tensores se definen como objetos abstractos, independientes de coordenadas o índices. No obstante, al trabajar en un sistema de referencia específico, los tensores adquieren una representación en términos de

componentes. Aunque los tensores en sí no dependen del sistema de referencia, sus componentes sí lo hacen y varían en función de este.

En diversos textos, especialmente en la literatura física, los tensores suelen presentarse desde un enfoque basado en coordenadas, describiéndolos como un conjunto de cantidades (sus componentes) que dependen de las coordenadas de un espacio dado (una variedad diferencial) y que se transforman de manera bien definida bajo cambios de coordenadas [26, 27]. Este enfoque tiene la ventaja de requerir menos formalismo matemático, permitiendo una introducción más accesible a la manipulación de tensores. Sin embargo, al centrarse en la estructura local y en coordenadas, se pierden ciertos aspectos geométricos y conceptuales que emergen en una formulación global y libre de coordenadas.

En estas notas, adoptamos inicialmente una perspectiva abstracta y global para introducir los tensores, enfatizando su independencia de coordenadas. Posteriormente, desarrollamos su descripción local a partir de esta formulación abstracta, integrando ambos enfoques de manera coherente [7, 10, 15].

6.1. Tensores en un espacio vectorial.

Definición 48. Transformación multilineal: Sean $V_1, ..., V_k, W$ espacios vectoriales. Una transformación $T : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$ se dice k-lineal (o simplemente multilineal) si es lineal en cada argumento, es decir,

$$T(v_1, \ldots, v_i + av_i', \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + aT(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)\,, \tag{66}$$

para todo $(v_1, \ldots, v_k) \in: V_1 \times \cdots \times V_k$ y para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si $k = 1$ se dice que la transformación es lineal y si $k = 2$ se dice que la transformación es bilineal.

Ejemplo 19. Ejemplos de funciones multilineales:

- El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es una función bilineal de dos vectores a valores reales.
- El producto cruz en $\mathbb{R}^3$ es una función bilineal de dos vectores a valores vectoriales.
- El determinante de una matriz cuadrada es una función multilineal de vectores a valores reales.

Definición 49. Producto tensorial: Sean $V_1, ..., V_k, W_1, ..., W_l$ espacios vectoriales. Sean $F : V_1 \times ... \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$ una transformación k-lineal y $G : W_1 \times ... \times W_l \longrightarrow \mathbb{R}$ una transformación l-lineal. El producto tensorial de F y G es la transformación $(k + l)$-lineal $F \otimes G : V_1 \times ... \times V_k \times W_1 \times ... \times W_l \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F \otimes G(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_l) = F(v_1, ..., v_k)G(w_1, ..., w_l). \tag{67}$$

Sea V un espacio vectorial.

Definición 50. Covector: Un covector en V es una transformación lineal $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto de todos los covectores en V es un espacio vectorial de la misma dimensión que V, se llama espacio dual de V y se denota por V^*.

Definición 51. Tensores covariantes y contravariantes:

- Un k-tensor covariante en V es un transformación k-lineal $T : V \times ... \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Un k-tensor contravariante en V es un transformación k-lineal $T : V^* \times ... \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 20. Ejemplos de tensores covariantes:

- Cada función lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un 1-tensor covariante, es decir, un covector.
- El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un 2-tensor covariante.
- El determinante de de n vectores es un n-tensor covariante.

Un 0-tensor en V es un número real.

Definición 52. Tensor mixto: Un tensor mixto en V de tipo (k,l) es una transformación multilineal $T : V^* \times \cdots V^* \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, donde hay k copias de V^* y l copias de V.

En el resto de esta sección nos enfocaremos principalmente en tensores covariantes.

Definición 53. Tensores simétricos y antisimétricos:

- Un k-tensor covariante α en V se dice simétrico si su valor no cambia al intercambiar dos de sus argumentos, es decir,

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k). \tag{68}$$

- Un k-tensor covariante α en V se dice antisimétrico o alternante (skew-symmetric) si su valor cambia de signo al intercambiar dos de sus argumentos, es decir,

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k). \tag{69}$$

6.2. Campos tensoriales en una variedad. Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 54. Covector tangente: Sea $p \in M$. Un covector tangente a p en M es una transformación lineal $\alpha_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, un covector tangente a p en M es un elemento del espacio vectorial T_p^*M que se llama espacio cotangente a p en M.

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Las funciones $dx^i|_p : T_p(M) \to R$ definidas por

$$dx^i|_p(v_p) = v_p^i\,, \tag{70}$$

donde $v_p = v_p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + ... + v_p^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, son covectores tangentes a p en M.

Todo covector tangente α_p a $p \in M$ es (localmente) combinación lineal de los covectores $dx^i|_p$,

$$\alpha_p = \alpha_{1p} dx^1|_p + ... + \alpha_{np} dx^n|_p\,, \tag{71}$$

con $\alpha_{1p}, \ldots, \alpha_{np} \in \mathbb{R}$.

Definición 55. Fibrado cotangente: El fibrado cotangente de M es la unión de todos los espacios cotangentes, se denota por T^*M,

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M\,, \tag{72}$$

es una variedad diferencial de dimensión $2n$.

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas alrededor de $p \in M$ entonces $(x^1, \ldots, x^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ son coordenadas alrededor de $(p, \alpha_p) \in T^*M$.

Definición 56. Campo de covectores tangentes: Un campo diferencial de covectores tangentes en M es un mapeo diferenciable $\alpha : M \longrightarrow T^*M$ tal que para cada punto $p \in M$ se tiene que $\alpha(p) = \alpha_p \in T_p^*M$, es decir, un campo de covectores asigna a cada $p \in M$ un covector tangente a p en M.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$,

$$\alpha_p \;=\; \alpha_i(p) dx^i|_p, \tag{73}$$

donde $\alpha_i(p) \in \mathbb{R}$. Así que

$$\alpha \;=\; \alpha_i dx^i, \tag{74}$$

con $\alpha_i \in C^\infty(U \subseteq M)$ y dx^i son campos de covectores coordenados que funcionan como bases. El conjunto de todos los campos de covectores en M se denota por $\Omega^1(M)$.

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor del punto p en la variedad M, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i. \tag{75}$$

Definición 57. Diferencial de una función diferenciable: Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, es decir, $f \in C^\infty(M)$. Para cada $p \in M$ la diferencial de f en p es la transformación lineal $df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $df_p(v_p) = v_p(f)$ para todo $v_p \in T_pM$.

Entonces, la diferencial de una función diferenciable es un campo diferencial de covectores tangentes.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$, se tiene que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \,, \tag{76}$$

así que

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p. \tag{77}$$

Definición 58. Campo de tensores: Un campo diferencial de k-tensores (smooth k-tensor field) covariantes (o contravariantes o mixtos) en M es un mapeo diferenciable A que asigna a cada $p \in M$ un k-tensor covariante (o contravariante o mixto) en T_pM, es decir, $A(p)$ es un k-tensor covariante (o contravariante o mixto) en T_pM.

Un campo diferencial de 0-tensores en M (o solo un 0-tensor) es una función diferenciable $f \in C^\infty(M)$.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$ se tiene:

- Si A es un campo diferencial de k-tensores covariantes (o solo un k-tensor covariante) en M entonces

$$A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}, \tag{78}$$

  con $A_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.
- Si A es un campo diferencial de k-tensores contravariantes (o solo un k-tensor contravariante) en M entonces

$$A = A^{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \tag{79}$$

  con $A^{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.
- Si A es un campo diferencial de tensores mixtos de tipo (k, l) (o solo un (k, l)-tensor) en M entonces

$$A = A^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_l}, \tag{80}$$

  con $A^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_l} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.

Sea A un k-tensor covariante en M, en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ se tiene $A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$. Si tenemos un cambio de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ a nuevas $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$, podemos escribir el tensor A en las nuevas coordenadas, tenemos

$$A = \bar{A}_{i_1 \ldots i_k} d\bar{x}^{i_1} \otimes \cdots \otimes d\bar{x}^{i_k}. \tag{81}$$

Se sabe que $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$, así que

$$A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} = A_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{j_k}} d\bar{x}^{j_1} \otimes \cdots \otimes d\bar{x}^{j_k}, \tag{82}$$

Por lo tanto

$$\bar{A}_{j_1 \ldots j_k} = A_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{j_k}}. \tag{83}$$

La ecuación (83) es la regla general para la transformación de las componentes de un tensor covariante bajo un cambio de coordenadas. En el enfoque en coordenadas, los tensores covariantes son definidos como cantidades dependientes de coordenadas que se transforman de acuerdo a la ecuación 83 bajo un cambio de coordenadas [26].

Para un tensor contravariante $A = A^{i_1\dots i_k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$, la regla para el cambio de coordenadas es

$$\bar{A}^{j_1\dots j_k} = A^{i_1\dots i_k}\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}}. \tag{84}$$

Ejemplo 21. Tensores en relatividad general:

- En relatividad general es espacio-tiempo está modelado matemáticamente por una variedad Riemanniana [26], es decir, una variedad diferencial M equipada con un tensor métrico g, éste es un 2-tensor covariante simétrico. En coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$ el tensor métrico tiene la forma

$$g = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{85}$$

- En relatividad general la curvatura del espacio-tiempo está determinada matemáticamente por el tensor de curvatura de Riemann, el cual es un tensor mixto 1-vez contravariante y 3-veces covariante cuyas componentes locales R^l_{ijk} son definidas por medio del tensor métrico (ver detalles en [26]).

En Mecánica Clásica los tensores suelen aparecer como estructuras geométricas, las más conocidas son estructuras de Poisson, definidas por tensores de Poisson, y en particular las estructuras simplécticas, definidas por formas diferenciales simplécticas. Las estructuras de Poisson fueron introducidas por Lichnerowicz [28] (para una breve historia en las variedades de Poisson ver [15]). Por otro lado, los llamados tensores de Nijenhuis y tensores de Haantjes, los cuales son tensores mixtos, han sido estudiados en relación con la integrabilidad de sistemas Hamiltonianos [29, 30, 31, 32, 33, 34].

6.3. Estructuras de Poisson. Sea M una variedad diferencial.

Definición 59. Tensor de Poisson: Un tensor de Poisson en M es un 2-tensor contravariante antisimétrico P tal que $[P, P]_{SN} = 0$, donde $[,]_{SN}$ es el corchete de Schouten–Nijenhuis [32, 15]. Si P es un tensor de Poisson en M se dice que (M, P) es una variedad de Poisson.

Definición 60. Paréntesis de Poisson: Un paréntesis de Poisson en M es un corchete de Lie en $C^\infty(M)$, denotado por $\{,\}$ (bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi), que satisface la regla de Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}. \tag{86}$$

Varios ejemplos de paréntesis de Poisson son presentados en [15].

Teorema 61. *Estructura de Poisson* [15]*:*

- *Si P es un tensor de Poisson en M entonces P define un paréntesis de Poisson en M por*

$$\{f, g\} = P(df, dg). \tag{87}$$

- *Si $\{,\}$ es un paréntesis de Poisson en M entonces existe un tensor de Poisson que lo define.*

En cualquier caso se dice que se tiene una estructura de Poisson en M.

Para más detalles en estructuras de Poisson ver [35].

Sea (M, P) una variedad de Poisson de dimensión m. en coordenadas locales $(x^1, \dots, x^m)$ en M se tiene que

$$P = \sum_{1\le i<j\le m}\{x^i, x^j\}\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{88}$$

y para $f, g \in C^\infty(M)$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n}\{x^i, x^j\}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}, \tag{89}$$

donde $\{,\}$ es el paréntesis de Poisson definido por P.

Cada 2-tensor contravariante Q es una variedad diferencial M define un homomorfismo de fibrados $Q^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$ dado para cada $x \in M$ por

$$\alpha_x(Q_x^\sharp \beta_x) = Q_x(\alpha_x, \beta_x); \tag{90}$$

también se puede hacer referencia al mapeo inducido $Q^\sharp : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\alpha(Q^\sharp(\beta)) = Q(\alpha, \beta). \tag{91}$$

El rango de Q en el punto $x \in M$ es el rango de la transformación lineal $Q_x^\sharp$. Se dice que Q es de rango constante si tiene el mismo rango para todo $x \in M$. El rango de un tensor de Poisson P en cualquier punto en M es par [35].

El siguiente teorema debido a Weinstein describe la estructura local de una variedad de Poisson.

Teorema 62. *Weinstein's splitting theorem* [36, 37]*: Sea (M, P) una variedad de Poisson. Sea $x \in M$ con rango $2r$. Existe una carta coordenada en un abierto U de x con coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ tales que*

$$P = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i} + \sum_{1 \le k < l \le s} \phi^{kl}(z) \frac{\partial}{\partial z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial z^l}, \tag{92}$$

donde las funciones φ^{kl} son funciones diferenciables en U que dependen solo de las coordenadas $z = (z^1, \ldots, z^s)$ y se anulan cuando $z = 0$; las coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ se llaman coordenadas de división en $x \in M$. En particular, si P es localmente de rango constante, entonces existen coordenadas locales $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ tales que

$$P = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i}; \tag{93}$$

en este caso las coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ se llaman coordenadas de Darboux.

La existencia de una estructura de Poisson en una variedad diferencial permite la construcción de campos vectoriales Hamiltonianos, los cuales definen dinámica Hamiltoniana en tal variedad. Sea (M, P) una variedad de Poisson.

Teorema 63. *Campo vectorial Hamiltoniano* [15]*: Para cada $f \in C^\infty(M)$ existe uno y solo un campo vectorial X_f en M tal que*

$$\{g, f\} = X_f g \quad \forall g \in C^\infty(M), \tag{94}$$

donde $\{,\}$ es el paréntesis de Poisson definido por P. En términos del mapeo inducido $P^\sharp$ se tiene

$$X_f = P^\sharp(df). \tag{95}$$

X_f se llama el campo vectorial Hamiltoniano para f.

Proposición 64.

