1. Problemas. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Álgebra Lineal - Propedéutico

Mayo de 2012

1. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   calcular AB, BA, B^T, A^T, BC^T, $A - B$, $-3C + 2C^T$, $(AB)^T$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

   (i)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

   (ii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

   (iii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 8 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 3 \end{array}$$

   (iv)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & & & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & -1 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -4 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & - & 4x_5 & = & -3 \end{array}$$

3. Discutir para qué valores de a y b los siguientes sistemas de ecuaciones lineales admiten una solución, o una infinidad de soluciones o no tienen solución.

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & & & = & 1 \\ & & ay & - & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & b \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & 2 \\ bx & + & ay & = & 2 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & b \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 5 \\ 4x & + & ay & = & 10 \end{array}$$

(v)

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ bx & + & y & = & 1 \end{array}$$

4. Determine todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ que permiten la existencia de solución a un sistema con matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & c+2 & c & c^2+8 \\ c+1 & c+1 & 0 & 2c+4 \\ -c & 2c+3 & 2c+4 & c+1 \end{array}\right).$$

5. Sean $\mathbf{u} = (0,2,4,6)^T$, $\mathbf{v} = (1,3,5,7)^T$. Suponga que para una matriz A, el par de sistemas $AX = \mathbf{u}$ y $AX = \mathbf{v}$ carecen de solución. ¿Es posible que $AX = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ tenga solución? De ser así, proporcione una matriz A que satisfaga estas condiciones.

6. Decidir si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas

   (a) Cualquier sistema de ecuaciones lineales admite al menos una solución.

   (b) Todo sistema de ecuaciones lineales es consistente (compatible).

   (c) Cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneo tienen al menos una solución.

   (d) Cualquier sistema de n ecuaciones con n incógnitas admite como máximo una solución.

(e) Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más incógnitas que ecuaciones tiene solución.

(f) Todo sistema de ecuaciones lineales tienen como máximo una solución.

(g) Dado un sistema de ecuaciones lineales, si el sistema homogéneo asociado a éste tiene una solución entonces el sistema dado tiene una solución.

7. Encontrar la factorización LU de las matrices asociadas a los sistemas del problema 2.

8. Hallar el rango de las matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones del problema 2.

9. Determinar si las matrices asociadas a los sistemas del problema 2 tienen inversa. En caso afirmativo encontrar la inversa usando el método de Gauss-Jordan.

10. Probar que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ es invertible si, y sólo si, $ab \neq 0$. Hallar la inversa.

11. Si A y B son matrices cuadradas, probar que la matriz dividida en bloque $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ es invertible si, y sólo si, A y B son invertible. Hallar la inversa.

12. Utilizar el problema anterior para encontrar la inversa de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

13. Probar que la matriz cuadrada A es invertible si verifica alguna de las relaciones siguientes

(a) $A^2 + 2A = I$.

(b) $A^3 - 3A^2 + 5A - I = 0$.

(c) $2A^3 - 4A + 2I = 0$.

Encontrar, en cada caso, la inversa de A.

14. Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$. Si $I - AB$ es no singular muestre que $I - BA$ es invertible.

15. Dada una matriz cuadrada A se pide:

    (a) Probar que $A + A^T$ es simétrica.

    (b) Probar que $A - A^T$ es antisimétrica.

    (c) Descomponer A como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

16. Verificar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

    (a) El producto de matrices tridiagonales es tridiagonal.

    (b) La inversa de una matriz tridiagonal es tridiagonal.

17. Calcular el $\det\left(\frac{3}{4}A\right)$ si la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Suponer que la matriz A satisface la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

    y encontrar el valor del $\det(A)$.