2. Problemas. Espacios Vectoriales.

Álgebra Lineal- Propedéutico

Mayo de 2012

1. En $\mathbb{R}^2$ se define la suma: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ y el producto por un escalar: $\lambda(a, b) = (0, \lambda b)$, ¿ se obtiene así un espacio vectorial?

2. En el conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ se define la suma como la multiplicación ordinaria y el producto escalar como $a \cdot x = x^a$. Probar que se obtiene un espacio vectorial.

3. El conjunto de matrices 2×2 de la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$
¿es espacio vectorial?

4. El conjunto de matrices diagonales 2×2 con las operaciones normales ¿es espacio vectorial?

5. El conjunto $\{(x, y) : x \geq 0, y \text{ es un número real } \}$ con las operaciones normales en $\mathbb{R}^2$, ¿es espacio vectorial?.

6. En vez de aplicar las definiciones normales de suma y multiplicación escalar en $\mathbb{R}^2$, suponga que estas dos operaciones se definen como sigue.

   (a) $$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ c(x, y) &= (cx, y) \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1, 0) \\ c(x, y) &= (cx, cy) \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ c(x, y) &= (\sqrt{c}x, \sqrt{c}y) \end{aligned}$$

   Con estas nuevas definiciones, ¿$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial?.

7. Defina las siguientes operaciones sobre el conjunto $V = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$:
$$(x, y) \oplus (u, v) = (xu, yv)\,,$$
$$c \odot (x, y) = (x^c, y^c)\,, \quad c \in \mathbb{Q}.$$
¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?

8. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos W son subespacios vectoriales de V:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$; $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^3$; $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x - 2y = 3\}$.
   (c) $V = \mathbb{R}^3$; $W_3 = \{(x, -x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (d) $V = \mathbb{R}^3$; $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, x - z = 1\}$.
   (e) $V = \mathbb{R}^n$; $W_5 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = (i-1)r + x_1, i = 2, 3, \ldots, n; r \neq 0\}$.
   (f) $V = \mathbb{R}^n$; $W_6 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.
   (g) $V = \mathbb{P}$; W_7 es el conjunto de polinomios con una raíz en a.
   (h) $V = \mathbb{P}$; W_8 es el conjunto de polinomios que satisfacen $4p(1) + p(2) = 3$.
   (i) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$; $W_9 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A^2 = 0\}$.
   (j) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$; $W_{10} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : AB = A\}$, B fija.
   (k) $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$; $W_{11} = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} : A^2 = I\}$.
   (l) $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$; $W_{12} = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3} : A \text{ es triangular inferior }\}$.
   (m) $V = \mathcal{F}[-1, 1]$; $W_{13} = \{f : f(x) = f(-x)\}$.
   (n) $V = \mathcal{F}[-1, 1]$; $W_{14} = \{f : f(x) = -f(-x)\}$.
   (o) $V = \mathcal{F}[-1, 1]$; $W_{15} = \{f : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$.

9. Demostrar que la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

10. Sean $V = \mathfrak{M}_{2x2}$, W_1 el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix},$$

y W_2 el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}.$$

   a) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios de V.
   b) Encuetre bases para W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$.

c) Determine las dimensiones de los subespacios en el inciso anterior.

11. Sean U y W dos subespacios del espacio vectorial V. Demostrar que $U \cup W$ es un subespacio vectorial de V si, y sólo si, $U \subset W$ o $W \subset U$.

12. Decir cuál ha de ser el valor de a para que los vectores siguientes sean linealmente independientes:

    (a) $\{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$.

    (b) $\{(a, 1, 1), (1, 1, a), (3, 1, 1)\}$.

13. Consideremos el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$. Probar que los polinomios $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ y $p'''(x)$ son linealmente independientes.

14. Sean A y B dos matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}$ distintas de la matriz nula. Demostrar que si A es simétrica y B es antisimétrica, son linealmente independientes.

15. Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ una base del espacio vectorial V. Pruebe o refute

    (a) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \cdots + \mathbf{v}_n, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n$ es base de V.

    (b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n$ es base de V.

16. Suponga que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ del espacio vectorial V son linealmente independientes. Muestre que si los vectores $\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}$ son linealmente dependientes entonces $\mathbf{w}$ está en el espacio generado por los vectores $\mathbf{v}_i$.

17. Hallar en cada caso, la intersección de los subespacios siguientes, una base y calcular su dimensión:

    (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

    (b) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0, y = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$.

18. Para cada subespacio de $\mathbb{R}^3$ encontrar una base y calcular su dimensión:

    (a) $\{(x, y, z) : x - y + 2z = 0, 2x + y + 3z = 0\}$.

    (b) $\{(x, y, z) : x - 2y + 3z = 0; -3x + 6y - 9z = 0\}$.

19. (a) ¿Una matriz de tamaño 4×5 puede tener todas sus columnas linealmente independientes? ¿Y todas sus filas? Justifique su respuesta.

(b) Si A es de tamaño 3×5 y $rango(A) = 2$, ¿puede A tener todas sus columnas linealmente independientes? ¿Y todas sus filas? Justifique su respuesta.

(c) Una matriz que no sea cuadrada ¿puede tener todas sus filas y todas sus columnas linealmente independientes? Justificar su respuesta.

20. Supongamos que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base para n. Demuestre que, si A es una matriz invertible $n \times n$, $\{Av_1, Av_2, ..., Av_n\}$ es también una base para n.

21. Hallar las matrices de cambio de base en los siguientes casos:

    (a) En $\mathbb{R}^2$ de la canónica a la base $\mathcal{V} = \{(1,1),(1,-1)\}$.

    (b) En $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{V} = \{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\}$ a la base $\mathcal{W} = \{(2,2,0),(3,1,-1),(2,0,2)\}$.

22. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $\mathcal{V} = \{(1,1,1),(1,-1,0),(-1,0,1)\}$ y $\mathcal{W} = \{(2,2,0),(3,1,-1),(2,0,2)\}$. Obtener las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{W}}$ y $P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{V}}$. Comprobar que el producto de dichas matrices es la matriz identidad.

23. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\sin x, \cos x\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\sin(x+2), \cos(x+2)\}$ dos bases del espacio vectorial V.

    (a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

    (b) Utilice el resultado del inciso anterior para determinar las coordenadas del vector $2\sin x - 3\cos x$ en la base $\mathcal{B}_2$.

24. Calcular el núcleo (espacio nulo de A), la imagen (espacio columna), el espacio fila y el espacio nulo izquierdo (espacio nulo de A^T), así como las dimensiones de cada subespacio de las siguientes matrices:

    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

    (b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

    (c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

25. Llamemos S al espacio vectorial abarcado por los vectores $(1, 0, -2, 0)$, $(0, 2, 4, -1)$ y $(2, 2, 0, -1)$. Hallar $S^\perp$, $(S^\perp)^\perp$. ¿Qué relación existe entre $(S^\perp)^\perp$ y S?