1. Problemas. Límites, continuidad y aspectos elementales de derivación

Cálculo en una y varias variables- Propedeútico
Mayo de 2012

1. Calcule los siguientes límites
   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \cos(x+\sin x)$
   (c) $\lim_{v\to 4^+} \frac{4-v}{|4-v|}$
   (d) $\frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$
   (e) $\lim_{s\to 16} \frac{4-\sqrt{s}}{s-16}$
2. Evalúe $\lim_{x\to 0^+} \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right\}$
   (a) 0
   (b) ∞
   (c) $-\infty$
   (d) e
   (e) $\frac{1}{\pi}$
3. Diga si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $x = 2$ tal que $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{x-2}$ para $x \neq 2$.
4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & x \leq 0 \\ ax & x < 0 \end{cases}$. Muestre que f es continua en todo $\mathbb{R}$.
5. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ 3-x & x \in [0,3) \\ (x-3)^2 & x > 3 \end{cases}$
   (a) Evalúe cada uno de los siguientes límites, en caso de que existan
      i. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
      ii. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

iii. $\lim_{x\to 0} f(x)$
iv. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$
v. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
vi. $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua la función $f(x)$?

(c) Bosqueja la gráfica de f.

6. Muestre que la ecuación $2\sin x = 3 - 2x$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

7. Justifique la existencia o no de los siguientes límites para las funciones dadas.

   (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$

   (c) $\lim_{x\to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

8. Encuentre la δ más grande que "funciona" para la ε dada

   (a) $\lim_{x\to 4} 5x = 20$, $\varepsilon = 0.5$.

9. Sea f la función para la cual solo se sabe que

$$0 < |x - 3| < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 5| < 0.1$$

   ¿Cuáles de las siguiente afirmaciones son necesariamente ciertas?

   (a) $|x - 3| < 1 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.1$

   (b) $|x - 2.5| < 0.3 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.1$

   (c) $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$

   (d) $0 < |x - 3| < 2 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.1$

   (e) $0 < |x - 3| < 0.5 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.1$

   (f) $0 < |x - 3| < \frac{1}{4} \Rightarrow |f(x) - 5| < \frac{1}{4}(0.8)$

   (g) $0 < |x - 3| < 1 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0.2$

   (h) $0 < |x - 3| < 1 \Rightarrow |f(x) - 4.95| < 0.05$

(i) $\lim_{x\to 3} f(x) = l \Rightarrow 4.9 \leq L \leq 5.1$

10. Calcular los siguientes límites

    (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

    (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

    (c) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

    (d) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

    (e) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

    (f) $\lim_{x\to\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

11. Prueba que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ (Este ejercicio es sobre la comprensión del significado de límite)

12. Calcule los siguientes límites

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

    (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x+2x}{x+x^2}$

    (d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

13. Encuentre el error en el siguiente cálculo donde se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+4} &= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

    (Observación: el límite es igual a -4)

14. Calcule los siguientes límites

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$

    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

15. Pruebe que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.
16. Pruebe que no existe $l \in \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = l$$
17. Define "$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$".
18. ¿Existe alguna función continua F, $Dom(F) = \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$, $\forall x \in Dom(f)$, cuando $f(x) = \frac{|x|}{x}$? Justifique tu respuesta.
19. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ninguna parte, pero que $|f|$ sea continua en todas partes.
20. Muestre que si f es continua en a entonces $|f|$ también lo es.
21. Considere el polinomio $f(x) = x^3 - x + 3$. Encuentre $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algún $x \in [n, n+1]$.
22. Pruebe que existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$\sin x = x - 1$$
23. Propiedad del punto fijo: Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua $f([0,1]) = [0,1]$. Muestre que existe $x_0 \in [0,1]$, tal que $f(x_0) = 0$. (Como sugerencia considere $h(x) = x - f(x)$).
24. Sean $f, g : [a,b] \to [a,b]$ continuas tal que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Muestre que existe al menos un valor $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$. (Como sugerencia considere $h(x) = f(x) - g(x)$).
25. Del problema 23 sabemos que si: $f : [0,1] \to [0,1]$, continua, $Im(f) = [0,1]$ entonces la gráfica de f intersecta la parte de la gráfica de la función identidad contenida en el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$. Muestre que bajo estas condiciones
    (a) La gráfica de f también intersecta la otra diagonal del cuadrado unitario.
    (b) Más generalmente, si g es continua en $[0,1]$, ($g(0) = 0$ y $g(1) = 1$) ó ($g(0) = 1$ y $g(1) = 0$) entonces la gráfica de f intersecta la gráfica de g.

