2. Problemas. Derivación e integración

Cálculo en una y varias variables- Propedéutico

Mayo de 2012

1. (a) Establecer cuidadosamente la regla de la cadena.

   (b) Calcular la derivada de las funciones siguientes:

   (b1) $f(x) = \sin(3x + x^3)$,

   (b2) $f(x) = \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right)$,

   (b3) $f(x) = \cos(x + \sin x)$,

   (b4) $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$,

   (b5) $f(x) = \left(3x + \sin^7 x\right)^7$,

   (b6) $f(x) = \frac{\sin\left(x^2\right)\sin^2 x}{1+\cos x}$.

2. Describe f' en términos de g' para

   (a) $f(x) = g(x + g(a))$

   (b) $f(x) = g(x \cdot g(a))$

   (c) $f(x) = g(x + g(x))$

   (d) $f(x + 3) = g(x^2)$

3. Encuentre el radio r y la altura h del cilindro circular recto con el volúmen más grande que se puede insertar en un cono circular recto con radio de 6 cm y altura de 10 cm.

   (a) $r = \frac{\pi}{2}$ cm y $h = 9$ cm.

   (b) $r = 4$ cm y $h = \frac{10}{3}$ cm.

   (c) $r = 3$ cm y $h = 2$ cm.

   (d) $r = 2$ cm y $h = 3$ cm.

   (e) $r = 1$ cm y $h = 7$ cm.

4. Sea g una función cuya derivada g' es continua y tiene la gráfica que se muestra en la figura 1. ¿Cuál de los siguientes valores para x es el máximo entre ellos para g.

   (a) $x = 2$

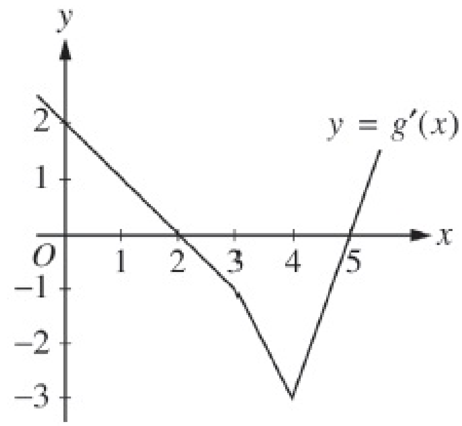

Figure 1: Problema 4

(b) $x = 3$

(c) $x = 4$

(d) $x = 5$

(e) Ninguno de los anteriores

5. Encuentre la recta tagente a la curva de ecuación $y = x^{\sin x}$ en el punto $x = \frac{\pi}{2}$

   (a) $y = x$.

   (b) $y = \ln x$.

   (c) $y = x^{3/2}$.

   (d) $y = \sin x$.

   (e) No existe

6. En la Figura 2 se muestran gráficas de las derivadas de dos funciones f. Bosquejar las gráficas de las correspondientes funciones f.

7. Bosquejar la gráfica de una función diferenciable tal que $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. En caso de que esto no sea posible, justifique tu respuesta.

8. Bosquejar la gráfica de una función deferenciable tal que $f(x) = 0$ solamente en $x = 1, 2$, $f(3) = 4$, $f(5) = -1$.

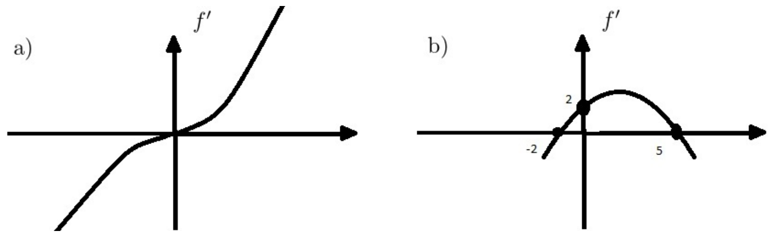

Figure 2: Problema 6

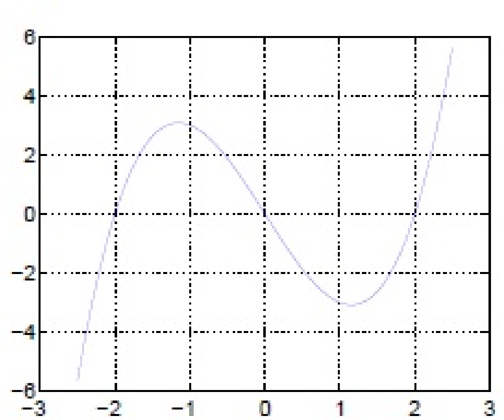

Figure 3:

9. Considere la siguiente afirmación: Si f es una función creciente en el intervalo cerrado con extremos a y b y creciente en [b,c] entonces f es creciente en [a,c]. Si la afirmación es cierta demuéstrela, en caso contrario dar un contraejemplo

10. Considere la siguiente información: Si f es decreciente en $[a, b)$ y decreciente en $[b, c]$, entonces f es decreciente en $[a, c]$. Si la afirmación es cierta demuéstrela, en caso contrario dar un contraejemplo.