- *La asignación $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie entre las álgebras de Lie $(C^\infty(M), \{,\})$ y $(\mathfrak{X}(M), [,])$, en efecto se tiene que $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.*
- *$g \in C^\infty(M)$ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_f, es decir $L_{X_f} g = 0$, si y solo si $\{f, g\} = 0$.*
- *Los flujos Hamiltonianos preservan la estructura de Poisson, es decir, $L_{X_f} P = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$.*
- *Si $f, g \in C^\infty(M)$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de X_h entonces también lo es $\{f, g\}$.*

Para la prueba de esta proposición y para la prueba del teorema 63 ver [15, 35]. En coordenadas de división $(q^1,\dots,q^r,p^1,\dots,p^r,z^1,\dots,z^s)$ para (M,P) se tiene

$$X_f=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)+\sum_{1\le k<l\le s}\phi^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^k}-\sum_{1\le k<l\le s}\phi^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial z^l}, \tag{96}$$

o en una forma más compacta

$$X_f=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)+\sum_{k,l=1}^{s}\hat{\phi}^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^k}, \tag{97}$$

donde$\hat{\phi}^{kl}(z)=\phi^{kl}(z)$ para $k<l$, $\hat{\phi}^{kl}(z)=-\phi^{kl}(z)$ para $k<l$ y $\hat{\phi}^{kl}(z)=0$ para $k=l$. Para más detalles en estructuras de Poisson y Mecánica Hamiltoniana en variedades de Poisson ver [15, 35, 38].

Cada variedad de Poisson es de manera natural la unión disjunta de subvariedades inmersas (subvariedades que pueden tener una topología diferente a la topología de subespacio, para detalles en este tipo de subvariedades ver [7]), cuyos espacios tangentes son generados por los campos vectoriales Hamiltonianos. La estructura de Poisson restringida a cada una de estas subvariedades es una estructura de Poisson de rango máximo par, es decir, una estructura simpléctica, por lo que estas subvariedades se llaman hojas simplécticas de la estructura de Poisson (estas hojas forman una estructura geométrica llama foliación, en particular forman la foliación simpléctica). Para cada $x\in M$ la hoja simpléctica que contiene a x está dada

$$\mathcal{L}_x(M)=\{x'\in M|\exists \text{ un camino Hamiltoniano a trozos en M de x a } x'\}. \tag{98}$$

Las hojas simplécticas son cerradas bajo la dinámica de cualquier campo vectorial Hamiltoniano. En la sección 8 se presentan las estructuras simplécticas con detalle.

7. Formas diferenciales

En la sección anterior fueron presentados dos tipos de tensores covariantes, los simétricos y los antisimétricos (o alternantes). Un tipo especial de tensores simétricos son las métricas Riemannianas. En esta sección se revisa la teoría de las formas diferenciales (differential forms), las cuales son campos tensoriales alternantes.

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

7.1. 0-formas.

Definición 65. 0-forma: Una 0-forma diferencial en M es una función diferenciable $f\in C^\infty(M)$.

En mecánica, una función de estado termodinámico, un Lagrangiano y un Hamiltoniano son ejemplos de 0-formas definidos sobre un espacio de configuración o espacio fase, respectivamente (en general, un observable es una 0-forma).

Definición 66. Derivada de una 0-forma: Sea $f\in C^\infty(M)$. Para cada $p\in M$ la diferencial de f en p es la transformación lineal $df_p:T_pM\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $df_p(v_p)=v_p(f)$ para todo $v_p\in T_pM$.

Sean $(x^1,\dots,x^n)$ coordenadas alrededor de p en M, se tiene que

$$\begin{aligned} df_p&=\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx^1|_p+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)dx^n|_p\\ &=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p\,, \end{aligned} \tag{99}$$

donde

$$dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right)=\delta^i_j=\begin{cases}1\,,\ si\ i=j.\\ 0\,,\ si\ i\neq j.\end{cases} \tag{100}$$

Si v_p es un vector tangente a p en M, entonces

$$v_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \,, \tag{101}$$

donde $v_p^i \in \mathbb{R}$. Luego

$$dx^i|_p(v_p) = v_p^i \in \mathbb{R}. \tag{102}$$

Ejemplo 22. Sean (x, y, z) coordenadas alrededor del punto $p = (1, 0, -2) \in M$ y la función $f(x, y, z) = x^2y - 2xz^3$. Calcular df_p y $df_p(v_p)$ con $v_p = 5\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$.

- df_p

$$\begin{aligned} df_p &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz\Big|_p \\ &= (2xy - 2z^3)\Big|_{(1,0,-2)} dx\Big|_{(1,0,-2)} + x^2\Big|_{(1,0,-2)} dy\Big|_{(1,0,-2)} - 6xz^2\Big|_{(1,0,-2)} dz\Big|_{(1,0,-2)} \\ &= 16dx\Big|_{(1,0,-2)} + dy\Big|_{(1,0,-2)} - 24dz\Big|_{(1,0,-2)} . \end{aligned}$$

- $df_p(v_p)$

$$\begin{aligned} df_p(v_p) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx\Big|_p(v_p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy\Big|_p(v_p) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz\Big|_p(v_p) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)v_p^x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)v_p^y + \frac{\partial f}{\partial z}(p)v_p^z \\ &= (16)(5) + (1)(-2) - (24)(-1) \\ &= 102 \,. \end{aligned}$$

7.2. 1-formas.

Definición 67. 1-forma: Una 1-forma diferencial en M es un campo de covectores tangentes en M, es decir, un mapeo diferenciable $\theta : M \longrightarrow T^*M$ tal que para cada $p \in M$ $\theta(p) = \theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal.

El conjunto de 1-formas diferenciales en M se denota igual que el conjunto de campos de covectores tangentes en M, a saber, $\Omega^1(M)$. En coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ alrededor de $p \in M$, tenemos que $dx^1, ..., dx^n$ son 1-formas diferenciales en M, llamadas las 1-formas coordenadas. Cualquier 1-forma diferencial θ en M se escribe como

$$\theta = \theta_i dx^i \,, \tag{103}$$

con $\theta_i \in C^\infty(M)$. Evaluada en p, la expresión (103) queda como

$$\theta_p = \theta_i(p)dx^i|_p \,. \tag{104}$$

Así que si $v_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un vector tangente a p en M, entonces

$$\theta_p(v_p) = \theta_i(p)v_p^i. \tag{105}$$

Ejemplo 23. Sean las coordenadas (x, y, z) alrededor del punto $p = (0, 1, -1)$ en M. Calcular $\theta_p(v_p)$ donde $\theta = (x-y)dx + (x^2+3z^2+4y^2)dy - 2\cos x dz$ es una 1-forma y $v_p = 5\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ es un vector tangente a p en M.

Sol: De la expresión (104), evaluamos la 1-forma θ en el punto $p = (0, 1, -1)$:

$$\begin{aligned} \theta_p &= \theta_i(p)dx^i\Big|_p \\ &= -dx\Big|_{(0,1,-1)} + 7dy\Big|_{(0,1,-1)} - 2dz\Big|_{(0,1,-1)} . \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}\theta_p(v_p) &= (-1)(5) + (7)(-2) + (-2)(-1)\\ &= -5 - 14 + 2\\ &= -17\,.\end{aligned} \tag{107}$$

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor del punto p en la variedad M, la regla de transformación para las 1-formas coordenadas dx^i es

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i\,. \tag{108}$$

Ejemplo 24. Cambio de coordenadas cartesianas a polares.
Buscando hacer el cambio

$$(x, y) \to (r, \theta)\,,$$

partimos de las expresiones de las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta\,, \tag{109}$$

y basándonos en la regla de transformación, tenemos

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta\\ &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\,,\end{aligned} \tag{110}$$

y

$$\begin{aligned}dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta\\ &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\,.\end{aligned} \tag{111}$$

La derivada de una 0-forma (la diferencial de una función diferenciable) es una 1-forma diferencial.

7.3. 2-formas.

Definición 68. 2-forma: Una 2-forma diferencial ω en M es un mapeo diferenciable ω que asigna a cada punto $p \in M$ una transformación bilineal antisimétrica. $\omega(p) = \omega_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$

Recordemos que una transformación es bilineal (o en general multilineal) si es lineal en cada argumento $T(v_1 + av_2, w) = T(v_1, w) + aT(v_2, w)$ para todo $v_1, v_2, w \in T_pM$ y para todo $a \in \mathbb{R}$ (lo mismo en el segundo argumento). Y es antisimétrica si al intercambiar dos argumentos obtenemos un signo negativo ($T(v, w) = -T(w, v)$).

Definición 69. Producto Wedge: Sean θ y α 1-formas diferenciales en M, el producto Wedge (también llamado producto cuña) se denota por $\theta \wedge \alpha$ es una 2-forma diferencial en M definida en cada $p \in M$ por

$$(\theta \wedge \alpha)|_p(v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} \theta_p(v_p) & \theta_p(\bar{v}_p) \\ \\ \alpha_p(v_p) & \alpha_p(\bar{v}_p) \end{vmatrix}\,. \tag{112}$$

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$, $dx^i \wedge dx^j$ son las 2-formas coordenadas. Toda 2-forma diferencial ω en M se escribe como:

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j\,, \tag{113}$$

con $\omega_{ij} \in C^\infty(M)$. Las 2-formas coordenadas siguen las siguientes propiedades:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i\,, \tag{114}$$

$$dx^i \wedge dx^i = 0\,. \tag{115}$$

Ejemplo 25. Sean (x, y, z) coordenadas alrededor del punto $p = (1, 2, 3) \in M$ y la 2-forma $\omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dx \wedge dy - 4dx \wedge dz + 2xydy \wedge dz$. Calcular $\omega_p(v_p, \bar{v}_p)$, en el que $v_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 5\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ y $\bar{v}_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 3\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$.

Solución: Primero, evaluando la 2-forma ω en $p = (1, 2, 3)$:

$$\omega_p = \sqrt{14}(dx \wedge dy)\Big|_{(1,2,3)} - 4(dx \wedge dz)\Big|_{(1,2,3)} + 4(dy \wedge dz)\Big|_{(1,2,3)} \tag{116}$$

Ahora, para calcular $\omega_p(v_p, \bar{v}_p)$, utilizamos la definición del producto Wedge 112 para cada componente de la 2-forma:

$$dx \wedge dy\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^1 & \bar{v}_p^1 \\ v_p^2 & \bar{v}_p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (-2)(1) = 2\,. \tag{117}$$

$$dx \wedge dz\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^1 & \bar{v}_p^1 \\ v_p^3 & \bar{v}_p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (1)(5) = -8\,. \tag{118}$$

$$dy \wedge dz\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^2 & \bar{v}_p^2 \\ v_p^3 & \bar{v}_p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - (0)(5) = 6\,. \tag{119}$$

Sustituyendo las últimas tres expresiones en (116), obtenemos finalmente:

$$\omega_p(v_p, \bar{v}_p) = 2\sqrt{14} + 32 + 24 = 2\sqrt{14} + 56\,. \tag{120}$$

Definición 70. Derivada de una 1-forma: Sea $\theta = \theta_i dx^i$ una 1-forma diferencial en M. Su derivada es una 2-forma diferencial en M dada por

$$d\theta = d\theta_i \wedge dx^i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i\,. \tag{121}$$

Ejemplo 26. Sea la 1-forma $\theta = x^2 y dx + (x^2 + y^2 + z^2)dy - 4dz$, calcule $d\theta$.

Solución:

$$\begin{aligned} d\theta = {} & \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} dy \wedge dx \\ & + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z} dz \wedge dy\,. \end{aligned} \tag{122}$$

Utilizando las propiedades (114) y (115):

$$\begin{aligned} d\theta &= x^2(-dx \wedge dy) + 2x dx \wedge dy + 2z(-dy \wedge dz) \\ &= (2x - x^2)dx \wedge dy - 2\,z\,dy \wedge dz\,. \end{aligned} \tag{123}$$

7.4. k-formas. En general, una k-forma diferencial (differential k-form) α en M asigna a cada punto p en M una transformación multilineal $\alpha_p : T_pM \times ... \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ (T_pM k veces) alternante.

El producto Wedge de k 1-formas coordenadas $dx^1, \ldots, dx^k$ es una k-forma diferencial definida por

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k|_p(v_p^1, \ldots, v_p^k) = \begin{vmatrix} dx^1(v_p^1) & . & . & . & dx^1(v_p^k) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ dx^k(v_p^1) & . & . & . & dx^k(v_p^k) \end{vmatrix}\,. \tag{124}$$

Toda k-forma diferencial en M es (localmente) combinación lineal, con funciones diferenciables como escalares, de las k-formas coordenadas $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. El conjunto de las k-formas diferenciales en M se denota por $\Omega^k(M)$.

Definición 71. Derivada de una k-forma diferencial: Si $\alpha = \alpha_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ es una k-forma diferencial, entonces la derivada es una $(k+1)$-forma diferencial dada por

$$d\alpha = d(\alpha_{i_1\dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \,. \tag{125}$$

Ejemplo 27. Sean (x, y, z, w) coordenadas en M (cuya dimensión es 4).

- Obtener una 3-forma a partir de la 2-forma $\omega = 5x^2z^2dx \wedge dy - 4w^2dy \wedge dw + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)dz \wedge dw$.

Solución: Análogamente al ejemplo anterior, sabemos que podemos descartar los términos con producto Wedge entre la misma variable. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial(5x^2z^2)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dw \\ &\quad + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dw \\ &= (10x^2z)dx \wedge dy \wedge dz + (2x)dx \wedge dz \wedge dw + (2y)dy \wedge dz \wedge dw \end{aligned} \tag{126}$$

- Obtener una 4-forma a partir de la 3-forma $\alpha = xyzdx \wedge dy \wedge dz - zxw^4dx \wedge dy \wedge dw$.

Solución: Una vez más, al considerar la derivación en los términos con respecto a las variables que no aparecen en el producto Wedge que los acompaña, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{\partial(zxw^4)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \wedge dw \\ &= -xw^4(-dx \wedge dz) \wedge dy \wedge dw \\ &= -xw^4 dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \,. \end{aligned} \tag{127}$$

Teorema 72. *Propiedades de la derivada de formas diferenciales* [7]*: Sean α y β k-formas y $a \in \mathbb{R}$:*

1. $d(a\alpha + \beta) = ad\alpha + d\beta$
2. $d(d\alpha) = 0$
3. $(df)(V) = Vf \in C^\infty(M)$, *con* $f \in C^\infty(M)$ *y* $V \in \mathfrak{X}(M)$.

7.5. Producto interior. También llamado contracción.

1. Sea θ una 1-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, el producto interior entre θ y V es una 0-forma diferencial (función diferenciable) dada por

$$(V \lrcorner \theta)_p = \theta_p(V_p). \tag{128}$$

También se denota por $i_V\theta$.

