EXAMEN DE ADMISIÓN AL POSGRADO EN MATEMÁTICAS

para el trimestre 19-O

NOMBRE:____

INSTRUCCIONES:
De cada una de las siguientes secciones resolver DOS preguntas (OCHO EN TOTAL).
Al principio de la sección se indica el valor de cada pregunta (máximo puntaje: 20 PUNTOS EN TOTAL).
Se debe resolver cada pregunta de manera precisa y completa, aunque también se pueden considerar ideas y esbozos.

ÁLGEBRA LINEAL

cada pregunta de esta sección vale 3 puntos

1. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

   a) Supongamos que A es triangular. Demuestre que A es invertible si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

   b) Supongamos que A es una matriz ortogonal, esto es, $A^T A = I_n$. Pruebe que $\det A = \pm 1$.

2. Sean $P_4(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más 4 y $D : P_4(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ el operador derivada. Calcule $[D]_B$ y $[D]_{B'}$ (esto es, la representación matricial del operador D en las bases B y B' respectivamente) para las siguientes bases:

   a) $B = \left\{1, x, x^2, x^3, x^4\right\}$

   b) $B' = \left\{1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\right\}$

   c) Determine la matriz de transición de la base B a la base B' de $P_4(\mathbb{R})$.

3. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\Bbbk$, y $T : V \to V$ un operador lineal.

   a) Demuestre que T es invertible si y sólo si 0 no es un valor propio de T.

   b) Supongamos que T es invertible. Demuestre que $\lambda \in \Bbbk$ es un valor propio de T si y sólo si $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de T^{-1}.

CÁLCULO

cada pregunta de esta sección vale 3 puntos

4. Conteste lo que se pide a continuación.

   a) Explique el concepto de valor absoluto de un número real.

   b) ¿En qué consiste el método de inducción matemática y para qué sirve?

   c) ¿Qué significa que una sucesión infinita real $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al número $a \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$?

   d) ¿Qué dice la regla de L'Hopital?

5. Encuentre el triángulo rectángulo de área 1 con el mayor perímetro.

6. Calcule $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, usando la tranformación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

ANÁLISIS REAL

cada pregunta de esta sección vale 2 puntos

7. Sea p una función con valores reales y Q una función con valores en $\mathbb{R}^n$, ambas definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$. Demuestre que para cada $t_0 \in [a, b]$ y cada vector $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$y'(t) + p(t)y(t) = Q(t)$$

con condición inicial $y(t_0) = y_0$ y que esta solución está dada por la fórmula:

$$y(t) = y_0 e^{-q(t)} + e^{-q(t)} \int_{t_0}^{t} Q(s)e^{q(s)} ds$$

donde $q(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds$.

8. Una función $F(t)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ nunca se anula y tiene derivada $F'(t)$ continua en cada punto t. Además siempre es paralela con su derivada. Demuestre que existe un vector $F_0 \in \mathbb{R}^n$ y una función $u(t)$ con valores reales positivos tales que

$$F(t) = u(t)F_0, \quad \forall t.$$

9. Sean $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{R}$. Demuestre que
   (a) La sucesión converge a l si y sólo si de cualquier subsucesión se puede extraer, a su vez, una subsucesión convergente a l.
   (b) Si la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ es de Cauchy, entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ tal que

$$\sum_{k\geq 0} |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \infty$$

ANÁLISIS COMPLEJO

cada pregunta de esta sección vale 2 puntos

10. Encuentre los puntos en donde es analítica la función $g(z) = z^2\overline{z}$.

11. Determine si la siguiente función es continua en $z = 0$. Justifique.

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = x+iy = 0 \\ \frac{y^4}{x^2+y^2} + i\frac{x^5}{x^2+y^2} & \text{si} \quad z = x+iy \neq 0. \end{cases}$$

12. Demuestre que si z es raíz n-ésima de la unidad y z es diferente de 1 entonces $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{n-1} = 0$.

EXAMEN DE ADMISIÓN AL POSGRADO EN MATEMÁTICAS

para el trimestre 20-O

NOMBRE:____

INSTRUCCIONES:
I. De cada una de las siguientes secciones resolver DOS preguntas (OCHO EN TOTAL).
II. Al principio de la sección se indica el valor de cada pregunta (máximo puntaje: 20 PUNTOS EN TOTAL).
III. Se debe resolver cada pregunta de manera precisa y completa, aunque también se pueden considerar ideas y esbozos.

ÁLGEBRA LINEAL

cada pregunta de esta sección vale 3 puntos

1. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más 3 con coeficientes complejos y la base $B = \{1, 1-x, 2-x^2, 3-x^3\}$. Definimos las transformaciones lineales $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ y $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ como

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= x^2 p(x) \text{ y} \\ D(p(x)) &= p'(x). \end{aligned}$$

   a) Determine la representación matricial $D \circ T$ en la base B.

   b) ¿Será cierto que $\dim(\ker(D \circ T)) = \dim(\ker(T)) + \dim(\ker(D) \cap \operatorname{Im}(T))$? Pruebe su respuesta.

2. Pruebe que una transformación lineal $f : U \to V$ es invertible si y sólo si la imagen de cualquier conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

3. Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y $T : V \to V$ un operador lineal. Pruebe que $\lambda \in K$ es un valor propio de T si y solo si el subespacio propio E_λ asociado a λ es el núcleo de $\lambda I - T$, donde I denota el operador identidad en V.

CÁLCULO

cada pregunta de esta sección vale 3 puntos

4. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable estrictamente creciente, entonces f^{-1} también lo es.

5. Halle la suma de los primeros n numeros de la serie, a continuación demostrar la convergencia de la misma y, finalmente hallar la suma de toda la serie.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$$

6. Enuncie el teorema de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$. Ahora demuestra que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

   si C es una curva cerrada suave y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

ANÁLISIS REAL

cada pregunta de esta sección vale 2 puntos

7. Demuestre que si $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq\ 1}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ es finito, entonces o bien ambas sucesiones convergen al mismo límite o bien ambas divergen.

8. Si f es uniformemente continua sobre los racionales muestre que:

   (i) Para todo x real existe $g(x) = \lim_{y\to x, y\in\mathbb{Q}} f(y)$,

   (ii) La función g así definida es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

9. Sean $x_n > 0$, $y_n > 0$ dos sucesiones. Demuestre lo siguiente:

   (i) Si $\sum y_n$ converge y $\frac{x_n}{y_n}$ es decreciente entonces $\sum x_n$ converge.

   (ii) Si $\sum y_n$ diverge y $\frac{x_n}{y_n}$ es creciente entonces $\sum x_n$ diverge.

   (iii) Si $\lim \frac{x_n}{y_n} = k$, $0 < k < \infty$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

ANÁLISIS COMPLEJO

cada pregunta de esta sección vale 2 puntos

10. Sea $\frac{x-iy}{x+iy} = a + ib$. Pruebe que $a^2 + b^2 = 1$

11. Determine si existe el siguiente límite y en tal caso encuentre su valor

$$\lim_{z\to 1} \frac{\overline{z}-1}{z-1}$$

12. Encuentre la región de analiticidad y la derivada de la siguiente función:

$$\frac{z}{z^2-1}$$