11. En la Figura 3 se muestra la gráfica de $f'(x)$. A partir de esta gráfica dar el bosquejo de la gráfica de $f(x)$ tal que $f(0) = 0$.

12. Muestre que la caja de volumen fijo V que tiene área mínima está dada por un cubo.

13. Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2-x^{-2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$. ¿Para cuántos

valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

(a) Ninguno
(b) Uno
(c) Dos
(d) Tres
(e) Cuatro

14. $\int_{-3}^{3} |x+1| =$

(a) 0,
(b) 5,
(c) 10,

15. Suponiendo que $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que $f^2(x) + g^2(x) = C$ para alguna constante C.
(b) Determine el valor de C si $f(0) = 0$ y $g(0) = 1$.
(c) De un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que satisfagan los incisos a) y b).

16. Sean f, g funciones real valuadas de clase C^2 definidas en $\mathbb{R}$. Si $f'(x) > g'(x)$ para todo x, ¿Cuál de las siguientes desigualdades debe ser cierta para $x > 0$?

(a) $f(x) > g(x)$,
(b) $f''(x) > g''(x)$,
(c) $f(x) - f(0) > g(x) - g(0)$,
(d) $f'(x) - f'(0) > g'(x) - g'(0)$,
(e) $f''(x) - f''(0) > g''(x) - g''(0)$

17. ¿Para qué valores de b la recta $y = 10x$ es tangente a la curva $y = e^{bx}$ en algún punto del plano (x, y)?

(a) $\frac{10}{e}$,
(b) 10,
(c) $10e$,

(d) e^{10},

(e) e.

18. Un objeto circular aumenta de tamaño de una manera que no se ha especificado, pero se sabe que cuando su radio es igual a 6 la tasa de variación del radio es igual a 4. Encuentre la tasa de cambio del área cuando el radio es igual a 6. (Como sugerencia sean $r(t)$ =radio, $A(t)$ =área, al tiempo t,...)

19. Supongamos que se nos ha dicho que el objeto circular es una sección de un objeto esférico. Encuentre la tasa de cambio del volumen cuando el radio es igual a 6. (Volumen de la esfera=$\frac{4}{3}\pi r^3$)

20. Sea $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ y sea $f(0) = 0$. Suponiendo que h y k son funciones tales que

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sin^2(\sin(x+1)) \qquad & k'(x) &= f(x+1) \\ h(0) &= 3 \qquad & k(0) &= 0 \end{aligned}$$

Calcular

(a) $(f \circ h)'(0)$

(b) $(k \circ f)'(0)$

(c) $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x) = h(x^2)$.
(Sea muy cuidadoso)

21. La figura 4 muestra la gráfica de la derivada de f. Encontrar todos los máximos y mínimos locales de f.

22. Muestre que ningún elemento de la familia de polinomios $f_m(x) = x^2 - 3x + m$ tiene dos raíces en $[0, 1]$, independientemente del valor de x.

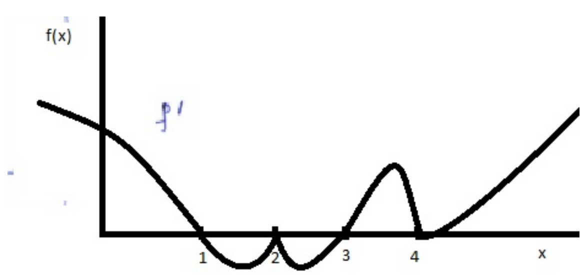

Figure 4: Máximos y mínimos locales de f.

23. Muestre que $f(x) = x^2 - \cos x$ tiene precisamente dos raíces.

24. Verificar el teorema del valor medio para derivadas en el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[a, b]$, $0 \leq a \leq b$.