Ejemplo 28. Sean (x, y, z, w) coordenadas en M, $\theta = xydx + \sin(x + y + z)dx - dz$ una 1-forma y $V = \sqrt{x-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x^2y^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial. Calcule $V \lrcorner \theta$.

Solución: Visto en términos de componentes:

$$\theta = \theta_i dx^i \qquad\qquad V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \,, \tag{129}$$

(130)

se obtiene que:

$$V \lrcorner \theta = \theta_i V^i \,. \tag{131}$$

Por lo que el producto interior está dado por

$$\begin{aligned} V \lrcorner \theta &= \theta_1 V^1 + \theta_2 V^2 + \theta_3 V^3 \\ &= xy\sqrt{x-y} + \sin(x + y + z) - x^2y^2 \,. \end{aligned} \tag{132}$$

2. Sea ω una 2-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, el producto interior entre ω y V es una 1-forma diferencial dada por

$$(V \lrcorner \omega)_p(W_p) = \omega_p(V_p, W_p)\,, \tag{133}$$

para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$. También se denota por $i_V\omega$.

Ejemplo 29. Dada la 2-forma $\omega = xydx\wedge dy + \sin(x+y+z)dy\wedge dz$. Calcular el producto interior con el campo vectorial V utilizado en el ejemplo anterior.

Solución: Visto en términos de componentes:

$$\omega = \omega_{ij}dx^i \wedge dx^j \qquad\qquad V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{134}$$

tenemos que el producto interior entre una 2-forma y el campo vectorial es:

$$V \lrcorner \omega = \omega_{ij}V^i dx^j\,. \tag{135}$$

Así, considerando que ω es antisimétrica ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$):

(136)

$$\begin{aligned} V \lrcorner \omega &= \omega_{12}V^1 dy + \omega_{21}V^2 dx + \omega_{23}V^2 dz + \omega_{32}V^3 dy \\ &= xy\sqrt{x-y}dy + (-xy)(1)dx + \sin(x+y+z)(1)dz + (-\sin(x+y+z))(xry^2)dy \\ &= -xydx + (xy\sqrt{x-y} - x^2y^2\sin(x+y+z))dy + \sin(x+y+z)dz\,. \end{aligned}$$

3. En general el producto interior entre una k-forma diferencial y un campo vectorial diferencial es una (k-1)-forma diferencial.

7.6. Derivada de Lie. Sean M y N variedades diferenciales, y $F : M \longrightarrow N$ una mapeo diferenciable.

Definición 73. Pullback: Para una k-forma diferencial α en N, el pullback de α por F es la k-forma diferencial $F^*\alpha$ en M definida por

$$(F^*\alpha)_p(v_p^1, \cdots, v_p^k) = \alpha_{F(p)}(DF_p v_p^1, \cdots, Df_p v_p^k)\,, \tag{137}$$

para todo $v_p^1, \cdots, v_p^k \in T_pM$.

Teorema 74. *Propiedades del Pullback* [7]*: Para α, β formas diferenciales en N, $f \in C^\infty(N)$ y $c \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:*

- $F^*f = f \circ F$.
- $F^*(f\alpha) = F^*fF^*\alpha$.
- $F^*(c\alpha + \beta) = cF^*\alpha + F^*\beta$.
- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$.
- $F^*d\alpha = dF^*\alpha$.

Definición 75. Derivada de Lie: Sea α una k-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$. La derivada de Lie de α con respecto de V es la k-forma diferencial en M definida por

$$L_V\alpha = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Psi_s^*\alpha, \tag{138}$$

donde Ψ es el flujo de V.

La derivada de Lie mide el cambio de la forma diferencial a lo largo del flujo del campo vectorial. Si $L_V\alpha = 0$ se dice que α es invariante bajo el flujo de V.

Teorema 76. *Propiedades de la derivada de Lie* [7]*: Sean $f \in C^\infty(M)$, α, β formas diferenciales en M y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

- $L_V f = Vf$.
- $L_V(f\alpha) = (L_V f)\alpha + fL_V\alpha$.
- $L_V d\alpha = d(L_v\alpha)$.
- $L_V(\alpha \wedge \beta) = (L_V\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_V\beta)$.
- $L_V\alpha = V \lrcorner d\alpha + d(V \lrcorner \alpha)$ *(Fórmula de Cartan).*
- $[V, W] \lrcorner \alpha = L_V(W \lrcorner \alpha) - W \lrcorner (L_V\alpha)$.

8. Mecánica Hamiltoniana

La Mecánica Clásica inicia con el trabajo de Sir Isaac Newton (1642-1727) en su célebre libro Philosophiæ naturalis principia mathematica. Existen dos reformulaciones de la Mecánica Clásica de Newton, a saber, la formulación Lagrangiana y la formulación Hamiltoniana. La formulación Lagrangiana puede considerarse más fundamental en la medida en que se deriva de principios variacionales, proporcionando un marco general para la deducción de las ecuaciones de movimiento a partir de una función escalar. Por su parte, la formulación Hamiltoniana se fundamenta directamente en el concepto de energía, lo que permite una descripción más estructurada en términos de coordenadas canónicas y facilita el análisis de propiedades como la conservación y las simetrías. En la mayoría de los casos de interés físico, ambas formulaciones son matemáticamente equivalentes [15].

Recordemos que para un sistema Lagrangiano la función Lagrangiana está definida en el espacio tangente TQ (localmente ésta depende de las coordenadas generalizadas y de las velocidades generalizadas) de una variedad diferencial Q llamada el espacio configuración (ver subsección 3.5). Consideremos un sistema Lagrangiano con espacio configuración Q, coordenadas generalizadas $(q^1, ..., q^n)$ y función Lagrangiana $L = L(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t)$. Se definen los llamados momentos generalizados (o conjugados) por $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. Si la Lagrangiana es regular, es decir, $det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$, se tiene que las variables $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ son coordenadas locales independientes para T^*Q. Es posible definir una nueva función H en T^*Q (el fibrado cotangente) como la transformación de Legendre de la Lagrangiana con respecto a las variables $(\dot{q}^1, ..., \dot{q^n})$. Las transformaciones de Legendre son una herramienta matemática muy útil, de hecho, éstas transforman funciones en un espacio vectorial a funciones en el espacio dual, a saber, para una función convexa $f(x^1, ..., x^n)$ definida en un espacio vectorial E con coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ (convexa significa que $det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$), la transformación de Legendre es una función $g(p_1, ..., p_n) =$ en el espacio dual E^* de E con coordenadas $(p_1, ..., p_n)$ definidas por $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. La transformación de Legendre es involutiva, es decir, g es la transformación de Legendre de f si y solo si f es la transformación de Legendre de g (para detalles ver [3]). Se define H en T^*Q con las nuevas coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ por

$$H(q, p, t) = p_j \dot{q}^j - L(q, \dot{q}, t), \tag{139}$$

se tiene que las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{140}$$

son equivalentes a las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \quad \vdots \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \\ \quad \vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n}. \end{cases} \tag{141}$$

El sistema de ecuaciones (141) se llama sistema de ecuaciones de Hamilton para la Hamiltoniana H [3, 39, 12].

Para un sistema físico, la función Lagrangiana tiene la forma en coordenadas

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m (\dot{q}^i)^2 - U(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t), \tag{142}$$

ésta es la diferencia entre la energía cinética $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m (\dot{q}^i)^2$ y la energía potencial $U = U(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t)$. Cuando la función de energía potencial U tiene la forma $U = U(q^1, ..., q^n, t)$ entonces la función de energía cinética es $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m} (p^i)^2$ y la función Hamiltoniana es la energía total del sistema $H = T + U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m} (p^i)^2 + U(q^1, ..., q^n, t)$.

Ejemplo 30. Ejemplos de función Hamiltoniana de sistemas físicos relevantes:

- La partícula libre: $n = 1$, $U = 0$, $H = \dfrac{1}{2m} p^2$.
- El oscilador armónico n-dimensional: $U = \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + \cdots + k_n q_n^2)$ con $k_i \in \mathbb{R}$. La función Hamiltoniana es $H(q, p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + \cdots + k_n q_n^2)$. El caso especial $k_1 = \cdots = k_n = k$ corresponde al oscilador armónico isotrópico.
- El problema de fuerza central: $U = U(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, (x, y, z) son coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$. La parte radial del sistema está descrita por el Hamiltoniano $H = \frac{1}{2\,m} p_r^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + U(r)$. Aquí L es una constante (momento angular del sistema).
- El problema de Kepler (el movimiento relativo de dos cuerpos con interacción gravitacional Newtoniana): $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ donde $k > 0$ es una constante.
- El problema de N cuerpos: consideremos N partículas con masas m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, moviéndose en $\mathbb{R}^3$ con un potencial dependiendo solo de las distancias relativas de las partículas $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. $U = U(\{r_{ij}\})$, $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} |\mathbf{p}_i|^2 + U(\{r_{ij}\})$ donde $\mathbf{p}_i$ es el momento canónico asociado a $\mathbf{r}_i$.
- El oscilador armónico dependiente del tiempo ($n = 1$): $U = \omega^2(t) q^2$ (frecuencia angular dependiente del tiempo), $H = \frac{1}{2m} p^2 + \omega^2(t) q^2$. Dicho sistema aparece en muchos problemas físicos [40, 41].

Los sistemas Hamiltonianos son sistemas mecánicos en variedades diferenciales donde las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Se ha visto que en algunos casos las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton, lo que significa que es posible pasar de la descripción Lagrangiana de un sistema dinámico a una descripción Hamiltoniana equivalente; para esto la función Hamiltoniana es definida para cada punto fijo en el espacio configuración como la transformación de Legendre de la función Lagrangiana regular (convexa con respecto a las velocidades generalizadas) considerando esta última como una función en el espacio tangente del punto fijo en el espacio configuración, entonces la Hamiltoniana es una función definida en el espacio cotangente del espacio configuración [3, 39, 12].

Para un sistemas Hamiltoniano el campo vectorial dinámico es un campo vectorial Hamiltoniano para una función distinguida llamada la Hamiltoniana del sistema. Los campos vectoriales Hamiltonianos en un variedad diferencial son construidos por medio de una estructura geométrica adiciona sobre dicha variedad, usualmente ésta es una estructura de Poisson (ver subsección 6.3) definida por una forma simpléctica. En este contexto, el problema de Hamiltonización de un sistema mecánico (M, V) consiste en determinar las condiciones bajo las cuales existe una estructura geométrica, en particular una estructura de Poisson, en M tal que V sea un campo vectorial Hamiltoniano [42, 43, 44]. La geometría simpléctica, el estudio de las estructuras simplécticas, es considerada el formalismo geométrico natural donde la teoría de la Mecánica Hamiltoniana se desarrolla. A continuación se presenta un breve repaso de la geometría simpléctica y la formulación geométrica de la Mecánica Hamiltoniana (para detalles ver [2, 45, 11, 7, 15]).

8.1. Geometría simpléctica.

Sea M una variedad diferencial.

Definición 77. Sea ω una 2-forma diferencial en M.

- Se dice que ω es cerrada si $d\omega = 0$.
- Se dice que ω es no degenerada si para cada 1-forma α en M existe uno y solo un campo vectorial X en M tal que $X \lrcorner \omega = \alpha$.

Una estructura simpléctica en M es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada (también llamada forma simpléctica).

Si ω es una estructura simpléctica en M se dice que (M, ω) es una variedad simpléctica.

TEOREMA 78. *Teorema de Darboux* [46]*: Si* (M, ω) *es una variedad simpléctica entonces* M *es de dimensión par, digamos* $dim(M) = 2n$*, y alrededor de cada punto* $p \in M$ *existen coordenadas locales* $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$*, llamadas coordenadas de Darboux o coordenadas canónicas, tales que*

$$\omega = dq^i \wedge dp_i. \tag{143}$$

Ejemplo 31. Ejemplos de variedades simplécticas:

- $(M = R^2, \omega)$ es una variedad simpléctica con estructura simpléctica ω dada en coordenadas cartesianas (x, y) por $\omega = dx \wedge dy$.
- El toro T^2 es una variedad simpléctica con estructura simpléctica ω dada en coordenadas periódicas (θ, φ) por $\omega = d\theta \wedge d\varphi$.
- El fibrado cotangente T^*Q de una variedad diferencial Q tiene estructura simpléctica natural dada en coordenadas locales $(x^1, ..., x^n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ por $\omega = dx^i \wedge d\alpha_i$. El fibrado cotangente una variedad diferencial es el espacio fase natural en Mecánica Hamiltoniana.

8.2. Campos vectoriales Hamiltonianos y el paréntesis de Poisson. Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$.

Para cada $f \in C^\infty(M)$ es asignado uno y solo un campo vectorial diferenciable X_f en M, llamado el campo vectorial Hamiltoniano para f, de acuerdo a

$$X_f \lrcorner \omega \; = \; df \; . \tag{144}$$

La estructura simpléctica ω induce un mapeo invertible $\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ (algunas veces denotado por $\overline{\omega}$) definido por $\flat(X) = X \lrcorner \Omega$ [47, 2, 7, 15]. Se tiene que $\flat(X_f) = df$ o equivalentemente $X_f = \flat^{-1} df$. En coordenadas canónicas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$, X_f tiene la forma

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \; . \tag{145}$$

La asignación $f \longmapsto X_f$ es lineal

$$X_{f + c\, g} \; = \; X_f + c X_g \; , \tag{146}$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$ y $\forall c \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 79. *Loa flujos Hamiltonianos preservan la estructura simpléctica, en efecto,* $L_{X_f} \omega = 0$ *para toda* $f \in C^\infty(M)$.

La estructura simpléctica ω en M define una estructura de Poisson P en M ((M, P) es una variedad de Poisson) por

$$P(\alpha, \beta) = \omega(\flat^{-1}\alpha, \flat^{-1}\beta) \, \forall \, \alpha, \beta \in \Omega^1(M). \tag{147}$$

Así dadas $f, g \in C^\infty(M)$, su paréntesis de Poisson satisface

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= P(df, dg) \\ &= \omega(\flat^{-1} df, \flat^{-1} dg) \\ &= \omega(X_f, X_g) \\ &= df(X_g) \\ &= X_g f. \end{aligned} \tag{148}$$

En coordenadas canónicas se tiene que

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} . \tag{149}$$

PROPOSICIÓN 80. ▪ *La asignación $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie entre las álgebras de Lie $(C^\infty(M), \{,\})$ y $(\mathfrak{X}(M), [,])$ [7], en efecto,*

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]. \tag{150}$$

- *$g \in C^\infty(M)$ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_f, es decir $L_{X_f} g = 0$, si y solo si $\{f,g\} = 0$.*
- *Si $f, g \in C^\infty(M)$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de X_h entonces también lo es $\{f,g\}$.*

8.3. Sistemas Hamiltonianos independientes del tiempo. La teoría de los sistemas Hamiltonianos (conservativos) independientes del tiempo se desarrolla de manera natural dentro del formalismo de la geometría simpléctica. Dada $H \in C^\infty(M)$, el sistema mecánico definido por X_H en M es un sistema Hamiltoniano, denotado por (M, ω, H), con (M, ω) el espacio fase y H la función Hamiltoniana. En coordenadas canónicas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ en M, la expresión local $\psi(t) = (q^1(t), \cdots, q^n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$ de las trayectorias del sistema satisface las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\dot{q^i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad ; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \ . \tag{151}$$

n es el número de grados de libertad del sistema.

