3. Problemas. Funciones lineales.

Álgebra Lineal- Propedéutico

Mayo de 2012

1. Determinar cuáles de los siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3x + z, x - 2y + 3z, 2).$

   (b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x, y) = (-x + y, x - 3y, 3x + y, 0).$

   (c) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1x_2 + 3x_3, 2x_1x_3 - 2x_4, x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4).$

   (d) $L : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_4, \quad L(p(x)) = p'(x).$

   (e) $L : \mathcal{M}_{2\times2} \to \mathbb{R}, \quad L(A) = rango(A).$

   (f) $L : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad L(g(x)) = g(0).$

2. Obtener en cada caso, si es posible, una aplicación lineal con las propiedades siguientes:

   (a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(1, -1) = (1, -1, 0), L(-1, 2) = (0, 1, -1).$

   (b) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad T(1) = x + 2, T(1 + x) = 1 + x^2, T(x + x^2) = x - 1$

   (c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(1, 0) = (0, -1, 2).$

   (d) $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3, \quad L(x) = x^2 + 1, L(x^2) = 0, L(2x + 1) = x^2 + 1, L(1) = 0$

3. Si es posible encuentre el inverso del operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x, x + 2y, y - 4z)$.

4. Sea $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 0\}$.

   (a) Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nucleo\,(T) = H$.

   (b) Encuentre una transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Imagen\,(L) = H$.

5. Suponga que $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales con $m > n$ ¿Es posible que LT, esto es $L \circ T$, sea invertible?

6. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Si $u \in F$, se llama antiimagen de x al cojunto $f^{-1}(u) = \{x \in E : f(x) = u\}$. En cada caso calcular la antiimagen del vector u:

(a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, v) = (y + v, x, x - 2v); u = (0, -1, 0)$.

(b) $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad f(A)) = tr(A); u = 0$. La traza de A ($tr(A)$) es igual a la suma de los elementos de la diagonal princiapal de A.

7. Obtener la imagen y el núcleo de las siguientes aplicaciones, calcular también la dimensión de estos subespacios:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x, 0, x - y)$.

   (b) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x, y, z, v) = (x + z, y - v)$.

   (c) $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}, \quad L(p(x)) = p(0)$

   (d) $f : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathcal{M}_{3\times 1}, \quad f(A) = f([a_1 a_2 a_3]) = [a_3]$.

8. Dado el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido de la forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 - 2ax_2 - 4x_3, 3x_1 - 3x_2 + (5 + a)x_3)$$

   Hallar el valor del parámetro a para que la dimensión del núcleo sea máxima, y en este caso calcular la base de la imagen y una base del núcleo.

9. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, y sea b un vector de $\mathbb{R}^m$. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ y la aplicación lineal $L_A(v) = Av$. Demostrar:

   (a) El sistema es compatible si, y sólo si, b está en la $Imagen(L_A)$.

   (b) El sistema es compatible determinado si, y sólo si, b está en la $Imagen(L_A)$ y $Nucleo(L_A) = \{0\}$.

   (c) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, b está en la $Imagen(L_A)$ y $Nucleo(L_A) \neq \{0\}$.

10. Sea $L : P_2 \to M_{2\times 2}$ la transformación

$$L(f) = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x)\ dx & f(1) - f(0) \\ f'(0) & f'(1) \end{pmatrix}.$$

   Determine

   (a) Una representación matricial de L respecto a las bases estándar de P_2 y de $M_{2\times 2}$.

   (b) Las dimensiones del núcleo y la imagen de L.

11. Dada la aplicación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida de la forma:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - 3x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4).$$

    Se pide:

    (a) Bases del núcleo y de la imagen de L. Clasificar L.

    (b) Matriz de L respecto de las bases canónicas.

    (c) Matriz de L respecto de las bases $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

12. En cada caso probar que las aplicaciones consideradas son isomorfismos y hallar sus inversos.

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$, $f(a, b, c) = (a + c)x^2 + (b + c)x + (a + b)$

    (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_1, a_2, a_3) = a_1 + (a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2 + a_3)x^2$. También calcular las matrices asociadas a T y T^{-1} considerando las bases $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$ y $\{1, 1 + x, x + x^2\}$ en $\mathbb{P}_2$

13. Dar ejemplos de transformaciones lineales que sean una reflexión, rotación, contracción, ampliación o proyección ortogonal.