26. Muestre que la ecuación cúbica $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene al menos una raíz real.

27. Encontrar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $k(x)$ definida por
$k(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \\ ax^2 + bx, & x \in [-2, 2] \end{cases}$
es continua.

28. Usando directamente la definición de derivada muestre que

    (a) Si $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ si $a \neq 0$.

    (b) Si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ para $a > 0$.

    (c) Si $f(x) = x^3$ calcula $f'(9)$, $f'(a^2)$ y $f'(x^2)$.

29. Suponga que $f(a) = g(a)$ y que la derivada de f en a, por la izquierda es igual a la derivada de g en a por la derecha. Si definimos
$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq a \\ g(x), & x \geq a \end{cases}$
Pruebe que h es diferenciable en $x = a$.

30. Suponiendo que f es diferenciable en x, pruebe que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

(Como sugerencia usa el viejo truco de sumar y restar lo mismo en el numerador)

31. Para las siguientes funciones f calcular $f'(f(x))$

    (a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

    (b) $f(x) = x^2$
    Observación: no es calcular $(f \circ f)'(x)$

32. Para las siguientes funciones f, calcular $f(f'(x))$

    (a) $f(x) = \frac{1}{x}$

    (b) $f(x) = x^2$

33. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - \sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son veraderas o falsas

(a) f es continua en $x = 0$.

(b) $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(c) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

(d) f es diferenciable.

34. ¿Cuál de las gráficas en la figura 1 representa la gráfica de una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 1 + y^4$? No resuelva la ecuación.

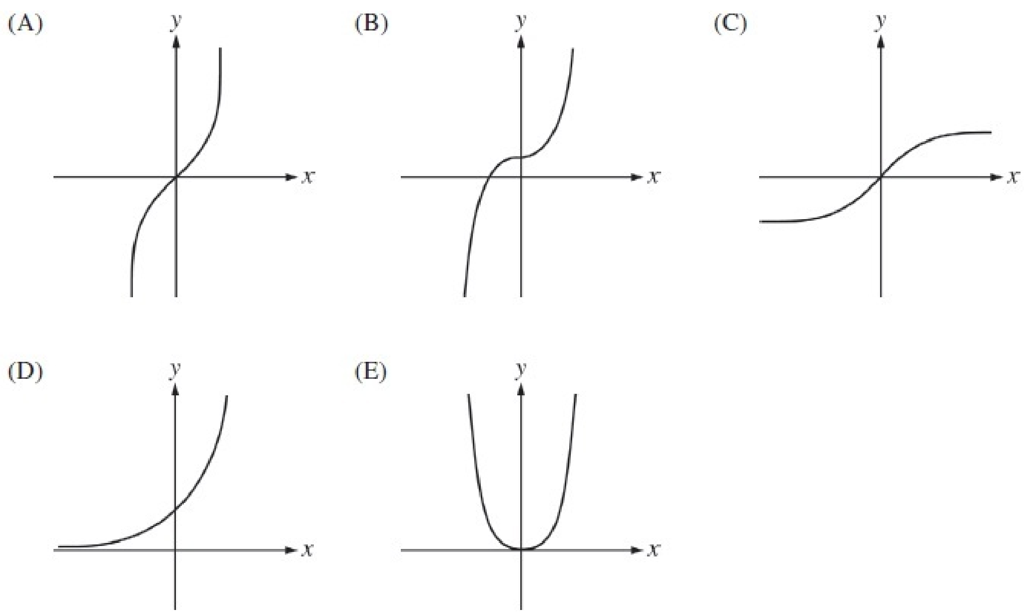

Figure 1: Problema 34