La evolución (evolución temporal) de una función $f \in C^\infty(M)$ (un observable físico) a lo largo de las trayectorias del sistema está dado por

$$\dot{f} = X_H f = \{f, H\}. \tag{152}$$

Se dice que f es una constante de movimiento del sistema si es constante a lo largo de las trayectorias del sistema (una constante de movimiento representa una cantidad física conservada), es decir, si $X_H f = 0$ (equivalentemente $\{f, H\} = 0$). Es claro que la función Hamiltoniana es una constante de movimiento; ésta representa la energía mecánica total del sistema (energía cinética más energía potencial).

8.4. Sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo. El espacio fase de un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo es geométricamente identificado con el espacio fase extendido $M \times \mathbb{R}$ [48, 2, 11], con M una variedad simpléctica (el espacio fase natural para sistemas Hamiltonianos físicos dependiente del tiempo es $T^*Q \times \mathbb{R}$, donde Q es el espacio configuración de la descripción Lagrangiana). El espacio fase extendido $M \times \mathbb{R}$ tiene estructura natural de variedad cosimpléctica (para un breve repaso del formalismo de la geometría cosimpléctica ver [49, 50] y para exposición más detallada ver [51, 47]). Sea Ω una estructura simpléctica en M, entonces localmente se tiene

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i \tag{153}$$

para algún conjunto de coordenadas canónicas. El campo vectorial Hamiltoniano X_f para $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ (f puede depender de manera explícita del tiempo) está dado por

$$X_f \lrcorner \Omega = df - \frac{\partial f}{\partial t} dt \qquad \text{y} \qquad \mathrm{X_f \lrcorner dt} = 0, \tag{154}$$

donde t es la coordenada global en $\mathbb{R}$. En coordenadas canónicas se tiene que

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{155}$$

El campo vectorial Hamiltoniano luce exactamente igual que en el caso simpléctico, la única diferencia es que las funciones componentes de tal campo vectorial pueden

depender (de manera explícita) de la coordenada t, que en existencia de dinámica representa el tiempo.

El paréntesis de Poisson es definido de la misma manera que en el caso simpléctico y tiene la misma forma local.

La dinámica Hamiltoniana es definida por el llamado campo vectorial evolución $E_H = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$ para la función $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ dependiente de la coordenada t que representa el tiempo. Como en el caso independiente del tiempo, las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton. La evolución de una función $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{f} = E_H f = X_H f + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \ . \tag{156}$$

Así que f es una constante de movimiento si y solo si $\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Se observa que la función Hamiltoniana, que representa la energía total del sistema, no es una constante de movimiento cuando ésta depende del tiempo, a saber $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

8.5. Sistemas integrables. Integrabilidad por cuadraturas de un sistema mecánico significa encontrar las soluciones de las ecuaciones de movimiento realizando un número finito de operaciones algebraicas (incluyendo tomar inversas) y calculando integrales de funciones conocidas [17]. Lie estableció un marco práctico-teórico para determinar la integrabilidad por cuadraturas de un sistema mecánico, el resultado principal de tal marco se conoce como el teorema de Lie en integrabilidad por cuadratura [17, 20, 52].

TEOREMA 81. *Teorema de Lie* [17]*: Sean $u_1, \dots u_n$ campos vectoriales diferenciables linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Si $u_1, \dots, u_n$ son simetrías del campo vectorial diferenciable v y general un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie $[,]$ de campos vectoriales, entonces las soluciones ecuaciones de movimiento $\dot{x} = v(x)$ del sistema mecánico definido por v pueden ser encontradas por cuadraturas, es decir, el sistema es integrable por cuadraturas.*

Para sistemas Hamiltonianos, el célebre teorema de Noether relaciona simetrías con constantes de movimiento (ver sección 9), y es bien sabido que la existencia de simetrías para un sistema mecánico permite una reducción del sistema, o en otras palabras, permite una simplificación del problema de resolver las ecuaciones de movimiento (ver subsección 5.3). Así que para sistemas Hamiltonianos, la existencia de constantes de movimiento está relacionada con la simplificación de las ecuaciones de movimiento. De hecho, el famoso teorema de Liouville establece que para un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad, el conocimiento de n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de movimiento de Hamilton por cuadraturas [2, 17, 39, 22, 45, 53, 54, 32]. En consecuencia, se dice que un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad es integrable (en el sentido de Liouville) si se pueden encontrar n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución. En involución significa que el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos constantes de movimiento es cero, o equivalentemente, las constantes de movimiento forman un álgebra de Lie Abeliana (conmutativa) bajo el paréntesis de Poisson, lo cual a su vez es equivalente al hecho de que los correspondientes campos vectoriales Hamiltonianos de las constantes de movimiento forman un álgebra de Lie Abeliana de simetrías del campo Hamiltoniano dinámico. Veamos un breve repaso de la noción de integrabilidad según Liouville.

Definición 82.

- Se dice que las funciones $f_1, \cdots, f_k$ en una variedad diferencial son funcionalmente independientes si sus derivadas $df_1, \cdots, df_k$ son linealmente independientes.
- Se dice que las funciones f, g están en involución con respecto del paréntesis de Poisson $\{,\}$ si $\{f, g\} = 0$.

- Un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad se dice integrable si éste tiene n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución.

TEOREMA 83. *Teorema de Liouville: Las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable pueden ser resueltas por cuadraturas.*

Para la demostración ver [23, 2, 17, 39, 22, 45, 53, 54, 32].

Ejemplo 32.
- La función Hamiltoniana para el oscilador armónico dos dimensional es $H(q_1,q_2,p_1,p_2)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+w_1^2q_1^2+w_2^2q_2^2)$. Se tiene que $f_1=H$ y $f_2=\frac{1}{2}(p_1^2+w_1^2q_1^2)$ son constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución, así que el sistema es integrable.
- La función Hamiltoniana para el problema de Kepler de dos cuerpos es $H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{c}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$. Se tiene que $f_1=H$, $f_2=L_z=q_1p_2-q_2p_1$ y $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ son constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución. Por lo tanto, el sistema es integrable.
- La función Hamiltoniana para el oscilador armónico uno dimensional con frecuencia angular dependiente del tiempo (sistema dependiente del tiempo) es $H(q,p,t)=\frac{1}{2}(p^2+w^2(t)q^2)$. Se tiene que $f=\frac{1}{2}(\alpha^{-2}q^2+(\alpha p-\dot{\alpha}q)^2)$, con $\alpha=\alpha(t)$ tal que $\ddot{\alpha}+w^2(t)\alpha-\alpha^{-3}=0$, es una constante de movimiento [55, 56], así que el sistema es integrable. Otros sistemas integrables dependientes del tiempo han sido estudiados en [47].

Existe un marco para la integrabilidad por cuadraturas para sistemas Hamiltonianos más general que la integrabilidad de Liouville, a saber, la integrabilidad de Lie, basada en la existencia de un álgebra de Lie soluble de constantes de movimiento; dicho marco incluye la integrabilidad de Lie en el caso particular en el que el álgebra es Abeliana, en efecto, toda álgebra Abeliana es soluble, pero existen álgebras solubles que no son Abelianas [20]. Sin embargo, el marco de integrabilidad de Liouville resulta ser mucho más útil en la practica ya que se han encontrado álgebras Abelianas para muchos sistemas y resulta complicado encontrar álgebras solubles, de ahí que el marco de Liouville sea tan conocido, al contrario que el marco teóricamente más general de Lie. Veamos el teorema de Lie para la integrabilidad por cuadraturas de un sistema Hamiltoniano (para más detalles ver [57, 17, 52]).

TEOREMA 84. *Se se conocen n constantes de movimiento $f_1,\dots,f_n$ para un sistemas Hamiltoniano con n grados de libertad, tales que*

1. $\{f_i,f_j\}=c_{ij}^k f_k$, *con* $c_{ij}^k\in\mathbb{R}$,
2. *el álgebra de Lie generada por* $f_1,\dots,f_n$ *es soluble bajo el paréntesis de Poisson,*
3. *en el conjunto de nivel* $M_f=\{x\in M: f_i(x)=\alpha_i,\alpha_i\in\mathbb{R}\}$ *las funciones* $f_1,\dots,f_n$ *son funcionalmente independientes y,*
4. $c_{ij}^k\alpha_k=0$ *para* $i,j=1,\dots,n$,

entonces M_f es una subvariedad diferencial de M de dimensión n, y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en M_f pueden ser encontradas por cuadraturas [58].

La independencia funcional de las funciones $f_1,\dots,f_n$ en M_f garantiza que M_f sea una subvariedad de M de dimensión $2n-n=n$, en efecto, en general si las funciones $f_1,\cdots,f_k$ con $k\leq dim(N)$ son funcionalmente independientes en el punto $p\in N$ entonces las derivadas $df_1|_p,\dots,df_k|_p$ son linealmente independientes; ésto significa que p es un punto regular de la función diferenciable $F:N\longrightarrow\mathbb{R}^k$ definida por $F=(f_1,f_2,\dots,f_k)$. Considere ahora el conjunto $N_f=\{x\in N: f_i(x)=\alpha_i,\alpha_i\in\mathbb{R}\}$, y suponga que $f_1,f_2,\dots,f_k$ son funcionalmente independientes, entonces del teorema del conjunto de nivel regular (regular level set theorem [7]) se tiene que N_f es una subvariedad diferencial de N de dimensión $dim(N)-k$.

9. Transformaciones canónicas y simetrías

En la Mecánica Clásica Hamiltoniana, las transformaciones canónicas desempeñan un papel fundamental por diversas razones. En primer lugar, preservan la forma de las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Más aún, resultan esenciales para la resolución de dichas ecuaciones, ya que constituyen el núcleo del formalismo de la teoría de Hamilton-Jacobi. De hecho, la evolución de las variables dinámicas canónicas durante el movimiento del sistema puede interpretarse como una sucesión de transformaciones canónicas [59].

En los libros de texto clásicos de Mecánica dirigidos a estudiantes de licenciatura (ver, por ejemplo, [59, 39, 12]), las transformaciones canónicas suelen definirse mediante el llamado formalismo en coordenadas, el cual permite una descripción local. En este enfoque, las coordenadas canónicas se introducen de manera explícita y el paréntesis de Poisson se expresa en términos de derivadas respecto a estas variables. Por otro lado, el formalismo geométrico ofrece una descripción global del sistema.

En esta sección, se presentan las transformaciones canónicas desde ambos enfoques: el formalismo en coordenadas y el enfoque geométrico. Para más detalles, véase [60].

9.1. Transformaciones canónicas: descripción clásica en coordenadas. En esta subsección se presenta un breve repaso de la teoría de las transformaciones canónicas desde el enfoque en coordenadas, como es presentada en libros de texto clásicos como [12, 39, 59].

Considere un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad cuyas ecuaciones de movimiento son dadas en un conjunto de coordenadas canónicas $(q,p) = (q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ en el espacio fase con una función Hamiltoniana $H = H(q,p,t)$ posiblemente dependiente del tiempo t; las ecuaciones de movimiento son

$$\text{(157)}\qquad \begin{cases} \dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n}\ . \end{cases}$$

El paréntesis de Poisson de dos funciones $f = f(q,p,t)$ y $g = g(q,p,t)$ en coordenadas canónicas (q,p) tiene la forma

$$\text{(158)}\qquad \{f,g\}_{q,p} \;=\; \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\ .$$

Definición 85. Una transformación de coordenadas (cambio de coordenadas) $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ es una transformación canónica si el nuevo conjunto de coordenadas (Q,P) forma un conjunto de coordenadas canónicas.

Es bien sabido que un conjunto de coordenadas $(Q^1,\dots,Q^n,P_1,\dots,P_n)$ forma un conjunto de coordenadas canónicas si y solo sí

$$\text{(159)}\qquad \{Q^i,P_j\}_{q,p} = \delta^i_j \quad \text{y} \quad \{Q^i,Q_j\}_{q,p} = \{P^i,P_j\}_{q,p} = 0\ , \quad i,j = 1,2,\dots,n\ ,$$

donde δ^i_j es la delta de Kronecker; esto muestra que las transformaciones canónicas son independientes de la función Hamiltoniana. Las transformaciones canónicas preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, es decir, si $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ es una transformación canónica entonces existe una nueva función $K = K(Q,P,t)$ tal

que

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{Q}^1 = \frac{\partial K}{\partial P_1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{Q}^n = \frac{\partial K}{\partial P_n}, \\ \dot{P}_1 = -\frac{\partial K}{\partial Q^1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{P}_n = -\frac{\partial K}{\partial Q^n}\ . \end{array}\right. \tag{160}$$

Dada una transformación canónica $(q,p) \mapsto (Q,P)$ existe una función F posiblemente dependiente del tiempo, definida en el espacio fase, tal que

$$p_i dq^i - H dt - (P_i dQ^i - K dt) \ = \ dF\ . \tag{161}$$

F se llama función generatriz de la transformación canónica. En este caso se tienen $4n$ coordenadas $(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n,Q^1,\ldots,Q^n,P_1,\ldots,P_n)$ en el espacio fase; resulta que $2n$ coordenadas son independientes y las otras $2n$ son dependientes. Así que es conveniente considerar transformaciones canónicas que consistan de n coordenadas viejas más n coordenadas nuevas, todas ellas independientes. Existen cuatro tipos básicos de transformaciones canónicas descritas por conjunto de la forma (q,Q), (q,P), (p,Q) o (p,P), respectivamente. Si las coordenadas (q,Q) son independientes, entonces la función F puede ser escrita como $F = F_1(q,Q,t)$ satisfaciendo la condición $\det(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i \partial Q^j}) \neq 0$, y de (161) se tienen las siguientes relaciones

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \quad \text{y} \quad K - H = \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{162}$$

En este caso se dice que $F = F_1(q,Q,t)$ es una función generatriz de tipo 1. Para la transformación identidad $(q = Q, p = P)$, la cual juega un papel importante en las siguientes subsecciones, las coordenadas (q,Q) son independientes; Así, en esta caso particular se pueden tomar las variables (q,P) como coordenadas independientes, y construir, por medio de la transformación de Legendre apropiada, la función generatriz $F_2(q,P) = F_1 + Q^i P_i$. De (161) se tiene que

$$p_i dq^i - H dt + Q^i dP_i + K dt = dF_2\ , \tag{163}$$

luego

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad K - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{164}$$

En este caso se dice que $F_2(q,P,t)$ es una función generatriz de tipo 2. En particular, la función generatriz

$$F_{Id}(q,P) \ \equiv \ q^i\, P_i\ , \tag{165}$$

da como resultado la transformación identidad.

