4. Problemas. Valores y vectores propios.

Álgebra Lineal- Propedéutico

Mayo de 2012

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Obtener

   (a) Los valores y vectores propios de cada una de ellas.

   (b) Una base de los subespacios propios.

   (c) Diagonalizarlas si es posible.

2. Calcular los valores propios y los subespacios propios de los siguientes endomorfismo, y si es posible diagonalizarlos:

   (a) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1+x_2+x_3, 2x_1+3x_2+2x_3, x_1+x_2+2x_3)$.

   (b) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a & a-b \\ 3c-d & -2c+2d \end{pmatrix}$.

   (c) $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad L(a+bx+cx^2) = (a+b)+bx+(a+b+c)x^2$.

3. Demostrar que si u es un vector propio de las matrices A y B también lo es de $A+B$. Hallar el valor propio correspondiente.

4. Hallar bases de los subespacios propios de A y A^T, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y comprobar que no coinciden.

5. Hallar los valores de α que hacen que sean diagonalizables las siguientes matrices:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (b) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   .

6. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Demostrar que:

(a) A es invertible si, y sólo si, los valores propios de A son distintos de cero.

(b) Demostrar que si A es invertible entonces los valores propios de A^{-1} son de la forma $\frac{1}{\lambda}$, siendo λ un valor propio de la matriz A.

7. Aplicar diagonalización para calcular A^5 si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Dadas las matrices simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una matriz invertible T y una matriz ortogonal Q tal que $T^{-1}AT = Q^{-1}AQ$

9. Sea $L : P_2 \to P_2$ la transformación $L(f) = f(x) + f'(x) + xf'(x)$. Encuentre los espacios propios de L y verifique que sus elementos satisfacen la definición de vectores propios.

10. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $L : V \to V$ una tranformación lineal. Suponga que se sabe que L es diagonalizable ¿Qué puede decir de su polinomio característico?

11. Suponga que $p(\lambda)$ y $q(\lambda)$ son los polinomios característicos de las matrices A y $A - cI$.Demuestre que $q(\lambda) = p(\lambda + c)$.