25. Use el teorema del valor medio para mostrar que $\sin x < x$, para $x > 0$. (Sugerencia: considere dos casos a.- $x > 2\pi$, b.- $0 < x < 2\pi$)

26. Ilustre el teorema del valor medio para derivadas encontrando puntos en el intervalo abierto (a, b) donde la tangente a $graf(f)$ sea paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

    (a) $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$

    (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[a, b] = [1, 2]$

27. Aplique el teorema del valor medio para derivadas a la función $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ en el intervalo $[0, x]$ y use el resultado del problema 40 para mostrar que

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{para } x > 0$$

ó
¿Es cierta esta desigualdad para $x < 0$? Justifique su respuesta.

28. Considere la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, para $x \in \mathbb{R}$

    (a) Encontrar los valores críticos de F y determina los intervalos donde F crece/decrece.

    (b) Determinar la concavidad de la gráfica de F y encuentra los puntos de inflexión, de existir.

    (c) Bosquejar la gráfica de F.

29. Sea $F(x) = \int_\pi^x t \sin t dt$

    (a) Calcular $F(\pi)$

    (b) Calcular $F'(x)$

    (c) Calcular $F'(2\pi)$

30. Suponiendo que g es diferenciable y decreciente en $x < 1$, $g'(1) = 0$, $g'(x) > 0$ si $x > 1$ y que $g(1) = 0$. Defina $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Justifique las siguientes afirmaciones

(a) G es continua,

(b) G es dos veces diferenciable,

(c) $x = 1$ es un punto critico de G,

(d) La gráfica de G es cóncava hacia abajo para $x < 1$ y cóncava hacia arriba para $x > 1$.

31. Sean $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^4}dx$, $K = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ y $L = \int_0^1 \sqrt{1-x^8}dx$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de las integrales anteriores son ciertas?

(a) $J < L < 1 < K$,,

(b) $J < L < K < 1$,

(c) $L < J < 1 < K$,

(d) $L < 1 < J < K$.

32. Si $x'(-2) = -s'(-2) = s(-2) = -s(2) = 1$, entonces el valor de la integral $\int_0^2 xs''(2-x^2)dx$ está dado por

(a) 3,

(b) 1,

(c) -1,

(d) -3,

(e) 0.

33. Calcular las derivadas de las funciones

(a) $F(x) = \int_0^{x^3} t\cos t dt$,

(b) $F(x) = -\int_{\cos x}^1 \sqrt{1-t^2}dt$

(c) $F(x) = \cos\left[\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right]$

(d)

$$G(x) = \int_a^{\int_0^x \frac{1}{\sin^2 t}dt} \frac{1}{1+\cos^2 t}dt$$

34. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

(a) $F(x) = \int_0^{2x^2} \sin^2 s ds$,

(b) $F(x) = \int_{15}^{x} \left[\int_0^z \frac{1}{1+s^2+\cos^2 s} ds\right] dz$

(c) Calcula $\left(F^{-1}\right)'(x)$ para $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$
(Sugerencia; encontrar $(F^{-1})'(x)$ en términos de $F^{-1}(x)$)

35. Muestre que la expresión

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

no depende de x.

36. Encuentre una función g tal que

$$\int_0^x t g(t) dt = x + x^2$$

37. Encuentre todas las funciones continuas f tales que

$$\int_0^x f(w) dw = [f(x)]^2 + C$$

38. Calcular $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$

39. Pruebe que $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt > 0$, para $x > 0$.

40. Sea h la función definida por $h(x) = \int_0^{x^2} e^{x+t} dt$ para todos los números reales x. Entonces $h'(1) =$

(a) $e - 1$,

(b) e^2,

(c) $e^2 - e$,

(d) $2e^2$,

(e) $3e^2 - e$.

41. Evalúe $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

(a) 1

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 2

(d) ∞

(e) $-\infty$

42. Si $f(x) = \int_0^{x^2} (t + e^t)dt$ entonces $f'(x)$ es igual a

 (a) $e - 1$
 (b) 0
 (c) $x^2 + e^{x^2} - 1$
 (d) $2x^3 + 2xe^{x^2}$
 (e) $x^4 + x^2e^{x^4}$

43. Sea f una función real-valuada y continua definida en el intervalo cerrado [-2,3]. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones no es necesariamente cierta?

 (a) f es acotada
 (b) $\int_{-2}^{3} f(t)dt$ existe
 (c) Para cada c entre $f(-2)$ y $f(3)$, existe un valor $x \in [-2, 3]$ tal que $f(x) = c$
 (d) Existe un valor M en la imagen $f([-2, 3])$ tal que $\int_{-2}^{3}$ tal que $\int_{-2}^{5} f(t)dt = 5M$,
 (e) $\lim_{h\to 0}$.
 (f) $\lim_{h\to}$
 (g) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ existe.