Definición 86. Una transformación canónica infinitesimal es una transformación canónica "cercana" a la transformación identidad, es decir, una transformación canónica de la forma

$$Q^i = q^i + \epsilon\, \Delta q^i(q,p,t), \quad P_i = p_i + \epsilon\, \Delta p_i(q,p,t)\ , \tag{166}$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal (el cambio desde (q,p) hasta (Q,P) es "pequeño"), y $\Delta q^i(q,p,t)$ y $\Delta p_i(q,p,t)$ son ciertas funciones indeterminadas.

Las transformaciones canónicas infinitesimales son generadas por funciones "cercanas" a la función generatriz $F_{Id}(q,P)$ de la transformación identidad; dichas funciones pueden ser escritas como

$$F_2(q,P,t) \ = \ q^i P_i \ + \ \epsilon\, G(q,P,t)\ , \tag{167}$$

aquí $G(q,P,t)$ es cualquier función. En efecto, la transformación canónica generada por (167) tiene la forma

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i} \quad \text{and} \quad P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q^i} . \tag{168}$$

Observe que es posible sustituir $P_i = p_i$ en $\epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q^i}$ y en $\epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i}$ ya que los términos cuadráticos y de orden superior en ϵ deben ser despreciados; así que se obtiene la forma explícita de la transformación canónica infinitesimal

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i} \quad \text{and} \quad P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i} . \tag{169}$$

De (166) y (169) se pueden hacer las identificaciones $\Delta q^i(q,p,t) = \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}$ y $\Delta p_i = -\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_i}$. En este caso, la función $G = G(q,p,t)$ en (169) se llama la función generatriz de la transformación canónica infinitesimal.

Dada una transformación canónica $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ con función generatriz F (de cualquier tipo), la nueva función Hamiltoniana K es

$$K(q,p,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{170}$$

Para una transformación canónica independiente del tiempo, la nueva función Hamiltoniana puede ser tomada igual a la vieja.

Se dice que la función Hamiltoniana es invariante bajo una trasformación canónica, o que la transformación canónica deja invariante la Hamiltoniana, cuando la nueva Hamiltoniana es igual a la vieja Hamiltoniana en las nuevas coordenadas, es decir,

$$K(q,p,t) = H(Q,P,t), \tag{171}$$

o de manera equivalente,

$$H(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{172}$$

Para una transformación canónica independiente del tiempo se tiene que la Hamiltoniana es invariante si y solo sí $H(Q,P,t) = H(q,p,t)$.

Bajo la transformación canónica infinitesimal (169), la Hamiltoniana es invariante si y solo sí

$$H(q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}, p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i}, t) = H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} . \tag{173}$$

Expandiendo $H(q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}, p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i}, t)$ alrededor del punto (q,p,t) se tiene

$$H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} , \tag{174}$$

luego eliminando términos de alto grado $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ en ϵ se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G,H\} = 0 , \tag{175}$$

así, G es una constante de movimiento. En resumen, la función generatriz de una transformación canónica infinitesimal que deja la Hamiltoniana invariante, es una constante de movimiento, y de manera recíproca, la transformación canónica infinitesimal generada por una constante de movimiento, deja la Hamiltoniana invariante.

9.2. Transformaciones canónicas: descripción geométrica. Comencemos con el formalismo independiente del tiempo. Sea (M,ω,H) un sistema Hamiltoniano independiente del tiempo.

Definición 87. Sea (N,η) una variedad simpléctica. Un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow N$ tal que $\Phi^*\eta = \omega$ se llama simplectomorfismo.

En el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica Hamiltoniana independiente del tiempo, las transformaciones canónicas son definidas como simplectomorfismos en el espacio fase [61, 49, 50, 48, 62]; formalmente

Definición 88. Una transformación canónica para (M, ω, H) es un difeomorfismo Φ en M tal que $\Phi^*\omega = \omega$.

Observe que tal y como ocurre en el formalismo en coordenadas, las transformaciones canónicas son independientes de la función Hamiltoniana. En efecto, en el formalismo geométrico, solo la geometría del espacio fase queda involucrada en la noción de transformación canónica.

Dado un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow M$, se sabe que $\Phi^*\omega$ es una forma simpléctica en M, así que alrededor de cualquier punto $p \in M$ existen coordenadas locales $(Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$ tales que

$$\Phi^*\omega = dQ^i \wedge dP_i. \tag{176}$$

Considere el paréntesis de Poisson definido por $\Phi^*\omega$, denotado por $\overline{\{,\}}$, se tiene que

$$\overline{\{f, g\}} = \overline{X}_g f, \tag{177}$$

donde $\overline{X}_g$ es el campo vectorial Hamiltoniano definido por $\Phi^*\omega$ para $g \in C^\infty(M)$ ($\overline{X}_g \lrcorner \Phi^*\omega = dg$); en coordenadas canónicas $(Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$ éste tiene la forma

$$\overline{\{f, g\}} = \frac{\partial f}{\partial Q^i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q^i}. \tag{178}$$

Si Φ es una transformación canónica entonces $\overline{X}_g = X_g$, así que

$$\overline{\{f, g\}} = \{f, g\}, \tag{179}$$

es decir, las transformaciones canónicas preservan el paréntesis de Poisson [62], por lo tanto, se tiene

$$\{Q^i, Q^j\} = \overline{\{Q^i, Q^j\}} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = \overline{\{P_i, P_j\}} = 0 \quad \text{y} \quad \{Q^i, P_j\} = \overline{\{Q^i, P_j\}} = \delta^i_j. \tag{180}$$

Si pensamos en Φ localmente como una transformación de coordenadas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n) \mapsto (Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$, entonces ésta es canónica en el sentido del formalismo en coordenadas. Algunas veces agregaremos el adjetivo "geométrica" a las transformaciones canónicas definidas en el sentido geométrico con el objetivo de evitar confusiones.

Ahora veamos el caso dependiente del tiempo. Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo, es decir, $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Para cada transformación (difeomorfismo) Φ en $M \times \mathbb{R}$ se requiere que el parámetro temporal t sea preservado, lo cual implica que uno puede considerar el mapeo $\Phi_t : M \longrightarrow M$ para cada valor fijo de t, y éste es una transformación en M. La siguiente definición de transformación canónica en el formalismo de la Mecánica Hamiltoniana dependiente del tiempo se presenta en [60].

Definición 89. Una transformación canónica en $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ es un difeomorfismo Φ en $M \times \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi^*\Omega - \Omega = d(H - K) \wedge dt, \tag{181}$$

para alguna función $K \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$.

La definición anterior es más general que la presentada previamente en [50] bajo el formalismo de la geometría cosimpléctica. Uno puede pensar que la definición 89 de transformación canónica no es independiente de la función Hamiltoniana H. Sin embargo, la ecuación (181) solo nos indica la relación entre dos funciones Hamiltonianas H y K. De hecho podemos reescribir dicha definición sin considerar un sistema Hamiltoniano del todo, solo es necesario un espacio fase de la forma $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$. Una definición equivalente a la definición 89 puede ser dada de la siguiente manera: una

transformación canónica en $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$ es un difeomorfismo Φ en $M \times \mathbb{R}$ (preservando t) tal que

$$\Phi^*\Omega - \Omega = dJ \wedge dt, \tag{182}$$

para alguna función $J \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Para una Hamiltoniana dada H, la nueva Hamiltoniana K satisface $d(H - K) = dJ$.

Podemos observar que la ecuación (181) localmente tiene la forma

$$dQ^i \wedge dP_i - dq^i \wedge dp_i = d(H - K) \wedge dt, \tag{183}$$

la cual es la condición general para una transformación de coordenadas canónica con nueva Hamiltoniana K [12, 53].

En lo que sigue de esta subsección M puede ser una variedad simpléctica o $M \times \mathbb{R}$, a menos que se indique de manera explícita.

Definición 90. Un grupo uno-paramétrico local de transformaciones en M es una familia de difeomorfismos $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ en M con I un intervalo abierto que contiene al cero, tal que para cada s, $\Psi_0 = Id_M$ (la función identidad), $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$ (la propiedad de grupo) y el mapeo $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ definido por $\Psi(s, p) = \Psi_s(p)$ es un mapeo diferenciable.

La definición 90 puede ser reescrita diciendo solamente que un grupo uno-paramétrico local de transformaciones $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ en M es un flujo local $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ en M [7]. El intervalo I para el parámetro s puede ser el conjunto completo de los números reales, en este caso se dice que la familia de transformaciones es un grupo uno-paramétrico global de transformaciones y el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es un flujo global.

Dado un flujo Ψ (local o global) en M, para cada $p \in M$ podemos considerar la curva diferenciable $\Psi^p : I \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$, y el vector tangente $v_p \in T_pM$ dado por $v_p = \frac{d}{ds}\Psi^p(s)|_{s=0}$; se tiene que la asignación $p \mapsto v_p$ es un campo vectorial diferenciable V en M llamado el generador infinitesimal del flujo. El teorema fundamental en flujos establece (en pocas palabras) que cada campo vectorial diferenciable V en M es el generador infinitesimal de un flujo (posiblemente local) Ψ tal que $\Psi_s : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo (posiblemente local) y $\Psi^p : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V [7]. Se puede hacer referencia de manera indistinta al flujo Ψ o al grupo uno-paramétrico de transformaciones $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ ya que hay una correspondencia uno a uno entre dichos objetos.

Definición 91. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones en M se dice un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas si cada transformaciones es canónica.

El siguiente teorema establece que los generadores infinitesimales de grupos uno-paramétricos de transformaciones canónicas son campos vectoriales Hamiltonianos [62, 60].

Teorema 92. *Sea $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ un grupo uno-paramétrico de transformaciones en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$ su generador infinitesimal. $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas si y solo sí V es un campo vectorial Hamiltoniano.*

Para un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas con generador infinitesimal $V = X_f$ se dice que f es el generador de tal grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas.

Se ha visto que las transformaciones canónicas (geométricas) Ψ pueden ser vistas localmente como transformaciones de coordenadas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n) \mapsto (Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$, así que un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas puede ser visto localmente como una familia de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $\{(Q_s(q, p, t), P_s(q, p, t))\}_{s\in I}$. Grupos uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $\{(Q_s(q, p, t), P_s(q, p, t))\}_{s\in I}$ son estudiadas en [53], ahí el autor usa la notación $(Q(q, p, t, s), P(q, p, t, s))$ para la

familia $\{(Q_s(q,p,t), P_s(q,p,t))\}_{s\in I}$, y se muestra que si $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas entonces existe una función diferenciable $f(q,p,t)$ (una función local en $M\times\mathbb{R}$) tal que

$$\frac{\partial Q^i}{\partial s}|_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial Q^i}{\partial s}|_{s=0} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}. \tag{184}$$

Recíprocamente, en [53] se muestra también que cualquier función diferenciable $f(q,p,t)$ define un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ por medio de las ecuaciones (184). Es fácil ver que si se tiene un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) Ψ generado por una función $f\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ (el generador infinitesimal es el campo vectorial X_f) entonces el generador del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ definido localmente por Ψ (Ψ visto como un flujo es una función vectorial posiblemente dependiente del tiempo en los puntos $(q,p)\in M$ y el parámetro s) es $f(q,p,t)$. De hecho las ecuaciones (184) son las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el campo vectorial X_f, así que las soluciones de tales ecuaciones son las curvas integrales de X_f las cuales juntas definen el flujo Ψ de X_f.

Abajo se presenta un ejemplo simple para ilustrar las ideas discutidas previamente.

Ejemplo 33. Considere un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas dadas por

$$Q = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), \quad P = pe^{-s}. \tag{185}$$

En [53] se muestra que este grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas es generado por $f(q,p,t) = qp - \frac{tp^2}{m}$, es decir, las ecuaciones (184) se satisfacen. Primero observe que el flujo de X_f está dado localmente por $\Psi(q,p,t,s) = (qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), pe^{-s})$. En efecto, las ecuaciones para las curvas integrales $\Psi(s) = (q(s), p(s))$ de X_f son

$$\dot{q} = q - \frac{2tp}{m}, \quad \dot{p} = -p\ , \tag{186}$$

con solución general dada por

$$q(s) = e^s c_1 - \frac{(e^s - e^{-s})t}{m}c_2, \quad p(s) = e^{-s}c_2\ , \tag{187}$$

las constantes c_1, c_2 son determinadas por $q(0) = q, p(0) = p$, es decir, se tiene $c_1 = q$ y $c_2 = p$. Así que el flujo de X_f está dado localmente por

$$\Psi(q,p,t,s) \ = \ (q\,e^s - \frac{t\,p}{m}(e^s - e^{-s}),\, pe^{-s}). \tag{188}$$

Se sigue el el grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s) = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), P(q,p,t,s) = pe^{-s})$ es la expresión local para el grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) Ψ con generador infinitesimal X_f (o generador f).

Se puede verificar de manera explícita que Ψ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones de canónicas, en efecto

(189)

$$\begin{aligned} dQ\wedge dP - dq\wedge dp &= (e^s dq - \frac{t}{m}(e^s - e^{-s})dp - \frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dt)\wedge(e^{-s}dp) - dq\wedge dp \\ &= -\frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dt\wedge dp \\ &= \frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dp\wedge dt. \end{aligned}$$

Así se concluye que Ψ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas. Observe que hasta ahora no hemos considerado ninguna función Hamiltoniana, lo

cual es compatible con el hecho de que las transformaciones canónicas son independientes de la Hamiltoniana, o en otras palabras, las transformaciones canónicas son independientes de la dinámica. Ahora, dada una función Hamiltoniana H, la nueva Hamiltoniana K tiene la forma $K(q,p,t,s) = H - \frac{p}{m}(e^s - e^{-s}) + g(t,s)$, donde $g(t,s)$ es cualquier función de t y s.

