3. Problemas. Veactores y Geometría en espacios euclidianos

Cálculo en una y varias variables- Propedéutico

Mayo de 2012

1. Sea $\vec{c} \in \mathbb{R}$ un vector no nulo. Determine el vector unitario en dirección opuesta a $\vec{c}$.

2. Encuentre la ecuación de la esfera tal que el segmento que une los puntos $(-1, 4, 2)$ y $(3, -2, 6)$ sea un diámetro de ella.

3. Encuentre el área del triángulo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$.

4. Encuentre las ecuaciones paramétricas escalares de la recta que pasa por $(5, 6, -3)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $(3, 2, -1)$ y $(7, -5, 4)$.

5. Considere el punto $P = (3, 1, -2)$ y la recta tal que $x+1 = y+2 = z+1$. Encuentre el punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ en la recta tal que $\vec{PQ}$ es ortogonal a la recta dada.

6. Encuentre la ecuación del plano que contiene el punto $(2, 1, -3)$ y es perpendicular a la recta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = -\frac{z}{4}$$

7. Demuestre que

$$\left(\|\vec{b}\|\vec{a} - \|\vec{a}\|\vec{b}\right) \perp \left(\|\vec{b}\|\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b}\right)$$

8. Verifique la igualdad

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\vec{a}\vec{b}$$

9. En el plano (x, y)

   a) Verifique que la recta $Ax + By + C = 0$ puede parametrizarse como

   $$\alpha(t) = \left(-\frac{C}{A}\right)\vec{i} + \left(B\vec{i} - A\vec{j}\right)t,$$

   siempre que $A \neq 0$

   b) Muestre que $A\vec{i} + B\vec{j}$ es ortogonal a la recta.

   c) Muestre mediante métodos vectoriales que

   $$d(\vec{0}, l) = \frac{|c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

10. Determinar la ecuación del plano que contiene las rectas

$$x = t + 2, y = 3t - 5, z = 5t + 1$$

y

$$x = 5 - t, y = 3t - 10, z = 9 - 2t.$$

11. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que resulta de intersectar los planos

$$x + 2y - 3z = 5$$

y

$$5x + 5y - z = 1.$$

12. Dar una justificación del por qué no existe plano paralelo al plano $5x - 3y + 2z = 10$ que contenga a la recta con ecuaciones paramétricas dadas por

$$x = t + 4,\ y = 3t - 2,\ z = 5 - 2t.$$

13. Encontrar la ecuación del plano que contiene los puntos $(0, 2, 1)$, $(7, -1, 5)$ y $(-1, 3, 0)$.

14. Encontrar una ecuación de la forma $Ax+By+Cz = D$ para el plano descrito paramétricamente como

$$x = 3s - t + 2,\ y = 48 + t,\ z = 8 + 5t + 3.$$

15. Calcular la distancia entre las rectas

$$l(t) = (t - 7, 5t + 1, 3 - 2t)$$

y

$$m(t) = 4t\vec{i} + (2 - t)\vec{j} + (8t + 1)\vec{k}.$$

16. Calcular la distancia entre los planos

$$5x - 2y + 2z = 12$$

y

$$-10x + 4y - 4z = 8.$$

17. Describe el plano generado por los vectores

$$\vec{u} = (2, 7, 0)$$

y

$$\vec{v} = (0, 3, 1).$$

18. Dar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, -2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-3, 5, 2)$.

19. Describir vectorialmente el paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\vec{i} + 5\vec{k}$ y $7\vec{j}$.

20. Encontrar los puntos de intersección de la recta

$$x = 3 + 2t,\ y = 7 + 8t,\ z = -2 + t$$

con los planos coordenados.

21. Use métodos vectoriales para describir los puntos dentro del paralelogramo con un vértice en $P(x_0, y_0, z_0)$ y con lados que salen de este vértice iguales en tamaño y sentido a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

22. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no nulos y no colineales. Use vectores para describir al conjunto de puntos contenidos en el paralelogramo con vértice en un punto X_0 y cuyos lados adyacentes son paralelos a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y tienen las mismas longitudes que $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Calcule el área del paralelogramo.

23. Muestre que todo ángulo que subtiende a un diámetro de un círculo de tal forma que los tres vértices están sobre el círculo.

24. Considere el paraboloide elíptico
$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = z$$

   a) Describir la sección con el plano $z = 1$.

   b) ¿Qué sucede con la sección cuando $b \to +\infty$?

   c) ¿Qué ocurre con la superficie cuando $b \to \infty$?

25. Considere las superficies $x + 2y + 3z = 6$ y $x + y - 2z = 6$. Determinar la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas superficies.

26. Considere las superficies $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ y $x^2 + y^2 = z^2$. Determinar la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas superficies.

27. Considere las funciones $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y $g(x, y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$. Calcular los límites cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de las trayectorias siguientes:

   (a) el eje x,

   (b) el eje y,

   (c) la recta $y = mx$,

   (d) la espiral $r = \theta$, $\theta > 0$.

   (e) La curva diferenciable $y = f(x)$ sabiendo que $f(0) = 0$.

28. Calcular

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

29. Sea
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (a) Muestre que g_x y g_y existen en el origen. Encuentre los valores de g_x y g_y en $(0, 0)$.

   (b) ¿Es cierto que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x, y)$ existe?