También se puede verificar que para cada valor fijo de t se tiene que $\Psi_{t,s}^*\Omega = \Omega$. En efecto,

$$\begin{aligned}\Psi_{t,s}^*\Omega &= dQ \wedge dP = (e^s dq - \frac{t}{m}(e^s - e^{-s})dp) \wedge e^{-s}dp \\ &= dq \wedge dp \\ &= \Omega,\end{aligned} \tag{190}$$

donde las derivadas son tomadas en M, así que las variables t, s son tratadas como parámetros (constantes).

Las transformaciones canónicas infinitesimales son la versión infinitesimal de grupos uno-paramétricos de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$; Expandiendo alrededor de $s = 0$ y despreciando términos de orden cuadrado y superior en s se obtiene la versión infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas (se toma $\epsilon = s$ como el parámetro infinitesimal). La versión infinitesimal del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s) = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), P(q,p,t,s) = pe^{-s})$ se presenta en [53], ésta es

$$Q = q + q\,\epsilon - \frac{2\,t\,p}{m}\epsilon, \quad P = p - p\,\epsilon. \tag{191}$$

Es claro que la función generatriz de una transformación canónica infinitesimal es la misma función generatriz del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas que la define. Para la transformación canónica infinitesimal (191) la función generatriz es $G(q,p,t) = qp - \frac{tp^2}{m}$, la cual coincide con la función generatriz $f(q,p,t)$ del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas (185). En general se tiene que la transformación canónica infinitesimal generada por una función dada es la versión infinitesimal del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por dicha función.

9.3. Simetrías y grupos de transformaciones de invarianza. Es bien sabido que asociado con cada transformación de invarianza infinitesimal existe una constante de movimiento, la cual es la generatriz de dicha transformación [12]. Además, en [53] se muestra que si un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas deja la Hamiltoniana invariante, entonces su función generatriz es una constante de movimiento; y de manera recíproca, cualquier constante de movimiento genera un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas que deja la Hamiltoniana invariante. Se dice que una función Hamiltoniana $H(q,p,t)$ es invariante bajo una transformación de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t), P(p,q,t))$ (o que la transformación de coordenadas canónicas deja la Hamiltoniana invariante) si la nueva Hamiltoniana es

$$K(q,p,t) \;=\; H(Q(q,p,t),\, P(p,q,t),\, t)\;. \tag{192}$$

Si la transformación de coordenadas canónicas es independiente del tiempo, es decir, $Q = Q(q,p), P = P(q,p)$, entonces la nueva Hamiltoniana puede ser tomada como la vieja Hamiltoniana, es decir, podemos tomar $K(q,p,t) = H(q,p,t)$. Así que una transformación de coordenadas canónicas independiente del tiempo $(Q(q,p), P(q,p))$ deja la Hamiltoniana $H(q,p,t)$ invariante si $H(Q,P,t) = H(q,p,t)$.

Veamos la noción de invarianza desde el punto de vista geométrico [60].

Considere primero el caso independiente del tiempo.

Definición 93. Se dice que la transformación canónica independiente del tiempo $\Phi : M \longrightarrow M$ deja la Hamiltoniana (independiente del tiempo) H invariante si $\Phi^* H = H$ (o equivalentemente $H \circ \Phi = H$).

En el caso de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) $\{\Psi_s\}$, se dice que éste deja la Hamiltoniana H invariante si ésta es invariante bajo cada transformación canónica Ψ_s, es decir, $\Psi_s^* H = H$.

Es claro que el generador infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que deja invariante la Hamiltoniana H es una campo vectorial Hamiltoniano X_f tal que $L_{X_f}\omega = L_{X_f} H = 0$. Un campo vectorial X que satisface

$$L_X \omega = L_X H = 0\,, \tag{193}$$

se llama simetría infinitesimal del sistema Hamiltoniano (M, ω, H) [7]. Una de las consecuencias de la existencia de simetrías en Mecánica Clásica es su asociación con constantes de movimiento, éste es el resultado del celebrado teorema de Noether. Hay una versión del teorema de Noether en Mecánica Lagrangiana [3, 18], así como también en Mecánica Hamiltoniana [53], dichas formulaciones sin el uso del formalismo geométrico. Por supuesto también se tiene la versión desde el formalismo geométrico [7, 50, 19], ésta es la siguiente:

Teorema 94. *i) Si f es una constante de movimiento de (M, ω, H), entonces su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal de (M, ω, H). De manera recíproca,*

ii) si V es una simetría infinitesimal de (M, ω, H), entonces existe una función f (posiblemente local) tal que $V = X_f$ y f es una constante de movimiento.

En términos de grupos de transformaciones, se resume que: si un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas independientes del tiempo dejan la Hamiltoniana invariante, entonces su función generatriz es una constante de movimiento; y de manera recíproca, cualquier constante de movimiento genera un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante.

Ahora veamos la noción de invarianza para transformaciones canónicas dependientes del tiempo [60]. Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo.

Definición 95. Se dice que la transformación canónica $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ deja la Hamiltoniana invariante si

$$\Phi^*(\Omega + dH \wedge dt) = \Omega + dH \wedge dt. \tag{194}$$

La ecuación (194) es equivalente a

$$\Phi^*\Omega + d(\Phi^* H) \wedge dt = \Omega + dH \wedge dt, \tag{195}$$

la cual puede ser reescrita como

$$\Phi^*\Omega - \Omega = d(H - \Phi^* H) \wedge dt; \tag{196}$$

esta última ecuación implica que la nueva Hamiltoniana (determinada hasta una función aditiva dependiente solo de t) puede ser tomada como

$$K = \Phi^* H = H \circ \Phi. \tag{197}$$

Localmente tiene la forma

$$K(q, p, t) = H(Q, P, t), \tag{198}$$

la cual es la condición general para que una transformación de coordenadas canónicas (independiente o dependiente del tiempo) sea una transformación de invarianza [12].

Se dice que la Hamiltoniana es invariante bajo un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas $\{\Psi_s\}$, si cada transformación Ψ_s deja la Hamiltoniana invariante, es decir,

$$\Psi_s^*(\Omega + dH \wedge dt) = \Omega + dH \wedge dt \tag{199}$$

para cada s.

Se observa que el generador infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que deja invariante la Hamiltoniana es un campo vectorial Hamiltoniano X_f tal que $L_{X_f}(\Omega + dH \wedge dt) = 0$. Un campo vectorial X que satisface

$$L_X(\Omega + dH \wedge dt) = 0 \tag{200}$$

se llama simetría infinitesimal del sistema Hamiltoniano $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ [60]. A continuación se presenta la versión geométrica del teorema de Noether para grupos uno-paramétricos de transformaciones canónicas dependientes del tiempo que dejan la Hamiltoniana invariante.

TEOREMA 96. *i) Si f es una constante de movimiento (posiblemente dependiente del tiempo) de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$, entonces su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$.*

De manera recíproca,

ii) si V es una simetría infinitesimal de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$, entonces existe una función f (posiblemente local) tal que $V = X_f$ y f es una constante de movimiento (posiblemente dependiente del tiempo).

Para la prueba ver [60].

9.3.1. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas para el oscilador armónico isotrópico. Considere el sistema físico del oscilador armónico en dos dimensiones. La función Hamiltoniana en coordenadas Cartesianas canónicas (x, y, p_x, p_y) es

$$H = \frac{1}{2\,m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\,w^2(x^2 + y^2)}{2}, \tag{201}$$

m es la masa y w la frecuencia angular. Es bien sabido que el momento angular

$$f = x\,p_y - y\,p_x \ , \tag{202}$$

es una constante de movimiento, por lo tanto su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal del sistema, en efecto,

$$X_f = -y\frac{\partial}{\partial x} - p_y\frac{\partial}{\partial p_x} + x\frac{\partial}{\partial y} + p_x\frac{\partial}{\partial p_y}, \tag{203}$$

$$\begin{aligned} L_{X_f}\omega &= d(X_f \lrcorner X_f) \\ &= d((dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y) \lrcorner X_f) \\ &= d(-y dp_x + p_y dx + x dp_y - p_x dy) \\ &= -dy \wedge dp_x + dp_y \wedge dx + dx \wedge dp_y - dp_x \wedge dy \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{204}$$

y

$$L_{X_f}H = X_f H = -y\,m\,w^2\,x - p_y\frac{p_x}{m} + x\,m\,w^2\,y + p_x\frac{p_y}{m} = 0. \tag{205}$$

Ya que X_f es una simetría infinitesimal entonces su flujo es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante. En efecto, las curvas integrales de X_f satisfacen las ecuaciones de Hamilton para f, a saber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\dot{p_x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\dot{p_y}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_x} = \dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_y} = \dot{y}, \tag{206}$$

es decir,

$$\begin{aligned} p_y &= -\dot{p_x} \\ p_x &= \dot{p_y} \\ y &= -\dot{x} \\ x &= \dot{y} \ . \end{aligned} \tag{207}$$

La solución general del sistema (207) es

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos s + c_2 \sin s \\ x &= -c_1 \sin s + c_2 \cos s \\ p_y &= c_3 \cos s + c_4 \sin s \\ p_x &= -c_3 \sin s + c_4 \cos s \ , \end{aligned} \tag{208}$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 constantes de integración. Ya que el flujo $\Psi(p, s)$ de X_f obedece la condición $\Psi(p, 0) = p$, se tiene que

$$\Psi(x, y, p_x, p_y, s) = (-y \sin s + x \cos s,\ y \cos s + x \sin s,\ p_x \cos s - p_y \sin s,\ p_y \cos s + p_x \sin s). \tag{209}$$

Así se puede ver de manera explícita que

$$\begin{aligned} \Psi_s^* \omega &= \Psi_s^*(dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y) \\ &= d(-y \sin s + x \cos s) \wedge d(p_x \cos s - p_y \sin s) \\ &+ d(y \cos s + x \sin s) \wedge d(p_y \cos s + p_x \sin s) \\ &= dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y \\ &= \omega \ , \end{aligned} \tag{210}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_s^* H &= H \circ \Psi_s \\ &= H(-y \sin s + x \cos s, y \cos s + x \sin s,\ p_x \cos s - p_y \sin s,\ p_y \cos s + p_x \sin s) \\ &= \frac{1}{2\,m}((p_x \cos s - p_y \sin s)^2 + (p_y \cos s + p_x \sin s)^2) \\ &+ \frac{m\, w^2((-y \sin s + x \cos s)^2 + (y \cos s + x \sin s)^2)}{2} \\ &= \frac{1}{2\,m}(p_x^2 + p_y^2) \ + \ \frac{m\, w^2(x^2 + y^2)}{2} \\ &= H. \end{aligned} \tag{211}$$

9.3.2. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas para el sistema Smorodinsky-Winternitz. En este caso se considera el sistema superintegrable de Smorodinsky-Winternitz [63, 64]. La función Hamiltoniana en coordenadas Cartesianas canónicas está dada por

$$H = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + k\,(x^2 + y^2) + \frac{c}{x^2} \ , \tag{212}$$

k, c son constantes reales. La función

$$T \ = \ p_y^2 + 2\,k\,y^2 \ , \tag{213}$$

es una constante de movimiento (es la responsable de la separación de variables en coordenadas Cartesianas). Se tiene que el campo vectorial Hamiltoniano

$$X_T = 2p_y \frac{\partial}{\partial y} - 4ky \frac{\partial}{\partial p_y} \ , \tag{214}$$

es una simetría infinitesimal del sistema, y su flujo

$$\Psi(x, y, p_x, p_y, s) = \left(x, \frac{p_y \sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}} + y \cos(\sqrt{8k}s), p_x, p_y \cos(\sqrt{8k}s) - \sqrt{2k} y \sin(\sqrt{8k}s) \right) \ , \tag{215}$$

es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante. En efecto, de manera geométrica explícita se ve que

$$\begin{aligned}\Psi^*\omega = &= \left(\frac{\sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}}dp_y + \cos(\sqrt{8k}s)dy\right)\wedge \\ &\quad \left(\cos(\sqrt{8k}s)dp_y - \sqrt{2k}\sin(\sqrt{8k}s)dy\right) + dx\wedge dp_x, \\ &= (-\sin^2(\sqrt{8k}s)dp_y\wedge dy + \cos^2(\sqrt{8k}s)dy\wedge dp_y)+ \\ &\quad + dx\wedge dp_x \\ &= dx\wedge dp_x + dy\wedge dp_y \\ &= \omega\ ,\end{aligned} \tag{216}$$

y

$$\begin{aligned}= H(\Psi(x,y,p_x,p_y,s)) &= \frac{1}{2}\left(p_x^2 + \left(p_y\cos(\sqrt{8k}s) - \sqrt{2k}y\sin(\sqrt{8k}s)\right)^2\right)+ \\ &\quad + k\left(x^2 + \left(\frac{p_y\sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}} + y\cos(\sqrt{8k}s)\right)^2\right) + \frac{c}{x^2} \\ &= \frac{(p_x^2+p_y^2)}{2} \ + \ k\,(x^2+y^2) \ + \ \frac{c}{x^2} \\ &= H(x,y,p_x,p_y).\end{aligned} \tag{217}$$

9.3.3. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas dependientes del tiempo. En [53] se muestra que la Hamiltoniana dependiente del tiempo

$$H = \frac{p^2}{2\,m} \ - \ k\,t\,q, \tag{218}$$

con k una constante real, es invariante bajo el grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por la siguiente constante de movimiento

$$g = q - \frac{t\,p}{m} + k\frac{t^3}{3\,m}. \tag{219}$$

Se verifica que X_g es una simetría infinitesimal, en efecto

$$X_g = -\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}, \tag{220}$$

así que

$$\begin{aligned}L_{X_g}(\Omega + dH\wedge dt) &= d(\Omega\lrcorner X_g + dH\wedge dt\lrcorner X_g) \\ &= d(dq\wedge dp\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}) - ktdq\wedge dt\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}) \\ &\quad + \frac{p}{m}dp\wedge dt\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p})) \\ &= d(-\frac{t}{m}dp + dq + k\frac{t^2}{m}dt + \frac{p}{m}dt) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{221}$$

Por otro lado, el flujo Ψ de X_g está dado por

$$\Psi(q,p,t,s) = (q - \frac{ts}{m}, p - s, t), \tag{222}$$

el cual coincide con la expresión del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por g presentado en [53] (de acuerdo a la ecuación (184)) por

$$Q = q - \frac{ts}{m}\ , \quad P = p - s. \tag{223}$$

9.3.4. Una simetría infinitesimal para el oscilador armónico dependiente el tiempo. El oscilador armónico dependiente el tiempo aparece en diversos marcos de estudio, el caso N-dimensional fue analizado en [56]. Para $N = 1$, la función Hamiltoniana es

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}(p^2 + w^2(t)\, q^2), \tag{224}$$

con frecuencia angular $w(t)$ dependiente del tiempo. La función

$$f = \frac{1}{2}(\alpha^{-2}\, q^2 + (\alpha\, p - \dot{\alpha}\, q)^2), \tag{225}$$

con $\alpha = \alpha(t)$ satisfaciendo $\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3} = 0$, es una constante de movimiento, así que el campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal del sistema, en efecto,

$$X_f = (\alpha^2 p - \alpha\dot{\alpha} q)\frac{\partial}{\partial q} + (\alpha\dot{\alpha} p - \dot{\alpha}^2 q - \alpha^{-2} q)\frac{\partial}{\partial p}; \tag{226}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L_{X_f}(\Omega + dH \wedge dt) &= d(\omega \lrcorner X_f + dH \wedge dt \lrcorner X_f) \\ &= d((\alpha^2 p - \alpha\dot{\alpha} q)dp + (\dot{\alpha}^2 q + \alpha^{-2} q - \alpha\dot{\alpha} p)dq \\ &+ (\alpha\dot{\alpha} p^2 - \dot{\alpha}^2 pq - \alpha^{-2} pq + w^2(t)\alpha^2 pq - w^2(t)\alpha\dot{\alpha} q^2)dt) \\ &= (\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3})(\alpha p - 2\dot{\alpha} q)dq \wedge dt \\ &+ (\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3})\alpha q dp \wedge dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{227}$$

En el último pase en la ecuación (227) se ha usado que $\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3} = 0$.

10. Otros formalismos geométricos en Mecánica Clásica y la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

El objetivo de esta sección final es ofrecer una visión general de algunos temas que pueden servir como base para estudios más avanzados. En particular, se presenta de manera introductoria e informal ciertos formalismos geométricos que permiten extender la formulación de la Mecánica Clásica para incluir la descripción de sistemas disipativos. Además, se ofrece una breve exposición sobre la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica.

10.1. Variedades de Jacobi y variedades de contacto. Las estructuras de Poisson y de Jacobi fueron introducidas por Lichnerowicz (1915-1998) como estructuras tensoriales que definen dinámica Hamiltoniana [28, 65], a saber, permiten asignar a cada función diferenciable un campo vectorial diferenciable llamado el campo vectorial Hamiltoniano para dicha función. Por otro lado, las llamadas estructuras casi-Poisson se han estudiado como las estructuras subyacentes para la mecánica no-holónoma [66]

Definición 97. Una variedad de Jacobi es una variedad diferencial M equipada con un par (Λ, E), con Λ un campo de 2-tensores contravariantes antisimétricos y E un campo vectorial, que nuevamente satisfacen una condición de compatibilidad establecida también por medio del corchete de Schouten-Nijenhuis.

Cada variedad de Poisson (M, P) es una variedad de Jacobi con $\Lambda = P$ y $E = 0$.

Si (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi, entonces la estructura (Λ, E) induce un corchete de Lie en el espacio de funciones diferenciables en M, llamado paréntesis de Jacobi, que satisface la llamada regla débil de Leibniz, a saber, $supp(\{f, g\}) \subseteq supp(f) \cap supp(g)$. Todo paréntesis de Jacobi está definido por una variedad de Jacobi [67, 68].

Dada una variedad de Jacobi (M, Λ, E), es posible asignar a cada función diferenciable f en M uno y solo un campo vectorial, llamado el campo vectorial Hamiltoniano para f (de forma similar al caso Poisson). La dinámica definida por cualquier campo

vectorial Hamiltoniano (en una variedad de Jacobi) describe un sistema disipativo. Dos casos particulares, pero relevantes de variedades de Jacobi, son las variedades de contacto y las variedades simplécticas localmente conformes, de hecho, cada variedad de Jacobi se descompone de manera natural en subvariedades disjuntas que son o variedades de contacto o variedades simplécticas localmente conformes, cada una de estas variedades es cerrada bajo cualquier dinámica Hamiltoniana. Para detalles en mecánica Hamiltoniana en variedades de Jacobi ver [69, 70, 67, 68, 71, 72].

El caso especial de los formalismos tanto Hamiltoniano como Lagrangiano en variedades de contacto se ha convertido en el principal objeto de estudio de muchos artículos de investigación publicados durante la última década [73, 47, 74, 75, 19, 76, 77, 78, 49, 79], ésta es un área de investigación activa.

Una variedad de contacto es una variedad de Jacobi en la que la estructura de Jacobi está definida por medio de una 1-forma diferencial llamada forma de contacto. Toda variedad de contacto es de dimensión impar. El espacio fase natural para sistemas Hamiltonianos disipativos es el producto $\mathbb{R} \times T^*Q$ [74], el cual es una variedad de contacto con la forma de contacto dada localmente por $\theta = dz - \alpha^i dx^i$, donde z es la coordenada global en $\mathbb{R}$ y $(x^1, ..., x^n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ son coordenadas locales en T^*Q.

En general para una variedad de contacto de dimensión $2n+1$, alrededor de cada punto $x \in M$, existen coordenadas locales (llamadas coordenadas de Darboux o coordenadas canónicas) $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n, z)$ tales que la forma de contacto tiene la expresión local

$$\theta = dz - p_i dq^i; \tag{228}$$

El campo vectorial Hamiltoniano X_f para una función f tiene la expresión local

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + \left(p_i\frac{\partial f}{\partial p_i} - f\right)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{229}$$

Si (M, θ) es una variedad de contacto, entonces el campo vectorial Hamiltoniano X_H para una función H define un sistema Hamiltoniano de contacto. Las expresiones locales de las trayectorias del sistema $\psi(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t), z(t))$ satisfacen las llamadas ecuaciones disipativas de Hamilton [73, 47, 74]

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial H}{\partial z}\right), \qquad \dot{z} = p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \tag{230}$$

La evolución de una función $f \in C^\infty(M)$ a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{f} = \{f, H\} - f\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{231}$$

Así se ve que si la función H (la Hamiltoniana del sistema) depende de la coordenada z entonces ésta no es una constante de movimiento, a saber

$$\dot{H} = -H\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{232}$$

Un sistema físico de interés modelado matemáticamente por un sistema Hamiltoniano de contacto es el oscilador armónico amortiguado [74], en efecto, considere el sistema Hamiltoniano de contacto con Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}y^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \gamma z$; se nota que $\dot{H} \neq 0$. Las ecuaciones disipativas de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{y}{m}, \qquad \dot{y} = -m\omega^2 x - \gamma y, \qquad \dot{z} = \frac{y^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \gamma z. \tag{233}$$

Se tiene que

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0\,, \tag{234}$$

la cual es la ecuación de Newton para el oscilador armónico amortiguado.

El oscilador armónico amortiguado es típicamente analizado mediante el formalismo de Lagrange–d'Alembert, introduciendo una función de disipación de Rayleigh,

o bien a través de extensiones Hamiltonianas dependientes del tiempo (como el Hamiltoniano de Caldirola–Kanai). Sin embargo, en estos esquemas el sistema no es verdaderamente Hamiltoniano autónomo, pues la disipación destruye la estructura simpléctica estándar. Recientemente, se ha mostrado que este sistema puede reformularse en términos de una dinámica de cuarto orden, construida a partir de un principio variacional basado en los llamados residuales de la ecuación de Newton. Este enfoque fue introducido en [80] y posteriormente extendido a sistemas con rigidez compleja mediante un modelo de doble oscilador [81].

Más aún, en [82] se ha mostrado que cada formulación dinámica de orden superior par, posee una estructura variacional intrínseca, lo cual permite una descripción Hamiltoniana canónica autónoma, con Hamiltoniano conservado y ecuación de Hamilton–Jacobi asociada, de sistemas disipativos o no holónomos. Este proceso se lleva a cabo al extender el espacio fase permitiendo derivadas de orden superior, creando así un espacio de mayor dimensión donde surgen naturalmente estructuras simplécticas. Dicha dinámica extendida no es equivalente por sí sola al sistema mecánico original, sino que requiere imponer condiciones auxiliares sobre el residual y su derivada, obteniendo la dinámica original en la subvariedad definida por dichas condiciones [83]. Cabe remarcar que este último aspecto de la formulación de la mecánica clásica por medio de dinámica de orden superior, representa una diferencia fundamental con el formalismo de la dinámica Hamiltoniana de contacto, donde la dinámica en la variedad de contacto es equivalente a la dinámica original.

10.2. La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica. En la descripción matemática rigurosa de la Mecánica Cuántica el espacio fase es un espacio de Hilbert complejo (de manera estándar en física, el espacio fase es el conjunto de funciones complejas segundo integrables en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$, y los estados son llamados funciones de onda [84]) llamado espacio de Hilbert cuántico; y los observables son operadores lineales autoadjuntos (operadores diferenciales en la descripción física estándar [84]). A diferencia de la Mecánica Clásica, la cual es una teoría determinista, la Mecánica Cuántica tiene una naturaleza probabilística, a saber, solo probabilidades pueden ser medidas, concretamente, el valor esperado de un observable Q en el estado $\psi \in \mathcal{H}$ es el número $\langle Q \rangle_\psi = \langle \psi, Q\psi \rangle$, donde $\langle , \rangle$ es el producto interno en $\mathcal{H}$ [85].

Dado un sistema cuántico en el espacio de Hilbert complejo $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ con operador Hamiltoniano H, la evolución de una trayectoria $\psi(t)$ en el espacio de Hilbert cuántico está determinada por la ecuación de Schrödinger (por simplicidad se toman unidades donde $\hbar$ es igual a 1)

$$i\frac{d\psi}{dt} = H\psi. \tag{235}$$

Un observable Q (un operador autoadjunto) es una constante de movimiento si $\langle Q \rangle_{\psi(t)}$ es constante a lo largo de cualquier trayectoria $\psi(t)$ del sistema, es decir, Q es una constante de movimiento si $\frac{d\langle Q \rangle_{\psi(t)}}{dt} = 0$. El conocido teorema de Ehrenfest establece que

$$\frac{d\langle Q \rangle_{\psi(t)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [Q, H] \rangle_{\psi(t)} + \langle \frac{\partial Q}{\partial t} \rangle_{\psi(t)}, \tag{236}$$

donde $[,]$ es el conmutador de operadores. Para más detalles ver [85]. También puede consultar las notas [86], en ellas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, además de una introducción axiomática a la Mecánica Cuántica.

El espacio de Hilbert cuántico $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ puede ser visto como una variedad simpléctica con la forma simpléctica definida por $\omega(\psi, \phi) = 2Im\langle \psi, \phi \rangle$ [87, 88, 89]. Todo observable F define una función real f por $f(\psi) = \langle F \rangle \psi$ y el campo vectorial Hamiltoniano X_f para f, definido por medio de la forma simpléctica ω (en el sentido $df = X_f \lrcorner \omega$) en $\mathcal{H}$ (como variedad simpléctica), coincide con el operador $-iF$; por lo tanto, las curvas integrales de X_h, con h la función real definida por el operador Hamiltoniano

H, satisfacen la ecuación de de Schrödinger $\frac{d\psi}{dt} = -iH\psi$, es decir, las curvas integrales de X_h son trayectorias del sistema cuántico $(\mathcal{H}, \langle , \rangle, H)$ [87, 88, 89].

AGRADECIMIENTOS. Adrián Escobar agradece el apoyo del proyecto de investigación 2024-CPIR-0 por parte de la DAI UAM. Rafael Azuaje agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo económico otorgado para una estancia posdoctoral en el marco de la convocatoria Estancias posdoctorales por México 2022.

Referencias

[1] V. I. Arnold. *Ordinary Differential equations*. Springer, 1992.
[2] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. American Mathematical Soc. No. 364, 2008.
[3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, 1978.
[4] R. Larson, B. H. Edwards, and D. C. Falvo. *Elementary linear algebra*. Brooks/Cole, Cengage Learning Belmont, 2013.
[5] S. Lang. *Linear algebra*. Springer Science & Business Media, 1987.
[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. *Álgebra lineal*. Publicaciones cultural, 1982.
[7] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds, second edition*. Springer, 2012.
[8] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector calculus*. Macmillan, 2003.
[9] J. Stewart, K. K. Clegg, and S. Watson. *Calculus*. Cengage Learning, 2020.
[10] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, 1988.
[11] G. F. Torres del Castillo. *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach, second edition*. Birkhäuser Basel, 2020.
[12] M. G. Calkin. *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. World Scientific Publishing, 1996.
[13] R. Gilmor. *Lie Groups, Physics and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008.
[14] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer Science & Business Media, 1993.
[15] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
[16] M. Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
[17] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, third edition*. Springer, 2006.
[18] Y. Kosmann-Schwarzbach and B. E. Schwarzbach. *The Noether Theorems, Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer New York, 2011.
[19] A. Bravetti and A. Garcia-Chung. A geometric approach to the generalized Noether theorem. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 54:095205, 2023.
[20] J. F. Cariñena, F. Falceto, J. Grabowski, and M. F. Rañada. Geometry of Lie integrability by quadratures. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 48:215206, 2015.
[21] J. F. Cariñena et al. Solvability of a Lie algebra of vector fields implies their integrability by quadratures. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 49:425202, 2016.
[22] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
[23] A. M. Escobar-Ruiz and R. Azuaje. On particular integrability in classical mechanics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 57:105202, 2024.
[24] J. F. Cariñena. A geometric approach to the Sundman transformation and its applications to integrability. *Symmetry*, 16(5):568, 2024.
[25] V. V. Kozlov. Tensor invariants and integration of differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 74(1):111, 2019.
[26] R. d'Inverno and J. Vickers. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. Oxford University Press, 2022.
[27] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
[28] A. Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algebres de Lie associées. *J. Differential Geom.*, 12(2):253–300, 1977.
[29] F. Magri and C. Morosi. *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*. Quaderno S 19, Universit'a degli Studi di Milano, 1984.
[30] Y. KosmannSchwarzbach and F. Magri. Lax–Nijenhuis operators for integrable systems. *J. Math. Phys.*, 37:6173, 1996.
[31] F. Magri et al. Eight lectures on integrable systems. *Integrability of nonlinear systems*, pages 209–250, 2004.

[32] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, and A. B. Yanovski. *Integrable Hamiltonian Hierarchies*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
[33] P. Tempesta and G. Tondo. Higher Haantjes brackets and integrability. *Commun. Math. Phys.*, 289:1647–1671, 2021.
[34] P. Tempesta and G. Tondo. Haantjes algebras of classical integrable systems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 201:57–90, 2022.
[35] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, and P. Vanhaecke. *Poisson structures*. Springer, 2013.
[36] A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3):523–557, 1983.
[37] A. Weinstein. Poisson geometry. *Differential Geom. Appl.*, 9(1):213–238, 1998.
[38] G. Rastelli and M. Santoprete. Canonoid and poissonoid transformations, symmetries and bi-Hamiltonian structures. *J. Geom. Mech.*, 7:483–515, 2015.
[39] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics, third edition*. Addison-Wesley, 2002.
[40] C. J. Eliezer and A. Gray. A note on the time-dependent harmonic oscillator. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30(3):463–468, 1976.
[41] G. Fiore. The time-dependent harmonic oscillator revisited. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 58:055202, 2025.
[42] V. Perlick. The Hamiltonization problem from a global viewpoint. *J. Math. Phys.*, 33(2):599–606, 1992.
[43] S. A. Hojman. The construction of a Poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29(3):667, 1996.
[44] M. Avendaño-Camacho et al. Geometrical aspects of the Hamiltonization problem of dynamical systems. *SIGMA*, 18:038, 2022.
[45] M. de León and P. R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. North-Holland Mathematics Studies, 1989.
[46] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in mathematics*, 6(3):329–346, 1971.
[47] M. de León and C. Sardon. Cosymplectic and contact structures for time-dependent and dissipative Hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 50:255205, 2017.
[48] J. Struckmeier. Hamiltonian dynamics on the symplectic extended phase space for autonomous and non-autonomous systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38(6):1257, 2005.
[49] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. Canonical and canonoid transformations for Hamiltonian systems on (co)symplectic and (co)contact manifolds. *J. Math. Phys.*, 64(3):033501, 2023.
[50] R. Azuaje and A. Bravetti. Scaling symmetries and canonoid transformations in hamiltonian systems. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 21(04):2450077, 2024.
[51] F. Cantrijn, M. de León, and E. A. Lacomba. Gradient vector fields on cosymplectic manifolds. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:175–188, 1992.
[52] R. Azuaje. Lie integrability by quadratures for symplectic, cosymplectic, contact and cocontact hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 93(1):37–56, 2024.
[53] G. F. Torres del Castillo. *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*. Springer, 2018.
[54] S. Bouquet and A. Bourdier. Notion of integrability for time-dependent Hamiltonian systems: Illustrations from the relativistic motion of a charged particle. *Phys. Rev. E*, 57:1273, 1998.
[55] J. Lewis and H. Ralph. Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators. *J. Math. Phys.*, 9(11):1976–1986, 1968.
[56] G. E. Prince and C. J. Eliezer. Symmetries of the time-dependent n-dimensional oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen*, 13(3):815, 1980.
[57] A. M. Perelomov. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*. Birkhäuser Basel, 1990.
[58] V. Kozlov. *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*. Springer, 1996.
[59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics: Volume 1*. Elsevier Science, 1982.
[60] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. Canonical transformations: from the coordinate based approach to the geometric one. *Physica Scripta*, 100(6):065228, 2025.
[61] J. F. Cariñena, F. Falceto, and M. F. Rañada. Canonoid transformations and master symmetries. *J. Geo. Mech*, 5:151–166, 2013.
[62] M. Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Physics for Mathematicians: Mechanics I. Publish or Perish, 2010.
[63] P. Winternitz, J. A. Smorodisky, M. Uhlir, and I Fris. On symmetry groups in classical and quantum mechanics. Jadernaja Fiz. 4, 625–635 (1967). *English transl.: Soviet J. Nucl. Phys*, 4:444–450, 1967.
[64] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, and K. Kokkotas. Deformed oscillator algebras for two-dimensional quantum superintegrable systems. *Phys. Rev. A*, 50(5):3700, 1994.
[65] A. Lichnerowicz. Les variétés de Jacobi et leurs algebres de Lie associées. *J. Math. pures et appl.*, 57:453–488, 1978.
[66] L. C. García-Naranjo et al. Almost-Poisson brackets for nonholonomic systems with gyroscopic terms and Hamiltonisation. *Journal of Nonlinear Science*, 34(6):110, 2024.
[67] A. Ibort et al. Reduction of Jacobi manifolds. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30(8):2783, 1997.

[68] C. M. Marle. On Jacobi manifolds and Jacobi bundles. In *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*, pages 227–246, New York, NY, 1991. Springer US.
[69] M. de León, B. López, J. C. Marrero, and E. Padrón. Lichnerowicz-Jacobi cohomology and homology of Jacobi manifolds: modular class and duality. *arXiv preprint math/9910079*, 1999.
[70] J. Araujo and C. Sardón. *A guide to Lie systems with compatible geometric structures*. World Scientific, 2020.
[71] O. Esen et al. Reviewing the geometric Hamilton–Jacobi theory concerning jacobi and leibniz identities. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 55(40):403001, 2022.
[72] I. Vaisman. Jacobi manifolds. *Selected topics in Geometry and Mathematical Physics*, 1:81–100, 2002.
[73] M. de León and M. Lainz. Contact Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.*, 60:102902, 2019.
[74] A. Bravetti, H. Cruz, and D. Tapias. Contact Hamiltonian mechanics. *Ann. Physics*, 376:17–39, 2017.
[75] A. Bravetti. Contact Hamiltonian dynamics: The concept and its use. *Entropy*, 19(10):535, 2017.
[76] J. Gaset, X. Gràcia, M.C. Muñoz-Lecanda, X. Rivas, and N. Román-Roy. New contributions to the Hamiltonian and Lagrangian contact formalisms for dissipative mechanical systems and their symmetries. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 17:2050090, 2020.
[77] M. de León and M. Lainz. Infinitesimal symmetries in contact Hamiltonian systems. *J. Geom. Phys.*, 153:103651, 2020.
[78] M. De León et al. Time-dependent contact mechanics. *Monatshefte für Mathematik*, 2022.
[79] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. On particular integrability for (co) symplectic and (co) contact hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 58:045201, 2025.
[80] J. W. Sanders. Fourth-order dynamics of the damped harmonic oscillator. *arXiv preprint*, 2021.
[81] J. W. Sanders. A dual-oscillator approach to complex-stiffness damping based on fourth-order dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 109(2):285–301, 2022.
[82] J. W. Sanders. Intrinsic variational structure of higher-derivative formulations of classical mechanics. *arXiv preprint*, 2023.
[83] J. W. Sanders, A. C. DeVoria, N. J. Washuta, G. A. Elamin, K. L. Skenes, and J. C. Berlinghieri. A canonical hamiltonian formulation of the navier–stokes problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 984:A27, 2024.
[84] D. Griffiths and D. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics, third edition*. Cambridge University Press, 2018.
[85] B. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.
[86] J. R. Bolaños-Servín, R. Quezada-Batalla, and J. I. Rios-Cangas. Elementos matemáticos de la mecánica cuántica. *MIXBA'AL*, 14(1):143–222, 2023.
[87] J-F. Carinena, J. Clemente-Gallardo, and G. Marmo. Geometrization of quantum mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152:894–903, 2007.
[88] J. Clemente-Gallardo. The geometrical formulation of quantum mechanics. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza*, 67:51–103, 2012.
[89] P. Sinha and A. Yadav. Poisson geometric formulation of quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 65(6), 2024.

Rafael L. Azuaje Hidalgo.
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Física.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `razuaje@xanum.uam.mx`

Adrián M. Escobar Ruiz.
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Física.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `admau@xanum.uam.mx`

Presentación de las notas del 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Del 27 al 31 de enero del 2025 se llevó a cabo el 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Para conseguir recursos econónimos para el evento tuvimos que concursar en el Programa Especial de Apoyo a Proyectos de Docencia e Investigación de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-I. Ganamos una de las asignaciones monetarias y por eso pudimos llevar a cabo el evento. Los primeros 6 Coloquios se realizaron en algún centro vacacional del IMSSS o en Ixtapa-Zihuatanejo o algún hotel del puerto de Veracruz. En esta ocasión, se llevó a cabo en las instalaciones de la UAM-I, y el saldo es a nuestro favor: un éxito. Tuvimos 60 jóvenes invitados, 40 de ellos de universidades foráneas y 20 UAM. Impartimos 8 talleres de investigación, los profesores escribieron notas y de acuerdo a la encuesta que levantamos al final del evento, el resultado es satisfacción de nuestros jóvenes invitados y de nosotros los organizadores. En este número de Mixba'al te ofrecemos las notas.

Este es el espacio para agradecer a nuestras autoridades por la confianza, a las secretarias y a los jóvenes que nos apoyaron en la logística, pero sobre todo a nuestros jóvenes invitados por ceder una semana de su vida y dedicarlo aprender temas nuevos de matemáticas. Los talleres de inducción a la investigación fueron los siguientes.

- *Análisis de datos con un enfoque bayesiano*
  Asael Fabian Martínez Martínez

- *Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas*
  Rogelio Fernández-Alonso González, Silvia Claudia Gavito Ticozzi, Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

- *Resultados relevantes del álgebra lineal en modelos y aplicaciones*
  Lorenzo Héctor Juárez Valencia

- *Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental*
  Josué Mléndez Sánchez, Eduardo Rodríguez Romero

- *Una breve introducción a los torneos y sus generalizaciones*
  Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol

- *Del cero al quantum: un viaje al mundo de los códigos*
  Jorge R. Bolaños Servín, Yuriko Pitones Amaro, Josué I. Ríos Cangas

- *Introducción a la teoría de juegos epistémica*
  Rubén Becerril Borja

- *Cómo contar más allá del infinito y para qué sirve. Inducción transfinita y algunas aplicaciones*
  Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Participantes:

- *Leslie Karen Castillo Alvarado*, UAM Iztapalapa
- *Hugo Estrada Rodríguez*, UAM Iztapalapa
- *Miryam Sophie Naomi Mielke Mendez*, UAM Iztapalapa
- *Grecia Lezama Herrera*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Cecilia Gálvez Cervantes*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Gabriela Lissette Villagrán Casados*, Universidad Veracruzana
- *Luis Daniel Flores Paredes*, UAM Iztapalapa
- *Sherlin Josefina Jaime López*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Karem Elizabeth Lobato Perea*, Universidad Veracruzana
- *Citlali Amairani Herrera Ramírez*, Universidad Veracruzana
- *Nayeli Nava Cuamatzi*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Jesus Andrik Bello Dolores*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *José Ángel Jacobo Cruz*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Paola Denisse García Arriaga*, Universidad Autónoma de San Luis Potosí
- *Myriam Lobato Perea*, Universidad Veracruzana
- *Karla Castillo Sandova*, ENES Juriquilla
- *Jaime Rico Leon*, Universidad Nacional Autónoma de México
- *Jorge Antonio Montes Rios*, ENES Juriquilla
- *Jassiel Eduardo Coronado Piña*, Universidad Autónoma de Nuevo León
- *Marco Antonio Vázquez Miranda*, UAM Iztapalapa
- *Omar Alejandro Ochoa Romero*, Universidad de Sonora
- *David Cruz Gonzalez*, UAM Iztapalapa
- *Héctor Arroyo Méndez*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *Daniela Reyes Monroy*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *Eduardo Alanís García*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *David López Contreras*, UAM Iztapalapa
- *Pablo César Sánchez Silva*, UAM Iztapalapa
- *Adalit Betsabe Fuentes Colorado*, Universidad Veracruzana
- *Sebastián Franco Martinez*, UAM Cuajimalpa
- *Abraham David Martínez Matuz*, Universidad Veracruzana

- *Diana Skarleth Hernández Alvarez*, Universidad Veracruzana
- *Rodrigo Zárate Chávez*, Universidad Veracruzana
- *Sebastian Lara Benitez*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Alejandra Esmeralda Gámiz Hernández*, Universidad Juárez del Estado de Durango
- *Hugo Andrés Amaya Chaire*, Universidad Juárez del Estado de Durango
- *Mariana Cruz Gutierrez*, UAM Iztapalapa
- *Abril Midori Rebollar Mariano*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Carlos E. López Cesáreo*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- *Paola Piedras Samaniego*, Universidad Autónoma del Estado de México
- *Yolocelic Alma Victoriano Sánchez*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Vincent A. González Andalón*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- *Jafet Santiago Valerio*, UAM Iztapalapa
- *César Alberto Solís Gómez*, UAM Iztapalapa
- *José M. Contreras Dávila*, Universidad Autónoma del Estado de México
- *Jose David Lamas Medina*, Universidad Autónoma de Coahuila
- *Hillary Temaxte Cano*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Miguel Alejandro Gaspar Flores*, Universidad de Colima
- *Jesús Santiago Santos Rodríguez*, UAM Iztapalapa
- *Bryan Eduardo Flores Silva*, Universidad de Colima
- *Fernando Nava Hernández*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Diana Laura Sánchez Sánchez*, UAM Iztapalapa
- *Luis Josías López Barrios*, UAM Iztapalapa
- *Meiri Yensuni Pucheta Hernández*, UAM Iztapalapa
- *Victoria Rodríguez Villarreal*, Universidad de Sonora
- *Diego Armando Victoria Garcia*, UAM Iztapalapa
- *Diana C. Manzano Baza*, Escuela Superior de Matemáticas No.2 Guerrero
- *José Miguel Pérez Mejia*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Ricardo Daniel Moreno Padilla*, UAM Iztapalapa
- *Dulce María Flores Tapia*, UAM Iztapalapa
- *Luis Raúl Serrano Olea*, UAM Iztapalapa

Comité Organizador



7º COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad Iztapalapa de la UAM, Ciudad de México

Departamento de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

Posgrado de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA